円柱のまわりの流れの解析について：中程度のレイノルズ数領域の場合

円柱のまわりの流れの解析について
—中程度のレイノルズ数領域の場合

奥田教海・沢田　敬*・一場久美

Numerical Analysis for the Flow around a Cylinder
—In the Flow Region with medium Reynolds Number

Kyōkai Okuda, Takashi Sawada and Hisayoshi Ichiba

Abstract

The exact solutions for the uniform, incompressible and viscous flow around a cylinder could not be obtained because of nonlinearity belonging to the governing equations——Navier-Stokes equations. In low Reynolds number region, approximate solutions were obtained with Stokes or Oseen equations ; on the contray, the methods of boundary-layer approximation were applied to the flow in high Reynolds number region.

The authors present the numerical solutions for the flow in medium Reynolds number, 40 and 500, for example, with explicit method using hybrid mesh, which consists of Cartesian and cylindrical coordinates.

I. 緒　　言

非圧縮性，粘性，一様流中に置かれた円柱のまわりの流れは，ナビエ・ストークス方程式により表わされるが，非線型のため，直接に厳密解を得ることはできない。レイノルズ数が極めて小さい範囲ではストークスやオゼーンの式のような近似式で解が得られ，極めて大きい範囲では境界層近似が適用されている。しかし，中程度のレイノルズ数領域においてはまだ解析的に解く方法は確立されておらず，数値解析が最も有効な方法となつている。それ故，近年の大型電子計算機の発達と相俟つて省略されないところのナビエ・ストークス方程式の種々の数値解法が試みられてきた。本研究はハイブリッドメッシを用いた陽解法により，レイノルズ数40と500において数値計算を試みたものである。

II. 支配方程式

2次元非圧縮性，一様流中の粘性流れはナビエ・ストークス方程式と連続式により表わされる。

*松下電器産業株式会社

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{3}$$

上式より圧力Pを消去し，渦度ζに関する渦輸送式を導く。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x}+\frac{\partial(v\zeta)}{\partial y}=\nu\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right) \tag{4}$$

渦度ζを流れ関数ψを用いて表わすと次式のようなポアソン型の方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\zeta \tag{5}$$

式（4），（5）を円筒座標系に変換すると

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r\zeta)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(v_\theta\zeta)}{\partial\theta}=\nu\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\zeta}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\theta^2}\right\} \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}=-\zeta \tag{7}$$

無限遠速度，円柱の直径，動粘性係数を基本単位にとり無次元化すると

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'}+\frac{\partial(u'\zeta')}{\partial x'}+\frac{\partial(v'\zeta')}{\partial y'}=\frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \zeta'}{\partial y'^2}\right) \tag{4$'$}$$

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2}=-\zeta' \tag{5$'$}$$

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t'}+\frac{1}{r'}\frac{\partial(r'v_r'\zeta')}{\partial r'}+\frac{1}{r'}\frac{\partial(v_\theta'\zeta')}{\partial\theta'}=\frac{1}{Re}\left\{\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\frac{\partial\zeta'}{\partial r'}\right)+\frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2\zeta'}{\partial\theta'^2}\right. \tag{6$'$}$$

$$\frac{1}{r'}\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'\frac{\partial\psi'}{\partial r'}\right)+\frac{1}{r'^2}\frac{\partial^2\psi'}{\partial\theta'^2}=-\zeta' \tag{7$'$}$$

こゝでReはレイノルズ数を表わし，ρ，νはそれぞれ密度および動粘性係数を表わす。

III.　数　値　計　算

差分化は不等間隔格子における１次および２次の差分公式を用いて行った。円筒座標系における渦輸送式およびポアソン式は次のようである。

$$\begin{aligned}&\frac{\zeta_{jr,i\theta}^{n+1}-\zeta_{jr,i\theta}^{n}}{\delta t}+\frac{(rv_r\zeta)_{jr+\frac{1}{2},i\theta}^{n}-(rv_r\zeta)_{jr-\frac{1}{2},i\theta}^{n}}{r_{jr}DR_{jr}}+\frac{(v_\theta\zeta)_{jr,i\theta+\frac{1}{2}}^{n}-(v_\theta\zeta)_{jr,i\theta-\frac{1}{2}}^{n}}{r_{jr}\delta\theta}\\&\qquad=\frac{1}{Re}\left[\left\{\frac{2r_{jr}-\alpha_{jr}\delta r_{jr}}{r_{jr}(1+\alpha_{jr})\delta r_{jr}^2}\right\}\zeta_{jr-1,i\theta}^{n}+\left\{\frac{2r_{jr}+\delta r_{jr}}{\alpha_{jr}r_{jr}(1+\alpha_{jr})\delta r_{jr}^2}\right\}\zeta_{jr+1,i\theta}^{n}\right.\\&\qquad\quad\left.+\frac{1}{r_{jr}^2\delta\theta^2}\left\{\zeta_{jr,i\theta-1}^{n}+\zeta_{jr,i\theta+1}^{n}\right\}-\left\{\frac{2r_{jr}+\delta r_{jr}-\alpha_{jr}\delta r_{jr}}{\alpha_{jr}r_{jr}\delta r_{jr}^2}+\frac{2}{r_{jr}^2\delta\theta^2}\right\}\zeta_{jr,i\theta}^{n}\right]\end{aligned} \tag{8}$$

$$\zeta_{jr,i\theta}=-\left[\frac{1}{\alpha_{jr}(1+\alpha_{jr})\delta r_{jr}}\left\{\frac{2\alpha_{jr}}{\delta r_{jr}}\psi_{jr-1,i\theta}-\frac{2(1+\alpha_{ir})}{\delta r_{jr}}\psi_{jr,i\theta}+\frac{2}{\delta r_{jr}}\psi_{jr+1,i\theta}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r_{jr}}\psi_{jr+1,i\theta}-\frac{(1-\alpha_{jr}^2)}{r_{jr}}\psi_{jr,i\theta}-\frac{\alpha_{jr}^2}{r_{jr}}\psi_{jr-1,i\theta}\right\}$$
$$\left.+\frac{1}{r_{jr}^2}\left(\frac{\psi_{jr,i\theta-1}-2\psi_{jr,i\theta}+\psi_{jr,i\theta+1}}{\delta\theta^2}\right)\right] \tag{9}$$

δは座標間距離を表わし，αはセルとセルの座標間距離の比，DRはセルの半径方向の長さを表わす。

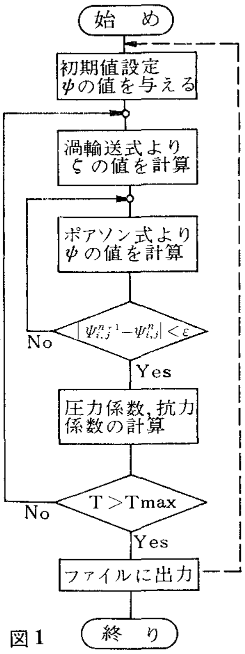

図1

流れ場の計算領域は13 $d\times 10\,d$の長方形であり，円柱の近くは円筒座標系が直交座標系と重複するようにとった。図1に簡単化した流れ図を示す。初期値としてポテンシャル流れの値を用い，次の境界条件を満足するように繰り返し計算を行った。

1．流入端で渦度およびy方向速度が0,
2．流出端でy方向の速度および渦度のx方向に関する変化が0,
3．上端および下端ではy方向速度は0であり，x方向速度は無限遠速度である,
4．円柱表面で流れ関数は一定であり，すべりがない。

計算は初めに直交座標系で行なわれ，その値から円筒座標系の最も外側のセルに補間される。つぎに外側のセルの値を境界値として円筒座標系における値が計算される。更に重複する部分の直交座標系における値が円筒座標系の値から補間される。補間は求めようとするセルに最も近い他の座標系の4つのセルの値から行われる。直交座標系から円筒座標系への補間を考えると，いま求める値を$A_{jr,i\theta}$，そのセルの直交座標系における座標値を(x_c, y_c)とする。直交座標系の4つのセルの持つ値を$A_{i,j}$, $A_{i+1,j}$, $A_{i,j+1}$, $A_{i+1,j+1}$とし座標値を(x_i, y_j), (x_{i+1}, y_j), (x_i, y_{j+1}), (x_{j+1}, y_{j+1})とするとy方向に関して

$$A_1=A_{i,j}+\frac{y_c-y_j}{y_{j+1}-y_j}(A_{i,j+1}-A_{i,j}) \tag{10}$$

$$A_2=A_{i+1,j}+\frac{y_c-y_j}{y_{j+1}-y_c}(A_{i+1,j+1}-A_{i+1,j}) \tag{11}$$

上の2つの値をx方向に関して補間すると，結局，求める値はつぎのようになる。

$$A_{jr,i\theta}=A_2+\frac{x_c-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}(A_1-A_2) \tag{12}$$

計算結果はファイルに記憶し順次計算を継いで行った。

Ⅳ.　計　算　結　果

レイノルズ数40および500の場合ともにステップ数は2000まで実行された。到達した無元時間は40の場合は20.37,　500の場合は20.32であった。全体の計算を通してタイムステップの大きさは約0.01で,実際の計算機のランニングタイムは北海道大学大型計算機センターのＦＡＣＯＭ230—60を使用して両方ともに約4.5時間であった。ポアソン式の計算繰り返し回数が1回,つまり流れ関数の値が定常になったと考えられるのはレイノルズ数40では無次元時間17.1,　500の場合は19.6であった。

図2はレイノルズ数40における抗力係数の圧力成分と摩擦による剪断力成分との関係を示している。図3はレイノルズ数500の場合についてのそれらである。最終的にはレイノルズ数40の場合は圧力による抗力の全体に占める割合が68.7%であり,500の場合は91.6%であった。このことよりレイノルズ数が大きくなると圧力による抗力が全体の抗力の大部分を占めることがわかる。

図4,5はレイノルズ数40と500の場合の円柱表面の圧力分布を計算時間をパラメーターにして描いてある。圧力分布は理想状態の流れの曲線から次第に剥離が生じて平担な部分をもつ曲線へと変化してゆく。図6にある剥離点の位置と比較してみると圧力分布曲線の平担な部

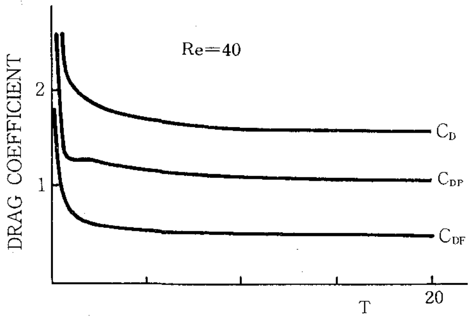

図2

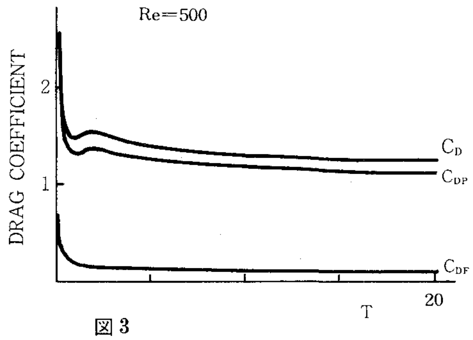

図3

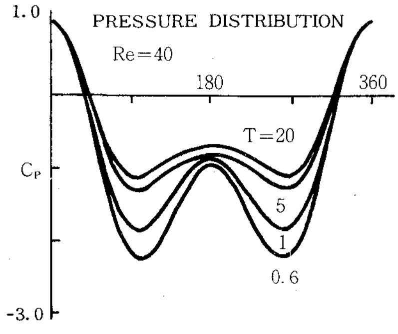

図4

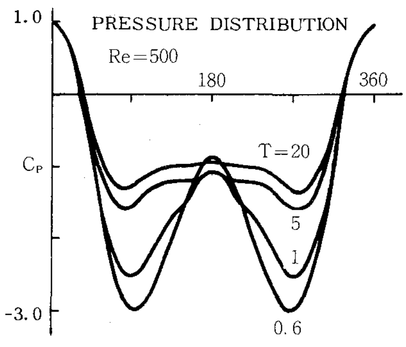

図5

分が剥離した部分に一致するということがより明確に理解できる。結局剥離点の位置はレイノルズ数40で120°，500では105°であった。

図7は後流渦の成長を示すグラフであるが，レイノルズ数40の場合は無次元時間8.0を超えるとほぼ一定の長さになるのに対して，レイノルズ数500の場合は成長を続けている。

図8はレイノルズ数40で無次元時間20.0における流線模様であり，図9はレイノルズ数500で無次元時間20.0の場合のそれである。

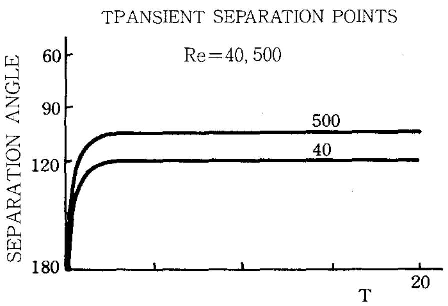

図6

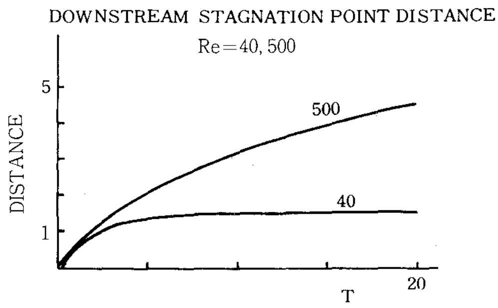

図7

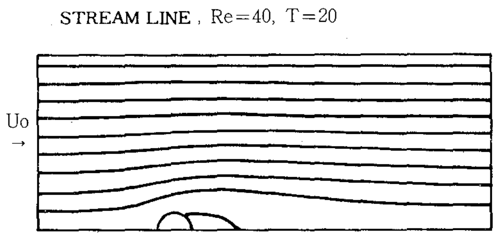

図8

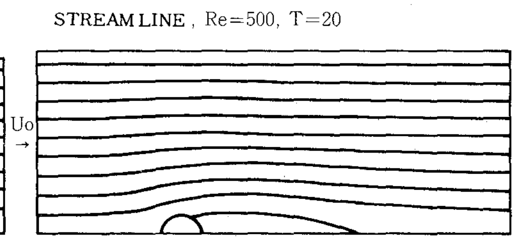

図9

V. 結　　言

レイノルズ数40および500のいずれの場合においても計算は極めて安定して進められた。本研究は陽解法を用いたのでタイムステップの大きさが制限されたが，無次元時間5.0を超えると繰り返し計算の数も急激に少なくなり適当な初期値が与えられれば極めて有利な手法であることがわかった。しかし厳密解が求められていないため，計算の精度の比較が困難なこと，またカルマン渦の発生という点に関して大きな問題を残している。おわりに北海道大学大型電子計算機センターの各位，本学流体機械学，流体工学両講座の関係教職員各位に深甚なる謝意を表する。

（昭和50年5月20日受理）

文　　献

(1) Payne,R.B.:J.Fluid Mech., **4**,(81),(1958)
(2) Thoman, D. C. & Szewezyc, A. A.: Notre Dame Tech. Rep. 66-14,(1966)
(3) Son, J. S. & Hanratty, T. J.: J. Fluid Mech., **35**,(2) 369 (1968)
(4) Goddard, V. P.: Thesis for Ph. D., Univ. of Notre Dame, (1972)
(5) Kawaguti, M. & Jain, P.: J. Phys. Soc. Japan, **10**,(93),(1966)