



## 極配置問題におけるフィードバックゲイン行列について

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-07-24 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 足田, 弘光 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/3617">http://hdl.handle.net/10258/3617</a>

# 極配置問題におけるフィードバックゲイン行列について

疋 田 弘 光

## On the Feedback Gain Matrix in Pole Assignment Hiromitsu Hikita

### Abstract

It was already illustrated by the author that a feedback gain matrix which yields any prescribed closed loop poles contains redundancy in any linear time invariant multi-input system. The general solution of the feedback gain matrix which includes the redundancy was also derived.

In this paper, it is shown that the redundancy can be applied to the closed-loop zero shifting to some extent so that the system response may be improved. Furthermore, as many different feedback gain matrices which yield the same pole assignment because of the redundancy exist, the differential changes of the closed-loop poles to those of the feedback gain matrix are presented in order to evaluate them from the viewpoint of the pole sensitivity.

### 1. ま え が き

線形多入力系の極配置に関する研究は W. M. Wonham によって系の可制御性と極の任意配置の可能性との等価性が示されてから急速な発展を遂げ、フィードバックゲイン行列のいろいろな導出法が提出されてきた<sup>1)~8)</sup>。一般に多入力系におけるフィードバックゲイン行列は極配置を指定することによって一意的に決まらずある自由度が残る。そこで、各方法ともそれぞれ適当な制限を設定し、希望の極配置を実現するフィードバックゲイン行列を求めている。つまり、従来の方法はその自由度をなんらかの手段で制約するかわりに一意的にフィードバックゲイン行列を得ることを意図していたといえる。その結果一般に各方法によって導出されるフィードバックゲイン行列はそれぞれ与える制限の違いにより異なったものになる。このような現状について須田は制約をおかない一般的な解の導出とその利用に関する研究が今後の課題であることを指摘している<sup>9)</sup>。

ところで、著者等はすでにこの自由度を含んだフィードバックゲイン行列の一般形とその自由度を設計に利用することについて若干検討した<sup>10)~12)</sup>。本論文ではこの自由度を含んだ形式のフィードバックゲイン行列についてさらに考察を進める。まず、その自由度を利用し零点をある程度動かすことができ、その結果応答波形の改善が期待できることを示す。またフィードバックゲインの微小変動が極へどう影響するのか明確にする。これはフィードバックゲイン行列に対する極の感度と捉えることができ、状態の検出に多少誤差が含まれたり、信頼性の乏しい検出器による検出量をフィードバックする場合、それらをすべてフィードバックゲインの変

化に代表して考えれば極はフィードバックゲインの変化に対し低感度であることが望まれるわけでフィードバックゲイン行列に対する極の感度を明らかにしておくことは重要なことである。特に、極配置問題におけるフィードバックゲイン行列の一般形が与えられているので同一の極配置を実現するフィードバックゲイン行列が多数存在するが、極の感度の点からこれらの良否を知るのに利用することができよう。

## 2. フィードバックゲイン行列の一般形

制御対象は可制御、可観測とし、その動作方程式および出力方程式は次式で表わされるとする。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bw_0(t) \quad (1-a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1-b)$$

ここで、 $x(t)$ は状態を表わし  $n$ 次元ベクトル、 $w_0(t)$ は入力を表わし  $m$ 次元ベクトル、 $y(t)$ は出力を表わし  $l$ 次元ベクトルであるとする。 $A, B, C$ はそれぞれ  $n \times n, n \times m, l \times n$ の定数行列である。状態フィードバック

$$w_0(t) = -Kx(t) + w(t) \quad (2)$$

を行うと、補償後の系の動作方程式は

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bw(t) \quad (3)$$

となる。ここで、 $w(t)$ は新しい入力を表わし  $m$ 次元ベクトルである。 $K$ はフィードバックゲイン行列で  $m \times n$ の定数行列である。

行列  $(A - BK)$  の固有値は互に相異なる実数とし、それらを  $\lambda_i; i = 1 \sim n$  とする。またこれらは行列  $A$  の固有値と重複がないとする。閉ループ系の極  $\lambda_i; i = 1 \sim n$  を適当に指定するとその極配置を実現するフィードバックゲイン行列  $K$  は以下のように自由度を含んだ形式で示すことができる<sup>11), 12)</sup>

$$K = \bar{K}U^{-1} \quad (4)$$

ここで、 $\bar{K}, U$  はそれぞれ  $m \times n, n \times n$  の定数行列で  $\bar{K}, U$  の  $i$  列を  $\bar{k}_i, u_i$  とすると、

$$u_i = (A - \lambda_i I)^{-1} B \bar{k}_i \quad ; i = 1 \sim n \quad (5)$$

が成り立つ。また、 $m \times n$  行列  $\bar{K}$  の各要素は  $\det U \neq 0$  である限り任意である。

閉ループ系に  $2p$  個の複素共役な極が含まれる場合は次のようになる。 $(A - BK)$  の  $2p$  個の複素共役な固有値を  $\xi_i \pm j\eta_i; i = 1 \sim p$  とする。残りの  $n - 2p$  個の固有値は実数でそれらを  $\lambda_i; i = 2p + 1 \sim n$  とする。すべての固有値は互に異なるとともに行列  $A$  の固有値と重複がないとする。行列  $U$  を

$$U = [f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_p, g_p, u_{2p+1}, \dots, u_n] \quad (6)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} f_i &= [(A - \xi_i I)^2 + \eta_i^2 I]^{-1} [(A - \xi_i I) B \bar{k}_{2i-1} - \eta_i B \bar{k}_{2i}] \\ g_i &= [(A - \xi_i I)^2 + \eta_i^2 I]^{-1} [(\eta_i B \bar{k}_{2i-1} + (A - \xi_i I) B \bar{k}_{2i})] \end{aligned} \right\} ; i=1 \sim p \quad (7-a)$$

$$u_i = (A - \lambda_i I)^{-1} B \bar{k}_i ; i=2p+1 \sim n \quad (7-b)$$

とすると、この極配置を実現するフィードバックゲイン行列  $K$  は同じく (4) 式で与えられる。また、 $m \times n$  行列  $\bar{K}$  の各要素は  $\det U \neq 0$  であるかぎり任意である。

$U$  の正則性の検定は  $U$  の各列に  $(A - \lambda_i I)^{-1} ; i=1 \sim n$  がでてくるので簡単ではないが、等価的に次の  $\hat{U}$  を調べることでより簡単に知ることができる。

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \prod_{i=1}^n (A - \lambda_i I) U \\ &= [(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_n I) B \bar{k}_1, (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_3 I) \cdots (A - \lambda_n I) B \bar{k}_2, \\ &\quad \cdots, (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_{n-1} I) B \bar{k}_n] \\ &= [\sum_{i=1}^n \beta_i^1 A^{i-1} B \bar{k}_1, \sum_{i=1}^n \beta_i^2 A^{i-1} B \bar{k}_2, \cdots, \sum_{i=1}^n \beta_i^n A^{i-1} B \bar{k}_n] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\beta_i^j ; i=1 \sim n, j=1 \sim n$  は次式を満足する。

$$\sum_{i=1}^n \beta_i^j s^{i-1} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s - \lambda_i) ; j=1 \sim n \quad (10)$$

$A$  の固有値と  $\lambda_i$  に重複がないので  $\hat{U}$  の正則性と  $U$  の正則性が等価であることは明らかである。

閉ループ系が複素共役な極をもつ場合も同じく (6) 式の  $U$  に対し次の  $\hat{U}$  を調べることでただちに  $U$  の正則性が検定できる。

$$\hat{U} = \prod_{i=1}^p [(A - \xi_i I)^2 + \eta_i^2 I] \prod_{j=2p+1}^n (A - \lambda_j I) U \quad (11)$$

これを展開すればやはり (9) 式の形式に書きなおすことができる。

### 3. 応答波形の改善

簡単な計算により (4) 式で与えられるフィードバックゲイン行列を用いると、

$$U^{-1}(A - BK)U = \Lambda \quad (12)$$

が成り立つことが分る。ここで

$$\Lambda = \text{diag} \left\{ \begin{array}{c} \xi_1 \quad \eta_1 \\ -\eta_1 \quad \xi_1 \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} \xi_2 \quad \eta_2 \\ -\eta_2 \quad \xi_2 \end{array} \right\}, \cdots, \left\{ \begin{array}{c} \xi_p \quad \eta_p \\ -\eta_p \quad \xi_p \end{array} \right\}, \lambda_{2p+1}, \cdots, \lambda_n \quad (13)$$

である。また記号  $\text{diag} \{ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \}$  は対角細胞が  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  である準対角行列を表わす。 $p=0$  の場合 (13) 式は実数固有値のみが対角にならんだ対角行列になる。

結局、閉ループ系の入出力関係を伝達関数行列で表わすと、

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{C \operatorname{adj}(sI - A + BK) B}{\det(sI - A + BK)} W(s) \\
 &= \frac{CU \operatorname{adj}(sI - A) U^{-1} B}{\det(sI - A)} W(s)
 \end{aligned} \tag{14}$$

ここで記号  $\operatorname{adj}$  は  $Q^{-1} = \operatorname{adj}Q / \det Q$  を意味する。(4)式で示されるいかなるフィードバックゲイン行列  $K$  を用いても希望の極配置が満足されるから行列  $A$  は不変である。従って(6), (7)式から分るように  $\bar{K}$  を適当に変えフィードバックゲイン行列  $K$  を変えると希望の極配置を満足しながら閉ループ系の伝達関数行列 (14) 式に現われる行列  $U$  が変化することが分る。閉ループ系を状態方程式で考えれば  $\bar{K}$  の変化に応じて状態方程式の記述形式を対角形 (閉ループ系が複素共役極をもつ場合は準対角形) に変換する変換行列が変化することを意味する。

従来の方法に従えば希望の極配置を実現するフィードバックゲイン行列は一意的に決まってしまう極以外の系の構造を変える自由度は存在しなかった。(Fallside の方法では  $m-1$  の自由度があり、わずかではあるが構造について考察することができる。)ところが、本方法に従えば希望の極配置を実現し、かつ  $U$  を(7)式に従って変えることができるので極以外のシステム構造を改善することができる。その最も大きなものは零点の移動である。(14) 式の実部はフィードバックゲイン行列  $K$  が(4)式で与えられる限り不変であるから  $\bar{K}$  を変化させると分子の部分のみが変化し、結局零点を移動することができる。しかし、 $\bar{K}$  の変化に対し零点がいかに変化するか一般形で示すことはできず満足のいく零点配置を実現する  $\bar{K}$  を解析的に見出すことはできない。それ故、(6), (7)式に従って  $U$  を求め (14) 式を計算し零点を求め満足のいくものであればそれでよし、そうでなければ  $\bar{K}$  を適当に変えさらに同じ計算を繰返さなければならない。

例題： 動作方程式及び出力方程式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \tag{15-a}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{15-b}$$

この系の極は  $[1, -1, -3]$  で不安定である。閉ループ系に希望する極を  $[-2, -4, -5]$  とする。

入力  $w_1, w_2$  のそれぞれどちらからでもシステムは可制御であるから、従来の方法に従いどちらかの入力へ状態フィードバックを行うことで希望の極配置をただちに得ることができる。ところが、 $w_1$  にフィードバックを施すと伝達関数  $Y_1(s)/W_1(s)$  は正の零点を1個もち、また  $w_2$  の

みにフィードバックを施すと  $Y_2(s)/W_2(s)$  は正の零点を同じく 1 個もつ。それぞれの場合について新しく得られた閉ループ系のステップ入力に対する応答曲線は Fig.1, Fig.2 の破線のようにになる。いずれの場合でも正の零点を 1 個もつことに原因する逆応答が生じている<sup>13)</sup>。ところで本方法に従えば,

$$U = \begin{bmatrix} (-1+2\beta_1)/3 & (1+2\beta_2)/15 & (1+7\beta_3)/48 \\ (2-\beta_1)/3 & (-4+7\beta_2)/15 & (-5+13\beta_3)/48 \\ (-4+5\beta_1)/3 & (16-13\beta_2)/15 & (25-17\beta_3)/48 \end{bmatrix} \quad (16)$$

となる。ただし、 $\beta_1 = \bar{k}_{21}/\bar{k}_{11}$ ,  $\beta_2 = \bar{k}_{22}/\bar{k}_{12}$ ,  $\beta_3 = \bar{k}_{23}/\bar{k}_{13}$  である。たとえば  $\beta_1 = \beta_2 = -1$ ,  $\beta_3 = 1$  とすると零点はすべて負となり、その時のフィードバックゲイン行列は(4)式を用い

$$K = \begin{bmatrix} -3.1 & 6.3 & 2.8 \\ 1.9 & 3.3 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (17)$$

と求められる。ステップ入力  $w_1$  に対する  $y_1$ ,  $y_2$  を Fig.1 の実線で、ステップ入力  $w_2$  に対す

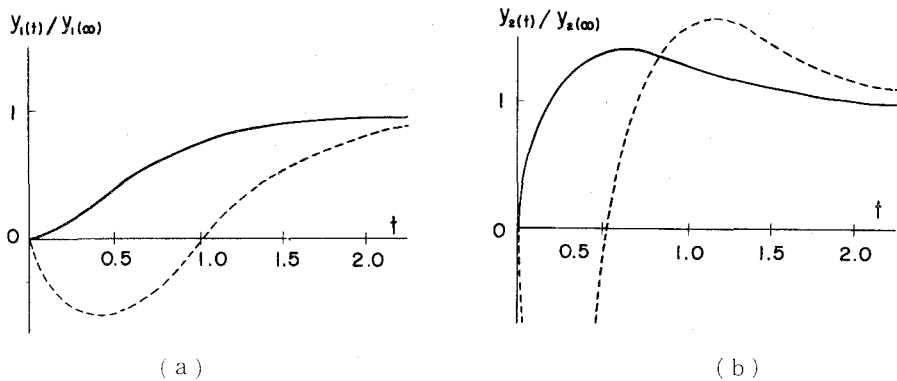


Fig.1 Step response ( $w_1 = \text{step}$ ,  $w_2 = 0$ )

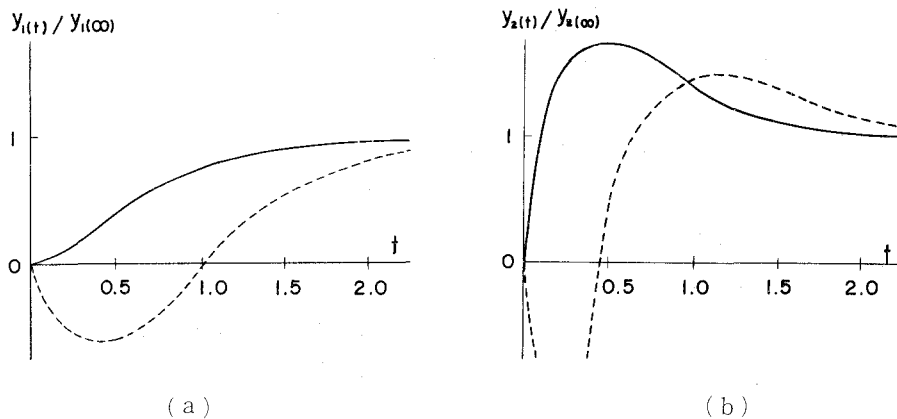


Fig.2 Step response ( $w_1 = 0$ ,  $w_2 = \text{step}$ )

る  $y_1, y_2$  を Fig.2 の実線で示す。

この例題からフィードバックゲイン行列を(4)式のような一般形で与えたことによる効果が理解されよう。

多入力多出力系では伝達関数行列の要素は(入力の数×出力の数)だけ存在し、これら全要素の零点を考慮するのは大変であるのでたとえば田川の方法<sup>14)</sup>を用い定常値に関し入出力関係を分離し、それら個々の分離された伝達関数の零点の移動を考慮するのが実際的と思われる。たとえば、入力の数と出力の数が一致し、入力端子の番号と出力端子の番号の対応したもの同志を定常値に関して分離するとすれば、田川の方法で補償された系の伝達関数行列の対角要素のみについて零点を考慮すればよい。ただし、それ以外の要素は干渉を表わし、定常値には無関係であるが動的な干渉として出力に影響を及ぼすので非常に悪い影響が現われる場合にはそれに対応する零点についても考慮する必要がある。

#### 4. フィードバックゲイン行列と極の感度

初めに適当な極配置を与えるフィードバックゲイン行列が微小変動する場合、それに対応する閉ループ系の極の変動を調べる。ここでは系の係数行列の微小変動が系の極に与える変動について考察された結果<sup>15)</sup>を利用する。 $\lambda_i; i=1 \sim n$  を行列  $(A - BK)$  の固有値,  $u_i; i=1 \sim n$  をそれに対応する固有ベクトルとする。すると、

$$(\lambda_i I - A + BK)u_i = 0 \quad (18)$$

が成り立つが、いまここで

$$v_i(\lambda_i I - A + BK) = 0 \quad (19-a)$$

$$v_i u_i = 1, \quad v_i u_j = 0; \quad j=1 \sim n, \quad j \neq i \quad (19-b)$$

なる  $1 \times n$  行列  $v_i$  を導入する。

ここでフィードバックゲイン行列  $K$  に  $K + \Delta K$  なる微小変動が生じると、固有値  $\lambda_i$  および固有ベクトル  $u_i$  が微小変動し、それらをそれぞれ  $\lambda_i + \Delta \lambda_i$ ,  $u_i + \Delta u_i$  とすれば、

$$\{(\lambda_i + \Delta \lambda_i)I - A + B(K + \Delta K)\}(u_i + \Delta u_i) = 0 \quad (20)$$

が成り立つ。従って、2次の微小量を無視すれば

$$(\lambda_i I - A + BK)\Delta u_i + (\Delta \lambda_i I + B\Delta K)u_i = 0 \quad (21)$$

右側から  $v_i$  を掛けると第1項は  $v_i$  の定義によって零となるから

$$\Delta \lambda_i = -u_i B \Delta K u_i \quad (22)$$

が求められる。これがフィードバックゲイン行列の微小変動に対する極の微小変動量である。

ところで、 $\lambda_i$  は複素数であってもよいが、その場合次のように実数部、虚数部をそれぞれ分けて考察した方がよい。

$$\lambda_i = \xi_i + j\eta_i \quad (23)$$

とし

$$\Delta \lambda_i = \Delta \xi_i + j \Delta \eta_i \quad (24)$$

とする。また  $\lambda_i$  に対応する複素数固有ベクトル  $u_i$  を

$$u_i = f_i + j g_i \quad (25)$$

とし、

$$v_i = h_i + j l_i \quad (26)$$

とする。すると、 $K$  の  $K + \Delta K$  への変化により、

$$[(\xi_i + \Delta \xi_i)I \pm j(\eta_i + \Delta \eta_i)I - A + B(K + \Delta K)][(f_i + \Delta f_i) \pm j(g_i + \Delta g_i)] = 0 \quad (27)$$

展開し、2次の微小項を無視し、さらに、左側から  $(h_i + j l_i)$  を掛けると複素数極の実数部、虚数部の  $\Delta K$  に対する微小変動量は

$$\Delta \xi_i = -h_i B \Delta K f_i + l_i B \Delta K g_i \quad (28-a)$$

$$\Delta \eta_i = -h_i B \Delta K g_i - l_i B \Delta K f_i \quad (28-b)$$

と求められる。

結局、 $m \times n$  行列  $\Delta K$  の  $pq$  要素を  $\Delta k_{pq}$  とすると実数極、複素数極の実数部および虚数部それぞれの微小変動は  $\Delta k_{pq}$  ;  $p = 1 \sim m, q = 1 \sim n$  の一次結合で表わされたことになる。ここで、これらを代表して

$$\Delta \alpha_i = \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^n \gamma_{pq} \Delta k_{pq} \quad (29)$$

と書く。従って(22)式では  $\Delta \alpha_i = \Delta \lambda_i$  ( $\alpha_i = \lambda_i$ ) であり、(28-a)式では  $\Delta \alpha_i = \Delta \xi_i$  ( $\alpha_i = \xi_i$ )、(28-b)式では  $\Delta \alpha_i = \Delta \eta_i$  ( $\alpha_i = \eta_i$ ) を意味する。(29)式の右辺は(22)、(28-a)、(28-b)式の右辺に対応する。

以上より各  $k_{pq}$  ;  $p = 1 \sim m, q = 1 \sim n$  の微小変動が  $\alpha_i$  におよぼす影響は

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial k_{pq}} = \gamma_{pq} ; p = 1 \sim m, q = 1 \sim n \quad (30)$$

と表わすことができる。感度を各変数の変化率の比で定義すれば

$$\frac{\partial \alpha_i / \alpha_i}{\partial k_{pq} / k_{pq}} = \frac{\gamma_{pq} k_{pq}}{\alpha_i} ; p = 1 \sim m, q = 1 \sim n \quad (31)$$

希望の極配置を与えるフィードバックゲイン行列  $K$  は(4)、(5)、(6)、(7)式に従って求めることができ、しかも  $m \times n$  行列  $K$  は  $\det U \neq 0$  なるかぎり任意であるから  $\bar{K}$  の与えかたによって種々の  $K$  が導出され、さらに、上の結果を用いればそれら各  $K$  に対して極の感度を計算することができる。従って、たとえば、ある状態変数を検出する検出器の信頼性が乏しかったり、また極めてその検出が微妙なもので多少ずれて検出される可能性がある場合など、そこからのフィードバックパスに挿入される比例要素のゲインの変化にそれらを含めて考えれば、その



フィードバックゲインに対する極の感度は低い方が良く上での結果を用い各  $K$  を感度の点から検定することができる。

例題： 前述の系 (15) において  $w_1$  のみにフィードバックする場合のフィードバックゲイン行列に対する極の感度と (17) 式で与えられるフィードバックゲイン行列に対する極の感度を求め比較してみる。

$w_1$  のみにフィードバックして閉ループ系の極を  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -4$ ,  $\lambda_3 = -5$  に移動するためにはフィードバックゲイン行列は簡単な計算により

$$K = \begin{bmatrix} 43.0 & 39.0 & 8.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

と求められる。 $w_2$  へのフィードバックはないので  $k_{1q}$ ;  $q = 1 \sim 3$  についてのみ極の感度を計算すると、

$$\left[ \frac{\partial \lambda_1 / \lambda_1}{\partial k_{1q} / k_{1q}} \right]_{q=1 \sim 3} = [3.6 \quad -6.5 \quad 2.7] \quad (33-a)$$

$$\left[ \frac{\partial \lambda_2 / \lambda_2}{\partial k_{1q} / k_{1q}} \right]_{q=1 \sim 3} = [-5.6 \quad 20 \quad -16] \quad (33-b)$$

$$\left[ \frac{\partial \lambda_3 / \lambda_3}{\partial k_{1q} / k_{1q}} \right]_{q=1 \sim 3} = [2.9 \quad -13 \quad 13] \quad (33-c)$$

(17) 式で与えられるフィードバックゲイン行列について調べると

$$\left[ \frac{\partial \lambda_1 / \lambda_1}{\partial k_{pq} / k_{pq}} \right]_{q=1 \sim 3}^{p=1,2} = \begin{bmatrix} 0.39 & 0.79 & -1.1 \\ 0.24 & -0.41 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (34-a)$$

$$\left[ \frac{\partial \lambda_2 / \lambda_2}{\partial k_{pq} / k_{pq}} \right]_{q=1 \sim 3}^{p=1,2} = \begin{bmatrix} 0.04 & -0.87 & 1.0 \\ 0.02 & 0.45 & -0.29 \end{bmatrix} \quad (34-b)$$

$$\left[ \frac{\partial \lambda_3 / \lambda_3}{\partial k_{pq} / k_{pq}} \right]_{q=1 \sim 3}^{p=1,2} = \begin{bmatrix} -0.19 & 0.38 & 0.17 \\ 0.23 & 0.40 & 0.10 \end{bmatrix} \quad (34-c)$$

この結果から (17) 式で与えられる  $K$  は (32) 式の  $K$  に比べかなり極の感度が低下していることが分る。従って (17) 式, (32) 式で与えられるフィードバックゲイン行列は同一の極配置を与えるが感度の点からは (17) 式の方が有利であると言えよう。従って、たとえば (17) 式の  $K$  を用いれば (32) 式を用いる場合より信頼性の乏しい検出器を用いても希望の極配置からのずれが小さいことが期待できる。ただし、フィードバックループの数が多くなるので経済性の点を考慮して優劣を決めなければならない。いずれにしても、同一の極配置を実現するフィードバックゲイン行列の違いによってかなり極の感度が異なってくるのがこの例から理解されよう。

## 5. あ と が き

希望の極配置を実現するフィードバックゲイン行列がもつ自由度を利用し、零点をある程度

移動することができ、応答波形を改善することが期待できることを示した。本論文では具体的な設計法までは言及せず原理的な説明にとどめた。

また、フィードバックゲイン行列の微小変動が閉ループ系の極におよぼす影響について解析し、同一の極配置を実現する各フィードバックゲイン行列に対する極の感度を明確にした。ここで明らかにされた結果は単にフィードバックゲイン行列に対する極の感度を知るのに利用できるだけでなくフィードバックゲイン行列に含まれる自由度  $\bar{K}$  を変化させ希望の極配置を実現するもののうちで極の感度が低くなるフィードバックゲイン行列を求めるのに利用することができるであろう。

日頃ご指導いただいている北海道大学工学部三浦良一教授、田川遼三郎教授、小山昭一助教授に感謝の意を表します。

(昭和50年5月20日受理)

## 文 献

- 1) W. M. Wonham : IEEE Trans. on AC, **12**, 6(1967)
- 2) E. J. Davison and W. M. Wonham : IEEE Trans. on AC, **13**, 6 (1968)
- 3) M. Heyman and W. M. Wonham : IEEE Trans. on AC, **13**, 6 (1968)
- 4) J. D. Simon and S. K. Mitter : Information and Control, **13**,4 (1968)
- 5) D. G. Retallack and A. G. MacFarlane : PROC. IEE, **117**, 5 (1970)
- 6) G. Gopinath : Bell Syst. Tech. J., **50**, 3 (1971)
- 7) F. Fallside and H. Seraji : PROC. IEE, **118**, 6 (1971)
- 8) F. Fallside and H. Seraji : Int. J. Control, **17**, 2 (1972)
- 9) 須田信英 : 計測と制御, **14**, 1 (1975)
- 10) 疋田弘光 : 第13回計測自動制御学会学術講演会予稿集 (1974)
- 11) 疋田弘光, 小山昭一, 三浦良一 : 計測自動制御学会東北支部講演会論文集 (1974)
- 12) 疋田弘光, 小山昭一, 三浦良一 : 計測自動制御学会論文集, **11**,5 (1975)
- 13) 乗松立木, 伊藤正美 : 電気学会誌, **81**, 871 (1961)
- 14) 田川遼三郎 : 第10回計測自動制御学会学術講演会予稿集 (1971)
- 15) H. Nicholson : PROC. IEE, **114**, 12 (1967)