室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

部分分布荷重を受ける有限円柱の3次元応力解析について

メタデータ	言語: Japanese
	出版者: 室蘭工業大学
	公開日: 2014-07-24
	キーワード (Ja):
	キーワード (En):
	作成者: 松岡, 健一, 能町, 純雄
	メールアドレス:
	所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/3642

部分分布荷重を受ける有限円柱の3次元応力解析について

松　岡　健　一・能　町　純　雄*

On a Three Dimensional Stress Analysis of a Finite Cylinder Subjected to Partially Distributed Loads

Kenichi Matsuoka and Sumio Nomachi*

Abstract

The three dimensional nonaxisymmetrical stress problems concerning a finite cylinder are solved treating the equations of equilibrium of forces in cylindrical co-ordinates, by means of finite Fourier-Hankel transforms.

The numerical calculation was performed for the case when the cylinder is submitted to a pair of tractions with rectangular distribution on both ends of a diameter. The results are compared with those in case of infinitlly long cylider carring the same loads and the results corresponding to a similar loading condition of two dimensional stress are also show in the figures for reference sake.

1. ま　え　が　き

円柱座標で表わされる次元応力問題の一種として円柱の問題がある。円柱の軸対称問題はI. N. Sneddonが軸対称側圧が作用する場合の無限円柱の解析をFourier変換を用いて行なっている[1]。また有限円柱の軸対称問題としてはL. N. G. Filonの研究があり[2]，その後今井，斉藤が行なっているが，特に斉藤は側圧および端面に部分的圧力が作用する場合の解析を行なっている[3]。非軸対称問題は現在でもあまり多く研究されてはいないが，無限円柱に対してはG. Mathewが側面に任意の外力が作用する場合の理論を発表しているが数値計算は行なっていない[2]。この数値計算は吉野・宇津木によって部分的な側圧をうける問題として行なわている[4]。さらに非軸対称変形をする有限円柱の解は秦によって導かれ[5]，これを発展させた奥村の研究があり数値計算も行なわれている[6]。

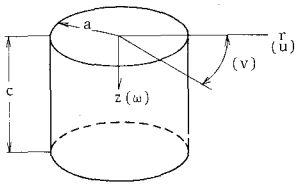
一方能町は，有限Fourier-Hankel交換による円柱座標の3次元応力問題の解法を示し[7]，著者等はこれを有限円筒の非軸対称問題にまで拡張し，若干の解析例も示した[8]。ここではこれを有限円柱に適用し，部分分布荷重を受ける場合の解析を行なった。数値計算は荷重の位置を2種変え，無限円柱とした場合の結果および非軸対称2次元応力問題としてえられる結果と比較検討した。

＊北海道大学工学部教授　工博

2，有限円柱の Fourier-Hankel 変換による解

円柱座標で表わされる3次元応力問題の有限 Fowier-Hankel 変換による解法にすでに発表している[8]のでここではその結果のみを示す。

図－1のように円柱の半径をa，長さ c，半径方向，円周方向，軸方向の座標を r, θ, z とし，各方向の変位をそれぞれ u, v, w とすれば，



図－1

$$u = \frac{1}{2\pi}(\boldsymbol{A}_{orz}+\boldsymbol{B}_{orz})+\frac{1}{\pi}\sum_m(\boldsymbol{A}_{mrz}+\boldsymbol{B}_{mrz})\cos m\theta \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{\pi}\sum_m(\boldsymbol{A}_{mrz}-\boldsymbol{B}_{mrz})\sin m\theta \quad (2)$$

$$w = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{W}_{orz}+\frac{1}{\pi}\sum_m\boldsymbol{W}_{mrz}\cos m\theta \quad (3)$$

ここで

$$\boldsymbol{A}_{mrz} = \frac{1}{c}f_{mp}(r)\Big\{\frac{1}{2\pi}\alpha_{mo}+\frac{1}{2(2\mu+\lambda)}\beta_{mo}+\frac{m+1}{a}\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}A_{mo}$$

$$+\frac{m-1}{a}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}B_{mo}-\frac{1}{2(2\mu+\lambda)}(\boldsymbol{w}_{mc}-\boldsymbol{w}_{mo})\Big\}$$

$$+\frac{2}{c}\sum_n\cos Nz\Big[\frac{1}{N}X_{mp}(Nr)\Big\{\frac{1}{2\mu}\alpha_{mn}+\frac{\mu+\lambda}{2\mu\lambda}\beta_{mn}+\frac{3}{2}\frac{m+1}{a}A_{mn}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{m-1}{a}B_{mn}-\frac{2\mu+\lambda}{2\lambda}C_{mn}\Big\}-\frac{\mu+\lambda}{2\lambda}\frac{1}{N}\omega_{mp}(Nr)\Big\{\frac{1}{2\mu}\beta_{mn}-C_{mn}\Big\}\Big]$$

$$+\frac{2}{a^2}\sum_i\frac{J_{m+1}(\xi_i r)}{\{J_{m+1}(\xi_i a)\}^2\xi_i}\sum_{k=1}^{2}\Big[\phi^{(k)}(\xi_i z)\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}D_{mik}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(3\gamma_{mik}+\delta_{mik})\Big\}$$

$$-\frac{\mu+\lambda}{3\mu+\lambda}\Big\{\phi^{(k)}(\xi_i z)-\psi^{(k)}(\xi_i z)\Big\}\Big\{D_{mik}-\frac{1}{4\mu}(3\gamma_{mik}+\delta_{mik})\Big\}\Big] \quad (4)$$

$$\boldsymbol{B}_{mrz} = \frac{a}{c}\left(\frac{r}{a}\right)^{m-1}\Big[\frac{1}{2(3\mu+\lambda)}(\alpha_{mo}-\beta_{mo})+\frac{\mu+\lambda}{3\mu+\lambda}\frac{1}{a}A_{mo}+\frac{2m\mu+\mu+\lambda}{3\mu+\lambda}\frac{1}{a}B_{mo}$$

$$+\frac{\lambda}{3\mu+\lambda}(E'_{mo1}-E'_{mo2})-\frac{\mu+\lambda}{\mu(3\mu+\lambda)}(\delta'_{mo1}-\delta'_{mo2})+\frac{\lambda}{2(3\mu+\lambda)}(\boldsymbol{w}_{mc}-\boldsymbol{w}_{mo})\Big]$$

$$-\frac{1}{c}f_{ms}(r)\Big\{\frac{1}{2\mu}\alpha_{mo}-\frac{1}{2(2\mu+\lambda)}\beta_{mo}+\frac{m+1}{a}\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}A_{mo}+\frac{m-1}{a}\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}B_{mo}$$

$$+\frac{\lambda}{2(2\mu+\lambda)}(\boldsymbol{w}_{mc}-\boldsymbol{w}_{mo})\Big\}$$

$$+\frac{2}{c}\sum_{n}\cos Nz\Big[\frac{1}{N}\chi_{ms}(Nr)\Big\{-\frac{1}{2\mu}\alpha_{mn}+\frac{\mu+\lambda}{2\mu\lambda}\beta_{mn}-\frac{1}{2}\frac{m+1}{a}A_{mn}-\frac{3}{2}\frac{m-1}{a}B_{mn}$$

$$-\frac{2\mu+\lambda}{2\lambda}C_{mn}\Big\}-\frac{\mu+\lambda}{2\lambda}\omega_{ms}(Nr)\Big\{\frac{1}{2\mu}\beta_{mn}-C_{mn}\Big\}\Big]$$

$$+\frac{2}{a^2}\sum_{i}\frac{J_{m-1}(\xi_i r)}{\{J_{m+1}(\xi_i a)\}^2\xi_i}\sum_{k=1}^{2}\Big[\phi^{(k)}(\xi_i z)\Big\{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}E_{mik}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)}(\gamma_{mik}+3\delta_{mik})\Big\}$$

$$-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Big\{\phi^{(k)}(\xi_i z)\Big\}\Big\{E_{mik}-\frac{1}{4\mu}(\gamma_{mik}+3\delta_{mik})\Big\}\Big]$$

$$+m\Big(\frac{r}{a}\Big)^{m-1}\frac{1}{a}\Big\{h_2(z)(\boldsymbol{w}_{mo}-2\delta_{mc2})-h_2(c-z)(\boldsymbol{w}_{mc}-2\delta_{mo1})\Big\} \qquad (5)$$

$$\boldsymbol{W}_{mrz}=h_1(z)g_m(r)\boldsymbol{w}_{mc}+h(c-z)\boldsymbol{w}_{mo}$$

$$+\frac{2}{c}\sum_{n}\sin Nz\Big[\frac{1}{N}G_m(Nr)\Big\{\frac{1}{\lambda}\beta_{mn}-\frac{m+1}{a}A_{mn}+\frac{m-1}{a}B_{mn}-\frac{2\mu+\lambda}{\lambda}C_{mn}\Big\}$$

$$+\frac{\mu+\lambda}{\lambda}F_m(Nr)\Big\{\frac{1}{2\mu}\beta_{mn}-C_{mn}\Big\}\Big]$$

$$+\frac{2}{a^2}\sum_{i}\frac{J_m(\xi_i r)}{\{J_{m+1}(\xi_i a)\}^2\xi_i}\sum_{k=1}^{i}\Big[\Big\{Q^{(k)}(\xi_i z)+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}p^{(k)}(\xi_i z)\Big\}(D_{mik}-E_{mik})$$

$$-\frac{1}{\mu}\Big\{Q^{(k)}(\xi_i z)+\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}p^{(k)}(\xi_i z)\Big\}(\gamma_{mik}-\delta_{mik})\Big] \qquad (6)$$

ここで，μ, λ は Lame′ の弾性定数であり，$N=n\pi/c(n=1,2,\cdots\cdots)$，$J_m(\xi_i r)$ は m 次の第1種Bessel関数である。$\xi_i(i=1,2,\cdots\cdots)$ は $J_m(\xi_i a)=0$ の根を小さいものから順に並べたものである。また式中の関数は，

$$G_m(Nr)=\frac{I_m(Nr)}{I_m(Na)},\ \chi_{mp}(Nr)=\frac{I_{m+1}(Nr)}{I_m(Na)},\ \chi_{ms}(Nr)=\frac{I_{m-1}(Nr)}{I_m(Na)}$$

$$F_m(Nr)=Nr\,\chi_{ms}(Nr)-Na\,\chi_{ms}(Na)G_m(Nr)$$

$$\omega_{mp}(Nr)=Nr\,G_m(Nr)-Na\,\chi_{ms}(Na)\chi_{mp}(Nr)$$

$$\omega_{ms}(Nr)=Nr\,G_m(Nr)-Na\,\chi_{mp}(Na)\chi_{ms}(Nr)$$

$$g_m(r)=\Big(\frac{r}{a}\Big)^m,\ f_{mp}(r)=\frac{a}{2(m+1)}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{m+1},\ f_{ms}(r)=\frac{a}{2}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{m+1}$$

$$-\frac{a}{2(m+1)}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{m-1}$$

$$\left.\begin{matrix}\phi^{(1)}(\xi_i z)\\ \phi^{(2)}\xi_i z)\end{matrix}\right\}=\frac{\sinh\xi_i(c-z)\mp\sinh\xi_i z}{\cosh\xi_i c\pm 1},\qquad \left.\begin{matrix}Q^{(1)}(\xi_i z)\\ Q^{(2)}(\xi_i z)\end{matrix}\right\}\frac{\cosh\xi_i(c-z)\pm\cosh\xi_i z}{\cosh\xi_i c\pm 1}$$

$$\left.\begin{matrix}\psi^{(2)}(\xi_i z)\\ \psi^{(2)}(\xi_i z)\end{matrix}\right\}=\frac{\xi_i z\cosh\xi_i(c-z)\mp\xi_i(c-z)\cosh\xi_i z}{\cosh\xi_i c\pm 1},$$

$$\left.\begin{matrix}p^{(1)}(\xi_i z)\\ p^{(2)}(\xi_i z)\end{matrix}\right\}=\frac{\xi_i z\sinh\xi_i(c-z)\pm\xi_i(c-z)\sinh\xi_i z}{\cosh\xi_i c\pm 1},$$

$$h_1(z)=\frac{z}{c},\quad h_2(z)=\frac{z^2}{2c}-\frac{c}{6}$$

これらの関数の主なものの導関数は

$$\frac{\partial}{\partial r}G_m(Nr)=N\chi_{ms}(Nr)-\frac{m}{r}G_m(Nr)=N\chi_{mp}(Nr)+\frac{m}{r}G_m(N\gamma),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\chi_{mp}(Nr)=NG_m(Nr)-\frac{m+1}{r}\chi_{mp}(Nr),\ \frac{\partial}{\partial r}\chi_{ms}(Nr)=NG_m(Nr)+\frac{m-1}{r}\chi_{ms}(Nr),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}F_m(Nr)=N\omega_{ms}(Nr)-\frac{m}{r}F_m(Nr)=N\omega_{mp}(Nr)+\frac{m}{r}F_m(Nr),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\omega_{mp}(Nr)=NF_m(Nr)-\frac{m+1}{r}\omega_{mp}(Nr)+2NG_m(Nr),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\omega_{ms}(Nr)=NF_m(Nr)+\frac{m+1}{r}\omega_{ms}(Nr)+2NG_m(Nr),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(\xi_i z)=-\xi_i Q(\xi_i z),\quad \frac{\partial}{\partial z}Q(\xi_i z)=-\xi_i\phi(\xi_i z),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\psi(\xi_i z)=\xi_i\{Q(\xi_i z)-P(\xi_i z)\},\quad \frac{\partial}{\partial z}P(\xi_i z)=\xi_i\{\phi(\xi_i z)-\psi(\xi_i z)\},$$

式中の係数 α_{mn}, β_{mn}, A_{mn}…… 等は各境界の変位および応力で与えられる積分定数であり，これらは境界条件から決定される。

従って各応力成分は，σ_r, σ_θ, σ_z をそれぞれ r, θ, z 方向の直応力，$\tau_{r\theta}$, $\tau_{\theta z}$, τ_{zr} をせん断応力とすれば，Hooke の法則を用いて

$$\sigma_r=\frac{1}{2\pi}\left[2\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{A}_{orz}+\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{B}_{orz}\right)+\lambda\Delta_o\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_m\cos m\theta\left[2\mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{A}_{mrz}+\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{B}_{mrz}\right)+\lambda\Delta_m\right]\qquad(7)$$

$$\sigma_\theta=\frac{1}{2\pi}\left[2\mu\frac{1}{r}(\boldsymbol{A}_{orz}+\boldsymbol{B}_{orz})+\lambda\Delta_o\right]+\frac{1}{\pi}\sum_m\cos m\theta\left[2\mu\left(\frac{m+1}{r}\boldsymbol{A}_{mrz}\right.\right.$$

$$-\frac{m-1}{r}\boldsymbol{B}_{mrz}\Big)+\lambda\Delta_m\Big] \tag{8}$$

$$\sigma_z=\frac{1}{2\pi}\Big[2\mu\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{W}_{orz}+\lambda\Delta_o\Big]+\frac{1}{\pi}\sum_m\cos m\theta\Big[2\mu\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{W}_{mrz}+\lambda\Delta_m\Big] \tag{9}$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{1}{\pi}\sum_m\mu\sin m\theta\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m+1}{r}\Big)\boldsymbol{A}_{mrz}-\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{m-1}{r}\Big)\boldsymbol{B}_{mrz}\Big] \tag{10}$$

$$\tau_{\theta z}=\frac{1}{\pi}\sum_m\mu\sin m\theta\Big[\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A}_{mrz}-\boldsymbol{B}_{mrz})-\frac{m}{r}\boldsymbol{W}_{mrz}\Big]=\frac{1}{\pi}\sum_m\boldsymbol{T}'_{mrz}\sin m\theta \tag{11}$$

$$\tau_{zr}=\frac{1}{2\pi}\mu\Big[\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A}_{orz}+\boldsymbol{B}_{orz})+\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{W}_{orz}\Big]+\frac{1}{\pi}\sum_m\mu\cos m\theta\Big[\frac{\partial}{\partial z}(\boldsymbol{A}_{mrz}+\boldsymbol{B}_{mrz})$$

$$+\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{W}_{mrz}\Big]=\frac{1}{\pi}\sum_m\boldsymbol{T}_{mrz}\cos m\theta \tag{12}$$

$$\Delta_m=\Big(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{m+1}{r}\Big)\boldsymbol{A}_{mrz}+\Big(\frac{\partial}{\partial r}-\frac{m-1}{r}\Big)\boldsymbol{B}_{mrz}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{W}_{mrz} \tag{13}$$

3，境界条件

各境界に任意の外力が作用する場合の一般的な境界条件は

i）$z=0$ または $z=c$ において

$$\sigma_z=q_1(r,\theta)=\frac{2}{\pi a^2}\sum_i\frac{J_m(\xi_i r)}{\{J_{m+1}(\xi_i a)\}^2}\Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{J}_m\boldsymbol{C}_o[q_1]+\sum_m\boldsymbol{J}_m\boldsymbol{C}_m[q_1]\cos m\theta\Big] \tag{14}$$

ただし　$\boldsymbol{J}_m\boldsymbol{C}_m[q_1]=\int_0^a\int_o^{2\pi}q_1(r,\theta)rJ_m(\xi_i r)\cos m\theta\,drd\theta$

$$\tau_{rz}=q_2(r,\theta),\quad \tau_{\theta z}=q_3(r,\theta) \tag{15}$$

式（15）は

$$\boldsymbol{J}_{m+1}[q_2+q_3]=\int_o^a\int_o^{2\pi}\{q_2(r,\theta)\cos m\theta+q_3(r,\theta)\sin m\theta\}rJ_{m+1}(\xi_i r)dr$$

$$\boldsymbol{J}_{m-1}[q_2-q_3]=\int_o^a\int_o^{2\pi}\{q_2(r,\theta)\cos m\theta-q_3(r,\theta)\sin m\theta\}rJ_{m-1}(\xi_i r)dr$$

とすれば

$$\boldsymbol{T}_{mrz}+\boldsymbol{T}'_{mrz}=\frac{1}{a^2}\sum_m\frac{J_{m+1}(\xi_i r)}{\{J_{m+1}(\xi_i a)\}^2}\boldsymbol{J}_{m+1}[q_2+q_3] \tag{16}$$

$$\boldsymbol{T}_{mrz}-\boldsymbol{T}'_{mrz}=\frac{2m}{a^{m+1}}\Big(\frac{r}{a}\Big)^{m-1}\int_o^a\int_o^{2\pi}\{q_2\cos m\theta-q_3\sin m\theta\}r^m d\theta dr$$

$$+\frac{1}{a^2}\sum_m \frac{J_{m-1}(\xi_i r)}{\{J_{m+1}(\xi_i a)\}^2}\boldsymbol{J}_{m-1}[q_2-q_3] \tag{17}$$

また式の誘導過程からの条件として

$$D_{mik}+E_{mik}=\gamma_{mik}+\delta_{mik} \tag{18}$$

を満足しなければならない。

ii）　$r=a$ において

$$\sigma_r=q_4(\theta,z)=\frac{1}{2\pi c}\boldsymbol{C}_o\boldsymbol{C}_o[q_4]+\frac{1}{\pi}\sum_m \cos m\theta\left\{\frac{1}{c}\boldsymbol{C}_m C_o[q_4]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{c}\sum_m \cos Nz\,\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{C}_n[q_4]\right\} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{C}_n[q_4]=\int_o^c\int_o^{2\pi}q_4(\theta,z)\cos m\theta\cos Nz d\theta dz$$

$$\tau_{r\theta}=q_5(\theta,z)=\frac{1}{\pi}\sum_m \sin m\theta\left\{\frac{1}{c}\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{C}_o[q_5]+\frac{2}{c}\sum_n \cos Nz\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{C}_n[q_5]\right\} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{S}_m\boldsymbol{C}_n[q_5]=\int_o^{2\pi}\int_o^{2\pi}q_5(\theta,z)\sin m\theta\cos Nz d\theta dz$$

$$\tau_{rz}=q_6(\theta,z)=\frac{2}{c}\sum_n \sin Nz\left\{\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{C}_o\boldsymbol{S}_n[q_6]+\frac{1}{\pi}\sum_m \cos m\theta\,\boldsymbol{C}_m\boldsymbol{S}_n[q_6]\right\} \tag{21}$$

またここでも式の誘導過程から

$$\boldsymbol{A}_{mrz})_{r=a}=\frac{1}{c}A_{mo}+\frac{2}{c}\sum_n A_{mn}\cos Nz \tag{22}$$

$$\boldsymbol{B}_{mrz})_{r=a}=\frac{1}{c}B_{mo}+\frac{2}{c}\sum_n B_{mn}\cos Nz \tag{23}$$

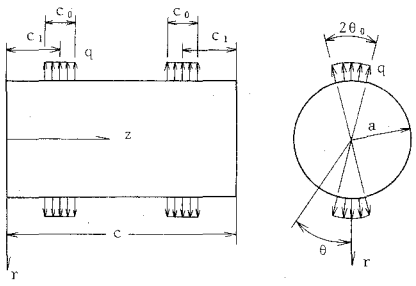
を満足しなければならない。

以上の条件より q_1～q_6 が与えられれば積分定数を全て決定することができる。

4，数値解析

有限円柱の数値解析例として図－2に示すような部分分布荷重を側面に受ける場合を考える。このときは式(14)，(16)，(17)，(19)～(21)において

$$q_1=q_2=q_3=q_5=q_6=0$$



図－2

であるから，式(16)，(17)から

$$\gamma_{mik} = \delta_{mik} = 0 \qquad (24)$$

$$\therefore\ D_{mik} = -E_{mik} \qquad (25)$$

また式(20)から　$\alpha_{mn} = 0$　(26)

式から(19)から

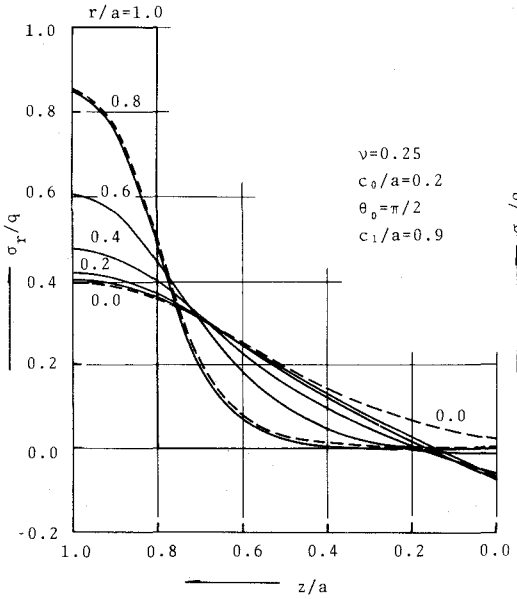
$$\beta_{mn} = \int_o^c \int_o^{2\pi} q_4(r,\theta)\cos m\theta \cos Nz\, d\theta dz$$

$$= 4\{1-(-1)^n\}\{1-(-1)^m\}\frac{1}{mN}\sin m\theta_o \cos Nc_1 \sin\frac{Nc_o}{2} \qquad (27)$$

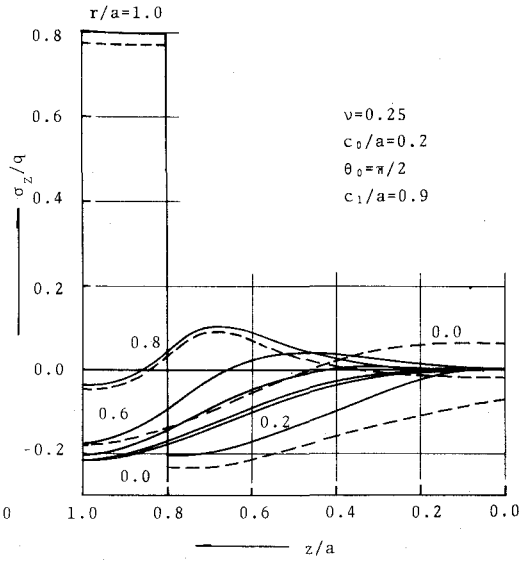
残った積分定数，A_{mn}，B_{mn}，C_{mn}，D_{mik} 等は式(14)，(21)～(23)から決定する。

数値計算で得られた結果を図—3～11に示す。計算は全てポアソン比 $\nu=0.25$，$c_o/a=0.2$ の場合で，級数項は $n=64$，$i=32$，$m=40$ としたものである。

図—3，4は軸対称荷重で $c_1/a=0.9$ すなわち円柱の中央部に荷重が作用する場合の σ_r，σ_z の z 方向の分布を r の各断面ごとに示したものである。図—2は σ_r の分布であるが図中に同じ条件で無限円柱とした場合の値をr＝0.8aとr＝0のものについて破線で示した。この計算は既に斉藤によって計算されていてほぼ同様の結果がえられているが，著者等の値は多少大きくなっている。これは級数項のとり方による差と思われる。無限円柱との比較ではr／aの

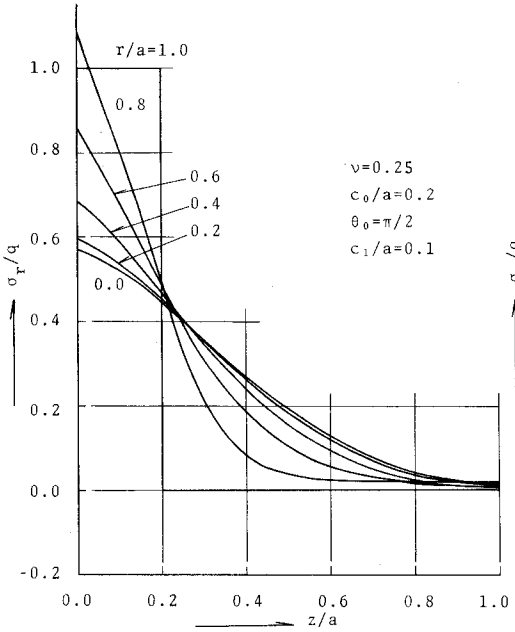


図—3

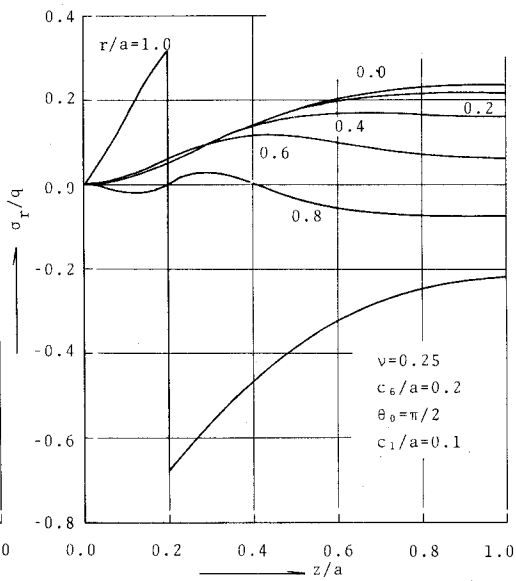


図—4

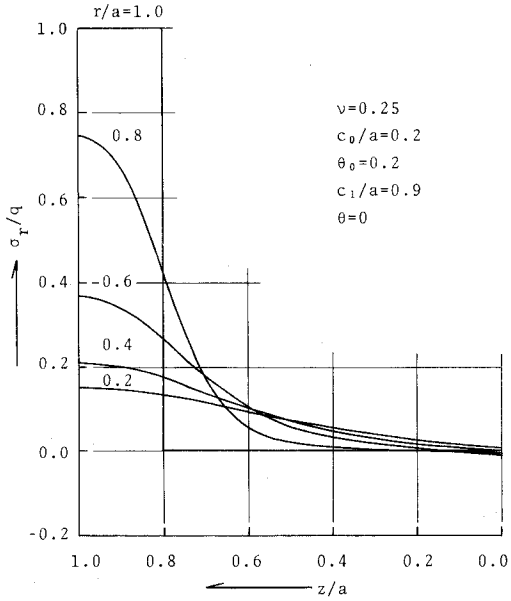
大きなところではほとんど差はなく，また荷形に近いところではｒ／ａが小さくなってもほぼ等しい分布をしている。



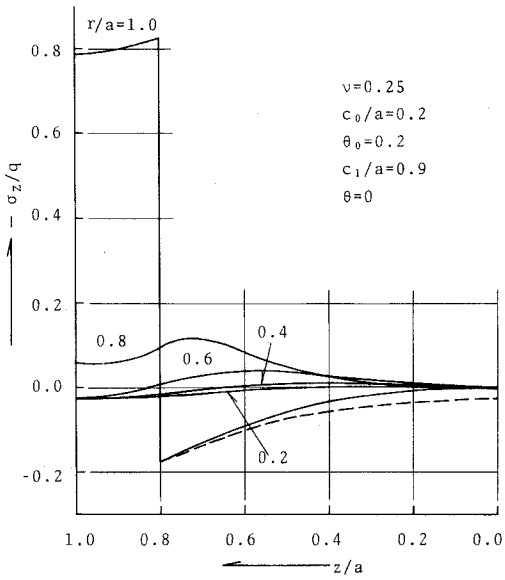
図－5



図－6



図－7



図－8

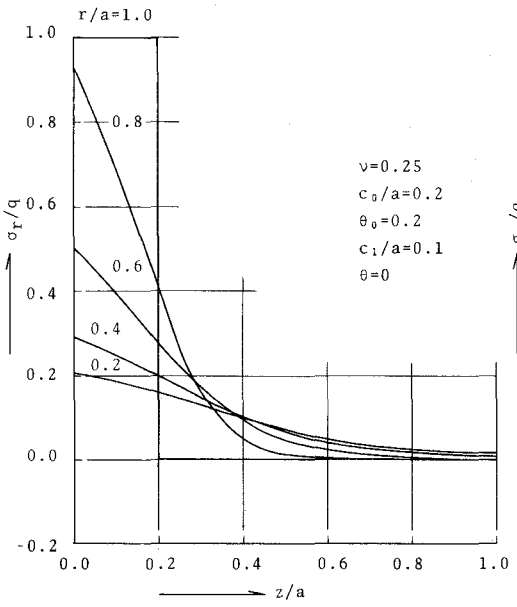
図—4はσ_zの分布を示した。これも図—3と同様破線で無限円柱の結果も示した。σ_zはrが小さくなるに従い急激に減少し，$r=0.8a$では$r=a$の分布と比較し，ほぼ全体的に符号が逆転している。$r=0$では荷重とは逆符号の割合大きな応力を生じている。無限円柱の結果はσ_rほど一致せず，当然のことながら$z/a=0$ではかなり差がある。

図—5，6は同様に軸対称荷重が作用した場合であるが$c_1/a=0.1$，すなわち円柱の両端部に部分荷重が作用するときの結果である。σ_rは$z=0$ではrが小さくなってもそれほど減少せず，特に$r=0.8a$では逆に荷重強度より大きくなっている。zが大きくなると図—3の相当位置の値と近くなっている。

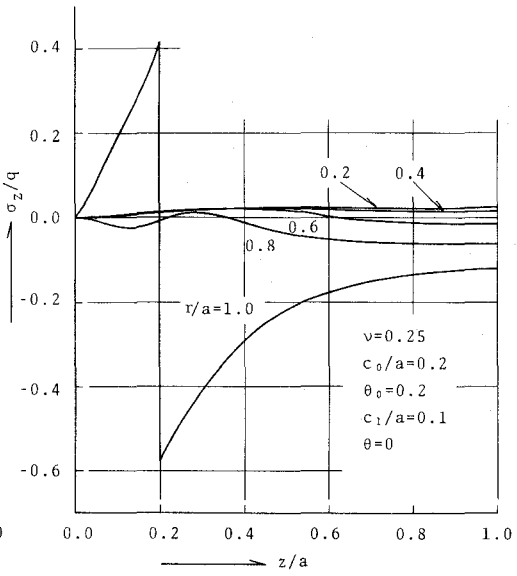
図—6のσ_zの分布はやはり図—4の分布とは全体としてかなり異なっている。$z/a=0.2$で応力は不連続となるが，この場合は$z/a>0.2$において荷重とは逆符号に大きな応力を生じており，$z/a<0.2$では境界の条件を満足させるように応力が減少している。ここでは無限円柱との比較は行なっていない。

図—7，8は非軸対称荷重（$\theta_0=0.2$）が$c_1/a=0.9$すなわち円柱中央部に作用した場合のσ_r，σ_zの分布を示した。図—7はσ_rの分布であるが合力の大きさが小さいため特にr方向への減少が大きく中心部では1/5以下になっている。図—7には同じ条件の無限円柱の値も示しているがほとんど一致しているため図にはその差が表われていない。

σ_zは$r=a$ではかなり大きい値であるがr方向にもz方向にも急激に減少しているがその減少の程度は軸対称の場合よりかなり著しい。この場合も無限円柱の値を破線で示したが，ほと



図—9



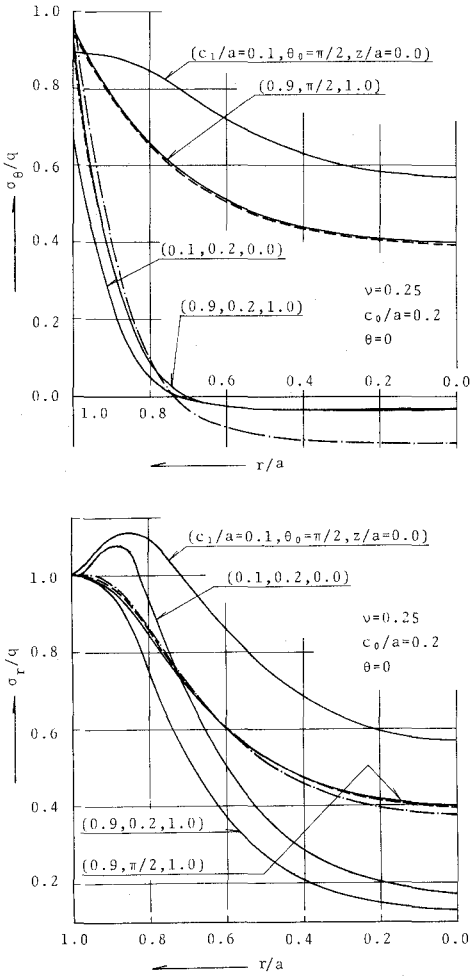
図—10

んど一致しており $r=a$ でもそれ程大きな差ではない。

図—9，10は同じ非軸対称荷重で $c_1/a=0.1$ すなわち円柱端部に作用する場合である。σ_r の分布は $z=0$ ではそれ程急激には減少しない。従って図—7とはかなり異なり大きな値であるが，z の大きなところでは図—7と一致してくる。

σ_z はやはりかなり特徴的な分布をしている。$r=a$ では $z=0$ からほぼ直線的に増加し $z/a=0.2$ で $\sigma_z \fallingdotseq 0.42q$ となり $z/a>0.2$ では $z/a=0.2$ の $\sigma_z \fallingdotseq -0.58q$ からかなり急に減少する。$r=a$ より小さな r では σ_z は急に減少し，減少の程度は軸対称の場合より大きい。

図—11には，以上で計算したいろいろの場合から σ_r と σ_θ について $\theta=0$ における荷重直下の値，$c_1/a=0.1$ に対しては $z=0$，$c_1/a=0.9$ に対しては $z=a$ の値の r 方向の変化を示した。図には無限円柱の値も示しているが σ_r，σ_θ とも $c_1/a=0.9$, $\theta_0=\pi/2$，$z/a=1.0$ の線に添っている破線と $c_1/a=0.9$, $\theta_0=0.2$, $z/a=1.0$ の線に添っている破線がそれぞれ軸対称および非軸対称荷重に対する値である。また，それぞれの図に2次元非軸対称問題の値[9]を合せて一点鎖線で示した。



図—11

σ_r の分布ではすでに示したように，軸対称，非軸対称とも $c_1/a=0.9$ の場合には無限円柱の値とほとんど一致しており，2次元問題として $\theta_0=0.2$ で計算した値も3次元問題では軸対称とした場合とほぼ等しくなっている。$c_1/a=0.1$ の場合には軸対称，非軸対称とも $0.8<r/a<0.9$ で最大値をとり荷重強度より大きくなる。特に軸対称では $r/a \fallingdotseq 0.85$ で $\sigma_r \fallingdotseq 1.11q$ 位とかなり大きく r 方向にゆるやかに減少する。

σ_θ の分布は図から明らかに $\theta_0=0.2$ の場合は r が小さくなるに従い急激に減少している。また $c_1/a=0.1$ の方が $c_1/a=0.9$ の場合より小さくなっているのは σ_r の分布とは逆である。無限円柱としての値はやはり破線で示したが $\theta_0=\pi/2$ で多少差があるが $\theta_0=0.2$ ではほ

とんど一致している。また2次元問題としての解は σ_θ の場合は $\theta_0=0.2$ の場合に近いが全体としてはあまり一致しない。

数値計算は先に記したように $i=32$, $n=64$, $m=40$ として級数和を求めた結果であるが精度を検討するため種々の項数の和をとり精度を検討した。結果は記さないが，上の項数で十分であることは確認している。

5. む　す　び

Fourier-Hauhel 変換による有限円柱の解を用いて若干の数値計算を行ない，無限円柱としての解，2次元非軸対称問題における解と比較も行なった。計算例は多くないが，$c/a=2.0$ の場合でも長さが載荷巾の5倍もあれが無限円柱としてもそれ程の差を生じない（中央載荷の場合）。2次元問題としての解は単純には有限円柱には適用出来ないが，σ_θ についてはある程度適用出来ることがわかった。

以上の計算は北海道大学大型電子計算機センターの FACOM-230／75 で行なったものである。

（昭和51年5月22日受理）

参　考　文　献

1）Sneddon I. N. : Fourier Transforms, lst, Ed. pp. 504—510, 1951.
2）宮本　博：3次元弾性論，第4章，1967.
3）斉藤秀雄：機械学会論文集，第18巻68号 pp. 21－28，1952.
4）吉野利男，宇津木諭：第23回応用力学連合講演会講演論文抄録集，pp. 303—304，1973.
5）秦　謹一：北海道大学工学部研究報告，第13号，pp. 13—44，1955.
6）奥村　勇：第24回応用力学連合講演会講演論文抄録集，pp. 183—184，1953.
7）Nomachi S. G. : the Mem. Muroran Ins. Tech., Vol. 3,No.3, pp.477—501, 1960.
8）Matsuoka K. G. and S. G. Nomachi : THEORETICAL AND DPPLIED MECHANICS, Vol.22, sp. 199—209, 1974.