



室蘭工業大学

学術資源アーカイブ

Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive



有限要素法による鉄筋コンクリート部材の弾塑性解析

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-07-24 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 大築, 和夫 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/3639

有限要素法による鉄筋コンクリート部材の弾塑性解析

大 築 和 夫

Nonlinear Analysis of Reinforced concrete members by the Finite Element Method

Kazuo Ohtsuki

Abstract

The purpose of this paper is to find an appropriate analytical model for nonlinear finite element analysis of reinforced concrete members and to clarify an elasto-plastic behavior of reinforced concrete frames subjected to horizontal load by applying the analytical model to them.

A computer program was developed and used to analyze the complete behavior, from zero load until failure, of six reinforced concrete beams with varied stress-strain relationships and failure criteria for concrete, bond-slip relationships between concrete and steel and the finite element layout.

Computed deflections, crack patterns and cracking and ultimate loads were compared with experimental data and with the values calculated by the Ohno-Arakawa's formula or those calculated by the bending theory.

I 結 言

有限要素法を用いて、これまで理論解析が不可能であった現象をシュミレーションしようとする試みが工学の広い分野の問題についてなされていて、本論文において対象とした鉄筋コンクリート部材についても種々検討されている。

先ず、1967年、D. Ngo, A. C. Scordelis¹⁾はせん断亀裂を前もって仮定した鉄筋コンクリート梁の弾性解析を行ない、その後、多くの研究者^{2)~20)}により有限要素法による鉄筋コンクリート部材の弾塑性解析が試みられている。しかし、未だ解析結果が全ての点について実験結果に充分対応するような有限要素解析モデルを得るまで至っていない、多くの検討すべき問題が残されている。

そこで、本論文では必ず、鉄筋コンクリート部材の適切な有限要素解析モデルを得ることを目的として、既に北大大野研究室において実験された肋筋のない鉄筋コンクリート梁について、二次元有限要素法を用いて弾塑性解析を用ない、a) 分割数、b) コンクリートの応力度一歪度関係、c) コンクリートの破壊条件、d) 鉄筋とコンクリート間の付着の解析結果に及ぼす影響について検討する。

次に、実験が困難な鉄筋コンクリート造の不静定構造物の諸性状を理論的に解明する第一歩として、上記の鉄筋コンクリート梁の弾塑性解析結果をふまえ、有限要素法を用いて無限均等ラ-

B 鉄筋の剛性マトリックス

鉄筋は線材要素で分割した。この場合の局部座標系 (x-y) に関する剛性マトリックス [k] は次のようになる。(図-2 参照)

$$[k] = \frac{E_s \cdot A_s}{l_s} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここに E_s : 鉄筋のヤング係数

A_s : 断面積 l_s : 要素長さ

全体座標系 (X-Y) に関する剛性マトリックス [K_s] は座標変換マトリックスを [T] とすると次のようになる。

$$[K_s] = [T]^{-1} [k] [T] = \frac{E_s \cdot A_s}{l_s} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & & & & & \\ -\cos^2 \theta & \cos^2 \theta & & & & \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & & & \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \sin^2 \theta & & \\ & & & & \text{Sym.} & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

C 付着剛性マトリックス

D. Ngo, A. C. Scordelis は鉄筋とコンクリート間の付着—すべり関係を解析に取り入れるため、物理的には大きさを有せず、剛性のみを有する図-3のような付着連結要素を提案した。K_hは鉄筋軸方向の付着剛性を表わし、K_vは鉄筋軸と直角方向の剛性を示す。本解析ではこの連結要素を取り入れる。但し K_vは無量大としK_hのみを考慮する。付着剛性 K_hは厳密には要素節点間のすべりについての変位関数を定め、付着応力度—すべり関係に基づいて算出されるべきであるが、問題が複雑となるので、本論文では図-4のh-i部材の中央点aからi-j部材の中央点までの鉄筋とコンクリート間の相対すべり量は、節点iのすべり量に等しいものと仮定する。この仮定により局部座標系 (x-y) に関する付着剛性マトリックス [k_b] は次のようになる。

$$[k_b] = \frac{k \cdot \psi \cdot (x_j + x_a)}{2} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここに k : 付着係数 (τ_b/s)
 ψ : 鉄筋周長

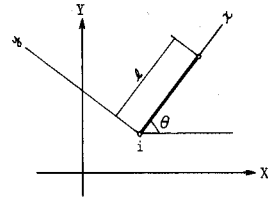


図-2 鉄筋要素

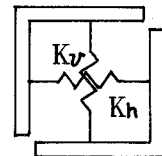


図-3 連結要素

これを全体座標系 (X-Y) に変換して次の剛性マトリックスが得られる。

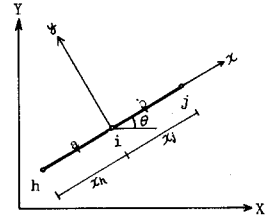
$$[K_b] = \frac{k \cdot \Psi \cdot (x_j + x_h)}{2} \times \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

以上の剛性マトリックスを構造物全体について Assemble して解けば、弾性体としての節点変位が求まり、以下順次歪度、応力度が求められる。

2 亀裂発生及び塑性々状を考慮した解析法について

荷重が大になるに従い、コンクリート要素の一部には亀裂発生、圧縮降伏そして破壊が生ずる。

以上の判定は本論文では、全て要素の主応力度について行ない、主応力度が引張強度或いは圧縮強度に達すると亀裂が発生或いは降伏し、主応力度方向の歪が圧縮破壊歪度に達すると要素全体が破壊してしまうと仮定した。なお、一旦発生した亀裂の方向は、その後の応力再配分によって変らないが、主応力度が引張から圧縮に変るときには亀裂発生前の状態に戻るとした。また、亀裂又は圧縮降伏が一方方向に生じても、それと直交する方向の主応力度が引張又は圧縮強度に達していない間は弾性状態を保ち、要素は直交異方性になると仮定した。



図—4 付着モデル

以上のような仮定で計算する場合のコンクリート要素の取り扱いについて述べると次のようになる。

等質等方性弾性体についての単位要素内の応力度 $\{\sigma\}$ と歪度 $\{\epsilon\}$ 及び節点変位ベクトル $\{\delta_i\}$ の関係は次の通りとする。

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} = [D][B]\{\delta_i\}$$

ただし $[D]$: 等質等方性弾性体についての2次元弾性係数マトリックス

故に、主応力度 $\{\sigma_\theta\}$ は変換マトリックス $[T_\sigma]$ を用いれば次のように求められる。

$$\{\sigma_\theta\} = [T_\sigma]\{\sigma\} = [T_\sigma][D][B]\{\delta_i\}$$

以上の式から主応力度方向の有効歪度を求めると

$$\{\epsilon_\theta\} = [D]^{-1}\{\sigma_\theta\}$$

ここで得られた $\{\sigma_\theta\}$ の一部又は全部が仮定した引張又は圧縮強度に達するか、又は超えたかすると要素は上記の仮定に従い直交異方性となり、要素の主応力度は次のように変る。

$$\{\sigma'_\theta\} = [D_p]\{\epsilon_\theta\}$$

ただし

$$[D_p] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21} E_1 & 0 \\ \nu_{12} E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & A G_{12} \end{bmatrix}$$

$$A = 1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}$$

磯畑氏¹²⁾と同様に

$$\nu_{12} = \nu \sqrt{E_1/E_2} \quad \nu_{21} = \nu_{21} = \nu \sqrt{E_2/E_1}$$

$$G_{12} = \frac{\sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \sqrt{\nu_{12} \nu_{21}})}$$

とにおいて上式に代入すると

$$[D_p] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} E_1 & \nu \sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ \nu \sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A \sqrt{E_1 E_2}}{2(1 + \nu)} \end{bmatrix}$$

$$A = 1 - \nu^2$$

となる。

亀裂が一方方向に生じた場合は $E_1 = 0, E_2 = E$

亀裂が二方向に生じた場合は $E_1 = E_2 = 0$

また、 σ_2 が圧縮降伏した場合は

$$F_c = \frac{1}{1 - \nu^2} (\nu \sqrt{E E_2} \varepsilon_1 + E_2 \varepsilon_2)$$

を解いて E_2 を求める。

σ_1, σ_2 が共に圧縮降伏した場合は

$$F_c = \frac{1}{1 - \nu^2} (E_1 \varepsilon_1 + \nu \sqrt{E_1 E_2} \varepsilon_2)$$

$$F_c = \frac{1}{1 - \nu^2} (\nu \sqrt{E_1 E_2} \varepsilon_1 + E_2 \varepsilon_2)$$

を解いて E_1, E_2 を求める。

以上によって要素の状態に応じて $[D_p]$ が定まる。

$\{\sigma_\theta\}$ は又、次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\{\sigma'_\theta\} &= [D_p]\{\varepsilon_\theta\} = [D_p][D]^{-1}\{\sigma_\theta\} \\ &= ([I] - [I'])\{\sigma_\theta\}\end{aligned}$$

$$\text{ただし } [I'] = [I] - [D_p][D]^{-1}$$

$[I]$: 3×3 の単位マトリックス

故に、直交異方性になった後の X, Y, Z 方向要素内応力度 $\{\sigma'\}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\{\sigma'\} &= [T_\sigma]^{-1}\{\sigma'_\theta\} = [T_\sigma]^{-1}([I] - [I'])[T]\{\sigma\} \\ &= [T_\sigma]^{-1}([I] - [I'])[T][D][B]\{\delta_i\} \\ &= [D][B]\{\delta_i\} - [T_\sigma]^{-1}[I][T][D][B]\{\delta_i\}\end{aligned}$$

したがって、直交異方性要素の節点力は次式で求められる。

$$\begin{aligned}\{F_i\}^e &= \int_V [B]^T ([D][B] - [T_\sigma]^{-1}[I][T][D][B]) dv \{\delta_i\} \\ &= [K]\{\delta_i\} - [\Delta K]\{\delta_i\} = [K_p]\{\delta_i\}\end{aligned}$$

$$\text{ただし } [K_p] = [K] - [\Delta K]$$

$[K]$ は等質等方性要素の剛性マトリックスに等しい。

なお節点力は次のようにも求められる。すなわち

$$\{\sigma'\} = [T_\sigma]^{-1}\{\sigma'_\theta\} = [T_\sigma]^{-1}[D_p][D]^{-1}[T_\sigma][D][B]\{\delta_i\}$$

故に

$$\begin{aligned}\{F_i\}^e &= \int_V [B]^T \{\sigma'\} dV \\ &= \int_V [B]^T [T_\sigma]^{-1}[D_p][D]^{-1}[T_\sigma][D][B] dV \{\delta_i\} \\ &= [K_p]\{\delta_i\}\end{aligned}$$

以上で得られる $[K_p]$ は次頁の通りである。

$$\begin{aligned}\text{ただし } D_{11} &= (\eta_x^{1/2} \cos^2 \theta + \eta_y^{1/2} \sin^2 \theta)^2 & D_{12} &= \nu_p \eta_x^{1/2} \eta_y^{1/2} \\ D_{13} &= (\eta_x^{1/2} - \eta_y^{1/2})(\eta_x^{1/2} \cos^2 \theta + \eta_y^{1/2} \sin^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ D_{22} &= (\eta_x^{1/2} \sin^2 \theta + \eta_y^{1/2} \cos^2 \theta) \\ D_{23} &= (\eta_x^{1/2} - \eta_y^{1/2})(\eta_x^{1/2} \sin^2 \theta + \eta_y^{1/2} \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta \\ D_{33} &= 0.5(1 - \nu_p) \eta_x^{1/2} \eta_y^{1/2} + (\eta_x^{1/2} - \eta_y^{1/2})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta\end{aligned}$$

$$\eta_x = \frac{E_x}{E}, \quad \eta_y = \frac{E_y}{E}, \quad \nu_p = \xi_{xy} \nu, \quad \xi_{xy} = \xi_x^{1/2} \cdot \xi_y^{1/2}$$

$$\xi_x = \nu_x / \nu, \quad \xi_y = \nu_y / \nu$$

x, y : 図-5に示す主応力方向

E, ν : 等方弾性体のヤング係数及びポアソン比

E_x, E_y, ν_x, ν_y : 塑性化した場合の添字方向のヤング係数及びポアソン比

θ : 主応力方向と全体座標系とのなす角

以上得られた剛性マトリックスを用いて Assemble とすると構造物全体として次の釣合式が得られる。

$$[K_p]\{\delta\} = \{R\}$$

上式の計算法として次の二通りが考えられる。

第1は上式をそのまま解いて

$$\{\delta\} = [K_p]^{-1}\{R\}$$

から求められる方法である。

第2は $[K_p] = [K] - [\Delta K]$ として

$$[K_p] = \frac{E \cdot t}{2ab(1-\nu^2)} \times$$

$a^2 D_{33} + b^2 D_{11}$									
$-abD_{13}$									
$-b^2 D_{11}$	$a^2 D_{33} + b^2 D_{11}$								
	$+abD_{13}$								
$-a^2 D_{33}$	$-abD_{13}$	$a^2 D_{33} + b^2 D_{11}$							
		$+abD_{13}$							
abD_{13}	$-a^2 D_{33}$	$-b^2 D_{11}$	$a^2 D_{33} + b^2 D_{11}$						
			$-abD_{13}$						
$a^2 D_{23} + b^2 D_{13}$	$-b^2 D_{13}$	$-a^2 D_{23}$	$\frac{ab}{2}(D_{33} + D_{12})$	$a^2 D_{22} + b^2 D_{33}$					
$-\frac{ab}{2}(D_{12} + D_{33})$	$-\frac{ab}{2}(D_{33} - D_{12})$	$-\frac{ab}{2}(D_{12} - D_{33})$		$-abD_{23}$					
$-b^2 D_{13}$	$a^2 D_{32} + b^2 D_{13}$	$-\frac{ab}{2}(D_{33} + D_{12})$	$-a^2 D_{32}$	$-b^2 D_{33}$	$a^2 D_{22} + b^2 D_{33}$				
$-\frac{ab}{2}(D_{12} - D_{33})$	$+\frac{ab}{2}(D_{12} + D_{33})$	$-\frac{ab}{2}(D_{33} - D_{12})$	$-\frac{ab}{2}(D_{33} - D_{12})$		$+abD_{23}$				
$-a^2 D_{32}$	$-\frac{ab}{2}(D_{12} + D_{33})$	$a^2 D_{32} + b^2 D_{13}$	$-b^2 D_{13}$	$-a^2 D_{22}$	$-abD_{23}$	$a^2 D_{22} + b^2 D_{33}$			
$-\frac{ab}{2}(D_{33} - D_{12})$	$+\frac{ab}{2}(D_{12} + D_{33})$	$-\frac{ab}{2}(D_{12} - D_{33})$	$-\frac{ab}{2}(D_{12} - D_{33})$			$+abD_{23}$			
$\frac{ab}{2}(D_{12} + D_{33})$	$-a^2 D_{32}$	$-b^2 D_{13}$	$a^2 D_{32} + b^2 D_{13}$	abD_{23}	$-a^2 D_{22}$	$-b^2 D_{33}$	$a^2 D_{22} + b^2 D_{33}$		
	$-\frac{ab}{2}(D_{12} - D_{33})$	$-\frac{ab}{2}(D_{33} - D_{12})$	$-\frac{ab}{2}(D_{12} + D_{33})$				$-abD_{23}$		

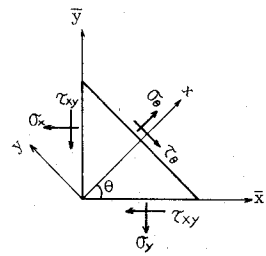


図-5 主応力方向

$$[K]\{\delta\} = \{R\} + [\Delta K]\{\delta\} \text{ とおき}$$

$$\{\delta\} = [K]^{-1}(\{R\} + [\Delta K]\{\delta\})$$

として求める方法である。

第2の方法では $\{\delta\}$ が両辺に含まれているので繰返し計算法によらなければならないが $[K]^{-1}$ は弾性状態において求めてあるので、逆マトリックスの計算は最初に行うだけで、後は右辺の () 内の列ベクトルを計算すれば $\{\delta\}$ を求めることが出来る。一方、第1の方法によれば亀裂等の発生によって要素の力学性状が変る度にマトリックスを作り直し、逆マトリックス計算をしなければならない。

両者の計算時間に対する優劣については方程式の元数や亀裂の発生状況等が関係し、現在のところ明確な基準は無いが、一般に $[\Delta K]$ が大きくなるに従い、第2の方法の収束が悪くなるので $[K_p]$ の逆マトリックスを求めた方がよいようである。ただし、本論文では両者を比較する意味を含めて、梁の解析は第2の方法、ラーメンの解析は第1の方法によって行なった。

なお第2の方法において

$$\{\Delta\sigma_e\} = \{\sigma_e\} - \{\sigma'_e\}, \quad \{\Delta\sigma\} = \{\sigma\} - \{\sigma'\} = [T_\sigma]^{-1}\{\Delta\sigma_e\}$$

とおけば

$$[\Delta K] = \int_V [B]^T [T_\sigma]^{-1} \{\Delta\sigma_e\} dV$$

となり、三角形要素の場合は要素内で歪及び応力度は一定なので次のように極めて簡単に求められる。

$$[\Delta K] = t \times A \times [B]^T [T_\sigma]^{-1} \{\Delta\sigma_e\}$$

以上の第2の方法は O. C. Zienkiewicz, S. Valliapan, I. P. King が亀裂、降伏等の非線形問題の解法として提案⁴⁾した初期歪問題を解く方法と全く同じである。

以上によって計算を行ない、 $\{\delta\}$ が著しく増大して、荷重が増大しなくなったとき、梁又はラーメンが耐力に達したとして計算を打切った。

III 鉄筋コンクリート梁の弾塑性解析

本章では、前章に述べた弾塑性解析法を用いて、既に北大大野研究室で実験された、図一6に示す筋筋のない梁を、先ず、分割数を変えて解析し、次いでコンクリートの応力度—歪度関係、コンクリートの破壊条件、鉄筋とコンクリートの付着力—すべり関係の仮定を変えて解析した。

1 分割数の解析結果に及ぼす影響について

A 解析モデル及び計算仮定

解析した梁の有限要素分割は図一7 (a) (b) (c) の3種で、梁端では鉄筋はスリップしないように拘束されていると仮定した。

コンクリートの破壊条件は図一8 (a) の Johansen 型とし、応力度—歪関係は実験結果に基

づいて図-9 (b) のバイリニアで、引張強度は $F_c/10$ とした。

鉄筋の応力度-歪関係は完全弾塑性、鉄筋とコンクリートの付着応力-すべり関係は文献²⁴⁾を参考に図-9 (a) のバイリニアを仮定した。

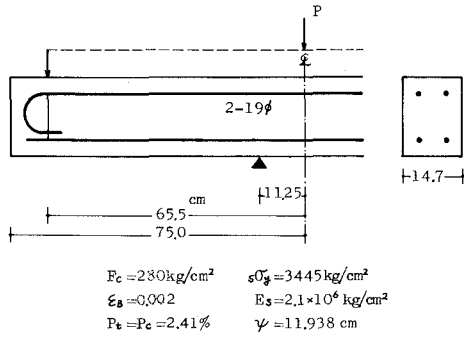


図-6 試験体

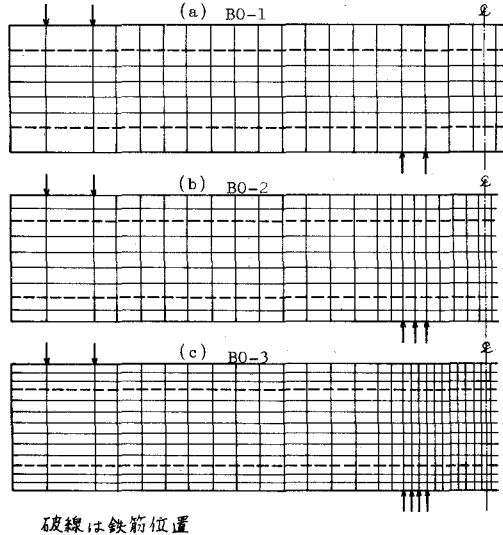


図-7 要素分割

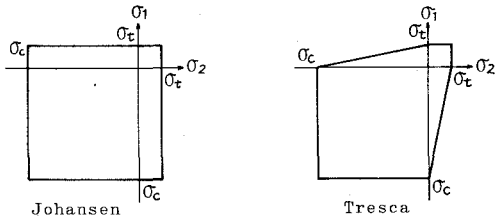


図-8 コンクリートの破壊条件

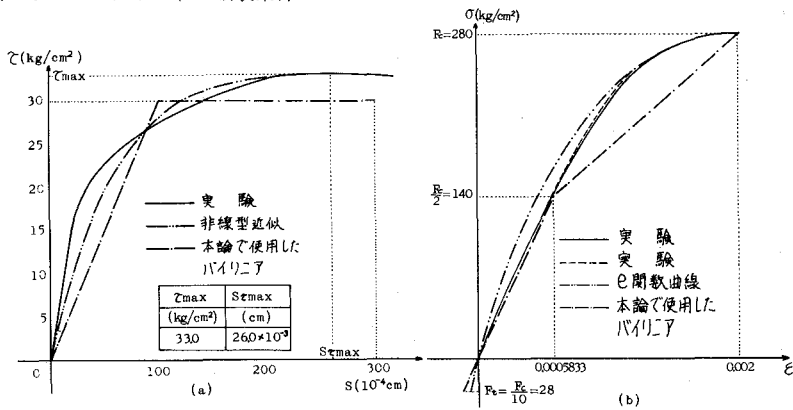


図-9 材料の力学モデル

B 解析結果及び考察

i 初亀裂荷重及び耐力

計算で得られた初亀裂荷重及び耐力を実験値及び大野・荒川式による値と共に表-1に示す。表中材力解1)は鉄筋断面を考慮した断面二次モーメントを用いて、有限要素法(以下FEMとする)による亀裂発生要素の中心点の応力度がコンクリートの引張強度となるとき荷重であり、2)は亀裂発生要素の上縁の応力度が引張強度となるとき値である。せん断初亀裂荷重は斜め亀裂がせん断スパン中央の材軸に生じたことが認められた荷重である。

これによると曲げ初亀裂荷重は分割が細かい程低い。これは亀裂判定応力度が要素の平均値となっているため、当然分割の細かい方が縁に近い位置の応力度を取ることになるためである。

せん断初亀裂荷重は分割の粗いBO-1が最も大きく、BO-2, 3は同じ値となったが、実験値並びに大野・荒川式の値に比較し相当大きい。

耐力はいずれも亀裂図(図-10)の斜線を施した要素の圧縮破壊によって得られ、分割の細かいもの程低くなり、BO-2, 3が比較的实验値に一致していると云える。また、BO-2の値が最も大野・荒川式の値に近い。

表-1 初亀裂荷重及び耐力

	曲げ初亀裂荷重 (ton)			せん断初亀裂荷重 (ton)			耐 力 (ton)		
	FEM	実 験	材 力 解	FEM	実 験	大野荒川式	FEM	実 験	大野荒川式
BO-1	5.91	7.0	6.13 ¹⁾ 4.90 ²⁾	12.2	8.0	8.01	22.2	16.7	19.37
BO-2	4.73		5.55 ¹⁾ 5.00 ²⁾	11.0			17.4		
BO-3	4.42	6.5	5.31 ¹⁾ 5.00	11.0			15.8	16.0	

ii 亀裂分布

図-10に一例としてBO-1, 2の亀裂分布を示す。

せん断スパン内にはいずれの場合もほぼ全域に亘って亀裂が発生することになり、分割数の違いによる差は認められない。端部スパン内の曲げ亀裂分布について見ると分割の精粗により曲げ亀裂発生荷重、発生位置に相違が見られ、分割の細かい方が幾分亀裂の発生が早くなる傾向が見られるが、耐力も低かったため亀裂発生範囲は狭くなり、実験で見られる傾向に近い。

iii 荷重-撓み曲線

図-11に荷重-撓み関係を示す。尚比較のため実験結果を併記した。これによると、撓みは曲げ初亀裂が入るまでは分割数に拘らず殆んど同じであるが、その後、次第に分割の細かい方の撓みが大きくなり、せん断スパンに斜め亀裂発生後一層差が現われる。これは前述の様に分割を細くしたものの程亀裂発生荷重が低かったためと考えられる。

実験結果と比較すると、耐力、変形の両面から見た場合BO-2が最も実験結果に近いと云える。

以上、分割の精粗による差異を耐力、変形、亀裂について見たが、弾塑性解析を行う際、そ

の大きさに影響され易く、亀裂分布は上記の変位について述べた事柄及び局部応力の問題でもあるので分割方式の影響を最も大きく受けると考えられる。

しかし、鉄筋コンクリートの場合、前記の計算時間の問題と共に細くみれば等質等方性体とは考え難いので、いたずらに分割を細くすることについては問題が残り、計算と実験結果を更に対応させるためには使用要素や力学性状の判定法にさかのぼって検討の要があると考えられる。しかし以上で検討したBO-2程度の分割によっても、かなりの荷重範囲について鉄筋コンクリート部材の挙動を検討し得るものとする。

2 計算仮定の解析結果に及ぼす影響について

A 解析モデル及び計算仮定

解析した梁の有限要素分割は前節のBO-2と同じである。

コンクリートの破壊条件は図-8のJohansen型、応力度-歪度関係は圧縮側は図-9に示すe関数式とする。ただし、引張側はe関数式の $\sigma=0$ における接線と一致する線形とする。尚、圧縮側の応力度は下記の(A)式によって求めた有効歪度を用いて(B)式により求めた。

$$\epsilon_1^* = (\epsilon_1 + \nu \cdot \epsilon_2) / (1 - \nu^2) \quad \epsilon_2^* = (\epsilon_2 + \nu \cdot \epsilon_1) / (1 - \nu^2) \quad \dots(A)$$

$$\sigma_c = 6.75 (e^{-0.812\epsilon_1^*/\epsilon_B} - e^{-1.218\epsilon_1^*/\epsilon_B}) F_C \quad \dots(B)$$

ここに $\epsilon_1^*, \epsilon_2^*$:有効歪度 ϵ_1, ϵ_2 :主歪度 ν :ポアソン比
 ϵ_B :圧縮強度時の歪度 F_C :コンクリート強度

鉄筋とコンクリートの付着-すべり関係は図-9(a)のバイリニアと非線形の2種尚、この非線形曲線は文献24)によるもので次式で表わされる。

$$\tau_{x1} = e \cdot \frac{\log[(e-1)S_{x1} + 1]}{(e-1)S_{x1} + 1}$$

ここに $\tau_{x1} = \tau_x / \tau_{max}$

$$S_{x1} = S_x / S\tau = \tau_{max}$$

以上の力学仮定を組合せた表-2の3種について解析し、前節のBO-2も含めて比較する。コンクリートの応力度-歪度関係をe関数と仮定した場合、圧縮歪度が0.05を越えたとき破壊と做して計算を打切った。

B 解析結果及び考察

計算で得られた初亀裂荷重及び耐力を表-3に、荷重-撓み曲線を図-12に、亀裂分布を図-13に示す。

i コンクリートの応力度-歪度関係の解析結果に及ぼす影響

表-2 材料の力学モデルの組合せ

記	破壊条件	τ_b -S関係	σ - ϵ 関係
(BO-2)	Johansen	Bilinear	Bilinear
BO-4	Johansen	Bilinear	e-Function
BO-5	Johansen	Non-linear	e-Function
BO-6	Tresca	Bilinear	e-Function

第 3 初亀裂荷重及び耐力

記 号	曲げ初亀裂荷重 (ton)			せん断初亀裂荷重 (ton)			耐 力 (ton)		
	FEM	実 験 値	材 力 解	FEM	実 験 値	大野荒川式	FEM	実 験 値	大野荒川式
BO-2	4.73	7.0	5.23 ¹⁾	11.0	8.0	8.01	17.4	16.0	19.37
BO-4	4.52			10.6			17.6		
BO-5	4.63			10.8			18.6		
BO-6	4.51			9.2			15.0		

コンクリートの応力度—歪関係をバイリニアとしたBO-2と e 関数としたBO-4を比較すると、曲げ初亀裂荷重、せん断初亀裂荷重は e 関数としたBO-4の方が若干低いですが耐力は殆んど同じ値となった。

亀裂分布についてみると、 e 関数を用いた方が全体として亀裂の進展が早く、特に端部スパンにおいて著しく亀裂発生範囲が増大し斜め方向亀裂も発生している。これはコンクリートの応力度—歪度関係として e 関数を用いた場合、引張側のヤング係数がバイリニアの場合より大きくなったため、鉄筋とコンクリートのヤング係数比が変り、コンクリートの負担する応力が大きくなって亀裂が入り易くなったものと考えられる。

撓みは e 関数を用いた方が载荷の初期段階から耐力に至るまで若干小さい。一般に亀裂の発生によって撓みも大きくなると考えられるが、 e 関数を用いた場合、亀裂発生荷重が小さく、亀裂進展も早いにも拘らず撓みは小さくなっている。これは亀裂のない要素の剛性がバイリニアのものより大きいため、亀裂が入った後も梁全体の剛性が大きくなっていることによるものと考えられる。図-12に実験結果を併記したが、本解析値は両者共よく実験結果に一致していると云える。

以上の結果より、本解析モデルのように、せん断亀裂発生後に圧縮破壊によって耐力に達する、所謂、せん断圧縮破壊形式のものでは、特に耐力に関しては、本解析で使用した程度のコンクリートの応力度—歪度関係の違いは差程解析結果に影響しないと云える。尚、両者の計算

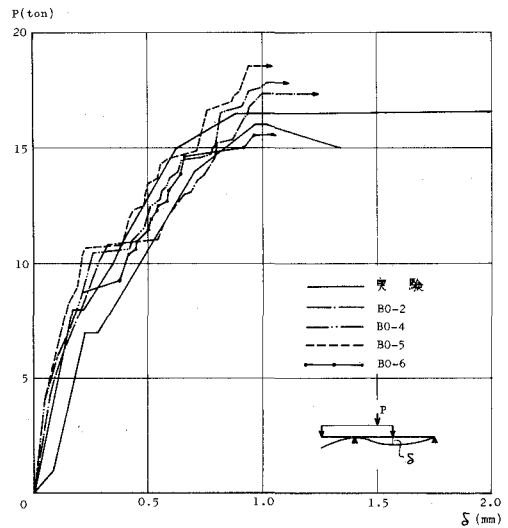


図-12 荷重—撓関係

亀裂分布について見ると、せん断スパン内の亀裂の進展は Tresca 型の BO-6 の方が早く、逆に端部スパンでは若干遅くなる傾向が見られる。破壊条件の違いによる顕著な差は高荷重段階における圧縮側に見られ、BO-6 では圧縮側の鉄筋に沿った亀裂が顕著に現われ、この亀裂が前述の耐力に大きく影響しているものと思われる。

撓みは、せん断初亀裂荷重が異なる 10 ton 前後及び耐力近くの荷重時を除けば、破壊条件の違いによる差は小さい。

以上の結果、本解析の範囲では耐力、亀裂の点から考えて破壊条件として Johansen 型を用いた方がより実験に近い結果が得られると云える。

iii 付着力—すべり関係の計算結果に及ぼす影響

付着力—すべり関係を異にする BO-4 と BO-5 を比較すると曲げ初亀裂荷重、せん断初亀裂荷重については殆んど差が見られない。耐力については若干差があり、非線形とした BO-5 の方が大きい。

せん断スパン内の亀裂については付着力—すべり関係の違いによる差は見られない。端部スパンでは非線形とした BO-5 の方が亀裂の発生が早くなる傾向が見られるが顕著ではない。

撓みは BO-5 の方が付着剛性が大きいため同一荷重において幾分小さくなっている。

以上のように本解析で仮定した付着力—すべり関係は比較的近似していたこともあって耐力に若干の差が見られた他は差がなかった。

尚、付着力の影響については著者等が別途行なった結果^{19)~21)}では、亀裂の発生は付着係数の小さい程遅くなる傾向があり、せん断初亀裂荷重は高くなり、逆に耐力は低くなる傾向が見られた。

IV 無限均等ラーメンの弾塑性解析

前章において有限要素法による鉄筋コンクリート梁の弾塑性解析を行ない、静定梁の実験結果とかなり良い一致を示す解析モデルが得られたので、本章ではこれを実験の困難な水平力を受ける不静定ラーメンに適用し、不静定ラーメンの弾塑性々状について検討する。

1 解析モデル及び計算仮定

解析したラーメンは図-14 (a) に示す無限均等ラーメンの斜線部分を同図 (b) のように取り出し、各切断面に次のような不静定ラーメンの条件を与えた。

i) 接合部中心点間距離が変わらない場合

変形に関する条件

(a) 梁、柱接合部中心点 O に関して点対称

(b) 階高中央切断面 ⑥—⑥ の中央点 B に対する断面内各点の変形と断面 ③—③ の中央点 C に対するそれは等しい

- (c) 梁スパン中央点Aに関して点対称
- (d) 階高中央切断面の中央点B, Cに関して, 夫々点対称
節点方程式に関する条件
- (a) 梁・柱接合部中心点Oに関して点対称
- (b) b-b断面とc-c断面とは連続である

ii) 接合部中心点間距離が変る場合

上記 i) の諸条件のうち変形に関する条件 (c), (d) が
下記の (c'), (d') に変わり, 節点方程式に関する条件として
下記の (c), (d) が加わる。

変形に関する条件

- (c') 梁スパン中央点Aの変形後の点A'に関して点対称
- (d') 階高中央切断面の中央点Bの変形後の点B'に関して点対称
節点方程式に関する条件

- (c) ①-②断面のX方向節点力の和は零
- (d) ③-④断面のY方向節点力の和は零

解析したラーメンの種別は, 従来の曲げ強度式によれば梁主筋の引張降伏により耐力に達することになる梁スパン5mのものと, 梁のせん断破壊により耐力に達することになる梁スパン2mの2系列で, 夫々について柱梁接合部中心

表-4 解析モデルの種別

記号	接合部中心点間距離	柱軸方向力 $N/A_c =$
M5	不変	0
M5-03	"	0.3Fc
M5-06	"	0.6Fc
M5-09	"	0.9Fc
MM5	変化	0
MM5-06	"	0.6Fc
M2	不変	0
M2-03	"	0.3Fc
M2-06	"	0.6Fc
M2-09	"	0.9Fc
MM2	変化	0
MM2-06	"	0.6Fc

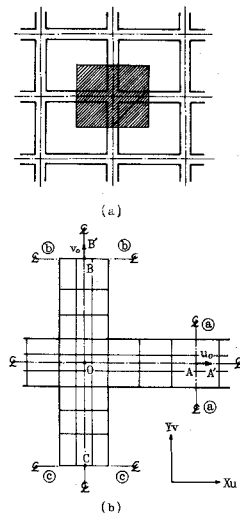


図-14 ラーメン

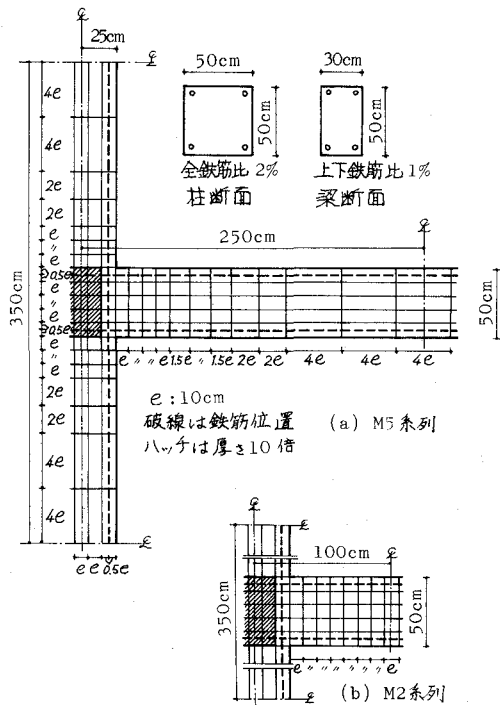


図-15 有限要素分割

点間距離が拘束を受けて変わらないとした条件と、柱並びに梁に亀裂発生に伴う軸方向力が生じないように接合部中心点間距離が変るとした両極端の条件を与え、接合部中心点距離の移動についての仮定によって生ずる軸方向とは無関係に柱に常に一定の軸方向圧縮力 $N/A_c = 0.3F_c, 0.6F_c, 0.9F_c$ を加えたものを、夫々組合せた表-4の12種である。

有限要素分割を図-15に示す。

計算に際して設けた材料の力学仮定は、前章の結果を参照して、コンクリートの破壊条件はJohansen型で応力度—歪度関係は図16(a)のように引張側は線形、圧縮側は完全弾塑性型、鉄筋の応力度—歪度関係も完全弾塑性型、鉄筋とコンクリート間の付着力—すべり関係については図-16(b)のように完全弾塑性型を仮定した。更に著者等が先に発表^{19)~21)}した結果を参照し、鉄筋とコンクリートの節点まわりのコンクリート要素に亀裂が生ずると、そのコンクリート要素と鉄筋間の付着力は零になるとした。亀裂発生後要素は直交異方性になるものとして剛性ストリックスを作り直し、鉄筋とコンクリートの降伏及び付着降伏は応力伝達法によった。

水平荷重は柱の上下の切断面の層間変位で与え、柱軸方向圧縮力は実力として柱の切断面に加え、いずれか一個のコンクリート要素の主歪度が0.0015に達するか、又は等価節点力が取敢しなくなったとき破壊したものと計算を打切った。

計算に使用した材料の諸係数等は表-5に示す通りである。

2 計算結果及び考察

A セン断スパン比 $a/b=5$ の梁を有するラーメン

図-17(a)~(d)に亀裂分布の一例を示す。

同図に見られるように接合部中心点間距離が変わらないとしたものでは、柱に軸方向圧縮力が加わると柱及び接合部内の亀裂発生域は狭くなる。又柱軸方向圧縮力が大きくなるにつれ、梁内の曲げ初亀裂発生位置は柱梁接合端から遠ざかる傾向が見られる。これは柱軸方向圧縮力の影響によって柱軸方向圧縮力の

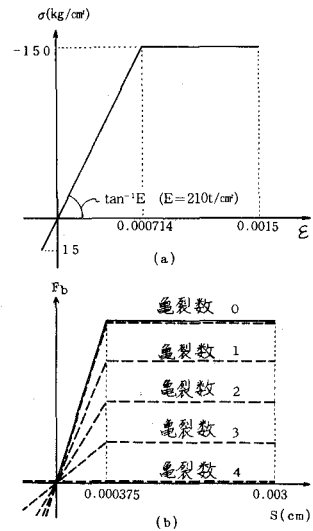
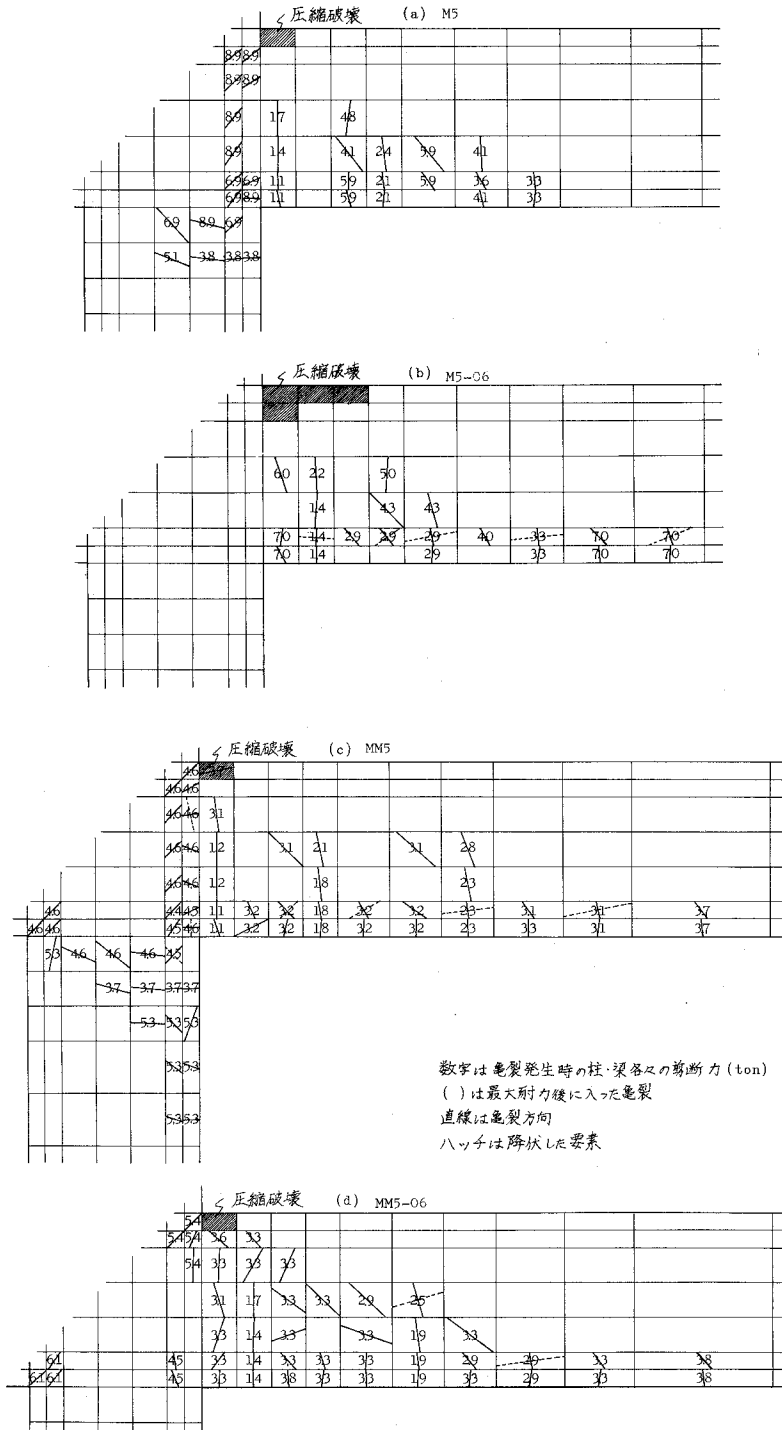


図-16 材料の力学モデル

表-5 材料の係数等

コンクリートのヤング係数	210 ton/cm ²	鉄筋の降伏点応力度	2400 kg/cm ²
コンクリートのポアソン比	1/6	付着係数	8000 kg/cm ²
コンクリートの圧縮強度	150 kg/cm ²	降伏スリップ量	0.00375 cm
コンクリートの引張強度	15 kg/cm ²	梁軸鉄筋周長	14.2 cm
鉄筋のヤング係数	2100 ton/cm ²	柱軸鉄筋周長	20.0 cm



図一17 亀裂分布

大きなもの程、梁端の隅角部に大きな軸方向圧縮力が生ずるためである。

一方、接合部中心点間距離が変るとした場合の梁内の亀裂は図-17(c), (d)に見られるように、柱軸方向圧縮力の有無に拘らず広範囲に生ずる。尚柱軸方向圧縮力の有無による差異は、上記の接合部中心点間距離が変わらないとしたときと同様である。

従来の曲げ並びにせん断強度式によれば、前述のように本解析モデルはいずれも梁の引張鉄筋の降伏により耐力に達することになるが、本解析では亀裂図に示した柱梁隅角部の梁上端のコンクリート要素の圧縮破壊により耐力に達し、両者の破壊様式は著しく異った。このときの梁せん断力と梁主筋の最大応力度並びに従来の曲げ強度式により求めた耐力を表-6に示す。これによれば接合部中心点間距離が変わらないとしたM5系列の耐力は、いずれも曲げ強度式による値よりも大きくなっているにも拘らず鉄筋応力度は1/2以下の値となっている。これに対して、接合部中心点間距離が変るとしたMM5系列の耐力は、いずれの曲げ強度式による値よりも小さく、又鉄筋の応力度も降伏点応力度よりも小さいが、常用設計式でMM5の耐力時の鉄筋応力度を逆算すると1843 kg/cm²となり、FEMで得られた値に比較的近く、先の接合部中心点間距離が変わらないとしたものより従来の曲げ強度式による値に近い。

このように、接合部中心点間距離の変化の有無によって耐力並びに鉄筋応力度に大きな差が現われた原因は、接合部中心点間距離が変わらないとしたものには、亀裂の発生に伴って図-18に示すような梁せん断力の増加と共に漸増する材軸方向圧縮力が生じたためと考えられる。因に、M5の耐力時の軸方向圧縮力42.5tonが作用した場合の梁の曲げ耐力を学会規準解説の終局強度略算式によって求めると梁せん断力は9.59tonとなり、本解析値よりも大きくなる。

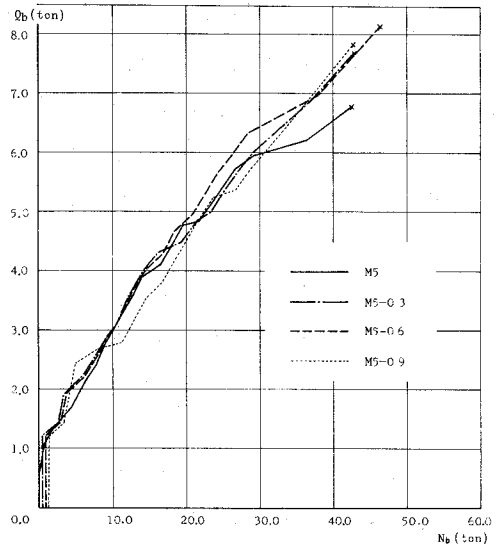
次に柱に軸方向圧縮力を加えた場合について見ると、接合部中心点間距離が変わらないとしたものでは、M5-09を除き柱軸方向圧縮力の大きいもの程耐力は大きい。これは柱軸方向圧縮力が加わると柱及び接合部の亀裂が減少し、その結果骨組全体の変形が小さくなって耐力が増加したものと思われる。M5-09は柱軸方向圧縮力が非常に大きいため、隅角部に大きな圧縮力を生ずる結果となり、これが圧縮破壊を早めたものと考えられる。

図-19は剛性低下率 α と層間変位 δ の関係を示したものである。尚、剛性低下率 α は柱せん断力-層間変位曲線より図中に示すように初期剛性 K_0 と割線剛性 K_i との比 $\alpha=K_i/K_0$ として求めた。これによるといずれの場合も亀裂発生後急激な剛性の低下が見られる。接合部中心点間距離の条件を異にするM5とMM5を比べると、接合部中心点間距離が変るとしたMM5の方が亀裂発生後の剛性低下は大きく、層間変位 δ が大きい。これは接合部中心点間距離が変わらないとしたものでは亀裂の発生に伴って前述のような軸方向圧縮力が生じ、これが後の亀裂進展を遅らせ、また亀裂の発生を阻止するため剛性の低下も小さくなり、同一の層間変位に対する梁の抵抗力が大きく、耐力に達し易くなったためと考えられる。

一方柱軸方向圧縮力の影響についてみると、接合部中心点間距離が変わらないとした場合、水平

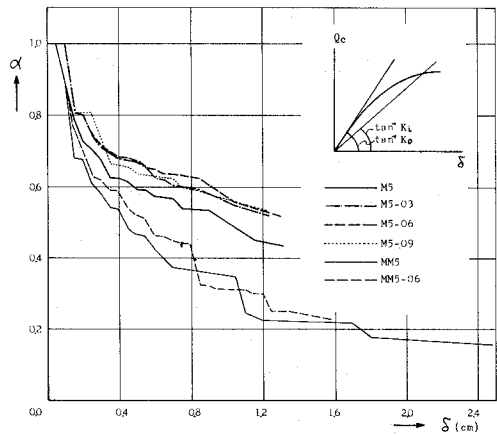
表一六 セン断力及び主筋応力度

記 号	耐力時 梁 せん断力 ton	耐力時 梁 主筋応力kg/cm ²
M 5	6.79	1025
M 5-03	7.68	1084
M 5-06	8.16	1042
M 5-09	7.84	1155
MM 5	4.55	1626
MM 5-06	4.34	1478
常用設計式	5.79	2400
終局略算式	5.83	2400
e 関数法	5.68	2400



図一八 梁せん断力一軸方向力関係

力のみが加わった M5 に比べ、柱軸方向圧縮力も加わった M5-03, 06, 09 の方が、柱の亀裂が激減しているためラーメンの剛性低下は小さいが、耐力時の層間変位には大きな差は見られない。これに対し、接合部中心点間距離が変るとした MM5 系列では、部分的には逆の場合もあるが、全体として柱軸方向圧縮力の加わった MM5-06 の方が剛性低下は小さく、耐力時の変形も小さくなっている。これも先に述べた柱内の亀裂分布が大きく影響していると思われる。



図一九 剛性低下率一層間変位関係

**B セン断スパン比 a/b=1.67 の梁を有する
ラーメン**

亀裂分布の一例を図-20 に示す。

本解析モデルはいずれも梁主筋に沿ったコンクリート要素内に斜め方向亀裂の発生が見られ、実験で見られるような梁材軸を横切る斜め亀裂の発生は認められなかった。また梁スパン 5 m の場合に比べ梁内の曲げ亀裂発生範囲は狭くなっている。その他については、梁スパン 5 m のものと同様である。

図-21 は柱せん断力 (または梁せん断力) と層間変位の関係を示す。これによれば接合部中心点間距離が変わらないとし、柱に一定の軸方向圧縮力を加えた場合の柱せん断力は層間変位の増

加と共にほぼ直線的に増しているが、梁主筋に沿った斜め方向亀裂が入るとせん断力は急激に減少し、その後層間変位の増加と共に再び増加しているが、斜め亀裂発生前のせん断力に達する以前に圧縮破壊を起している。柱に軸方向圧縮力を加えなかったM2では、柱及び接合部内に多数の亀裂が発生したため、せん断力-変位関係の勾配は上記のものより緩やかとなり、梁主筋に沿って斜め亀裂が入った後は前述のものと同様となった。

一方接合部中心点間距離が変わるとし、水平力だけを加えたMM2では、柱及び梁主筋に沿って斜め方向亀裂が入った後、柱せん断力は急激に低下するが、その後層間変位の増加と共にせん断力も増加して圧縮破壊を起し、耐力に達する。MM2-06もMM2と同様、梁主筋に沿って斜め亀裂が生じた後、せん断力が急激に低下し、その後層間変位の増加に伴って若干せん断力が増したところで圧縮破壊を起している。この両者の差は亀裂図に見られる様に梁端引張側の亀裂並びに梁主筋に沿った亀裂発生の違いによるものと考えられる。

以上のように接合部中心点間距離の変化の有無、柱軸方向圧縮力の有無によって柱又は梁せん断力と層間変位の関係は著しく異なったものとなる。

図-22は梁スパン5mの場合と同様にして求めた剛性低下率 α と層間変位 δ の関係を示す。図中○印は最大荷重時を示す。先ず、接合部中心点間距離が変わるとしたMM2と変わらないとしたM2について見ると梁スパン5mの場合と同様MM2の方が剛性低下が大きく、又圧縮破壊時までの変形の伸びも大きい。

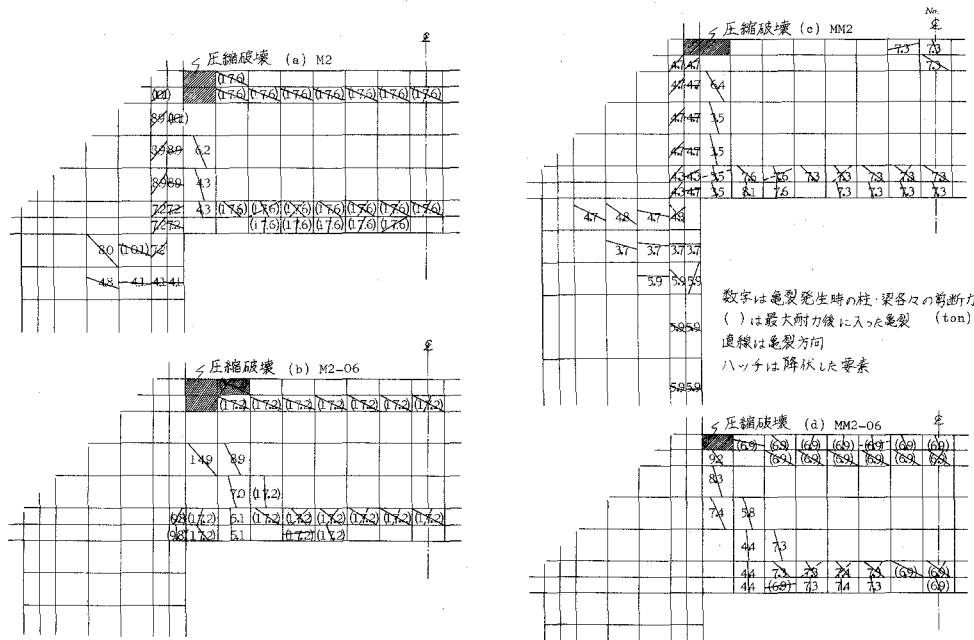


図-20 亀裂分布

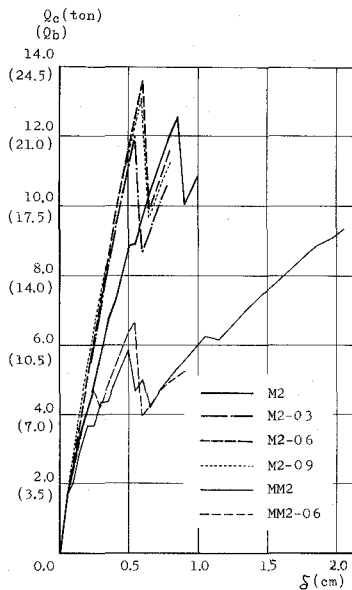
接合部中心点間距離が変わらないとしたものについて見ると、最大荷重時までは水平力だけを加えた M2 に比べ柱軸方向圧縮力も加えた M2-03, 06, 09 の剛性低下は小さく、両者の差は梁スパン5mの曲げ破壊する場合よりも大きい。最大荷重を示した後、剛性は急激に低下しているが、その後の変形の伸びは柱軸方向圧縮力の有無に拘らず小さい。また接合部中心点間距離が変わるとした場合についても MM2 に比べ柱軸方向圧縮力を加えた MM2-06 の方が剛性低下は小さいが、その差は接合部中心点間距離が変わらないとした場合より小さい。

以上のように接合部中心点間距離の変化の有無及び柱軸方向力の有無によってラーメンの剛性は大きく変る。

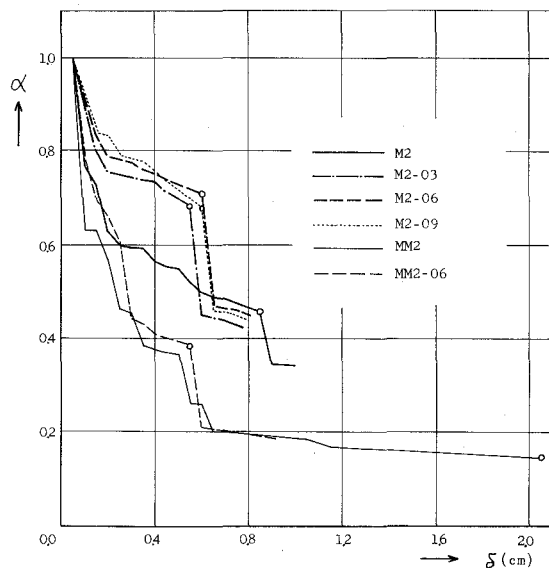
表一七に最大荷重時の梁せん断力及び梁主筋応力度を示す。尚、MM2を除き梁主筋に沿って斜め方向亀裂が入る直前に最大荷重に達し、MM2は柱梁隅角部の梁上端のコンクリート要素の圧縮破壊により最大荷重に達した。表中の値は圧縮破壊又は梁主筋沿いに斜め亀裂が生ずる1ステップ前の値である。これによると接合部中心点間距離が変わらないとし、水平力のみを加えた M2 の梁せん断力は大野・荒川式の15.

表一七 梁せん断力及び主筋応力度

記 号	最大荷重時 梁せん断力	最大荷重時 主筋応力度
M2	22.0 ton	930 kg/cm ²
M2-03	21.0	942
M2-06	23.8	1165
M2-09	22.9	1093
MM2	16.4	1891
MM2-06	11.9	1253
大野 荒川式	15.5	2134
曲げ略算式	17.5	2400



図一21 せん断力一層間変位関係



図一22 剛性低下率一層間変位関係

5ton,学会規準の曲げ終局強度略算式の 17.5ton よりも大きくなったにも拘らず鉄筋応力度は大野・荒川式の値を用いて常用設計式で逆算すると 2134kg/cm^2 となるのに対して本解析結果では凡そ 1/2 程度の値となっている。これも梁スパン 5 m の場合と同様に亀裂発生に伴って生じた軸方向圧縮力が大きく影響しているものと思われる。因に、耐力時の梁軸方向圧縮力 50 ton が作用したときの梁せん断耐力を修正大野・荒川式²³⁾によって求めると 16.0 ton となり、学会規準の軸力のある場合の曲げ終局強度式で求めると 30.2 ton となり、本解析値は両者の中間となる。

次に接合部中心点間距離が変わるとし、水平力のみを加えた MM2 は前述のようにコンクリートの圧縮破壊により最大荷重を示したが、このときの梁せん断力は 16.4ton で、大野・荒川式並びに学会規準の曲げ終局強度略算式の値の中間となり、どちらの値にも近いが、このときの梁主筋の応力度は 1891kg/cm^2 で、先の大野・荒川式の耐力時の鉄筋応力度により近い。これに対して柱に軸方向圧縮力を加えた MM2-06 の最大梁せん断力は 11.9ton と大野・荒川式の値よりも相当低く、鉄筋応力度も低い。これは亀裂図に見られるように MM2 に比べ梁端引張部分の亀裂が多く、更に梁主筋沿いの亀裂の発生が顕著であるため付着力が著しく低下して耐力が極度に低くなったものと思われる。

以上のように接合部中心点間距離の変化の有無によって最大荷重に大きな違いが生じたのは先にも述べたように亀裂発生後に生ずる軸方向圧縮力によるものであると考えられる。

この亀裂発生後に生じた梁軸方向圧縮力と層間変位の関係を図-23 に示す。梁の軸方向圧縮力は層間変位の増加と共に概ね直線的に増大し、柱に軸方向圧縮力を加えたものでは殆んど差が見られない。これは軸方向圧縮力は亀裂によって大きく左右されるが、柱に軸方向圧縮力を加えたものでは梁内の亀裂分布に差がなかったためと思われる。柱に軸方向圧縮力を加えな

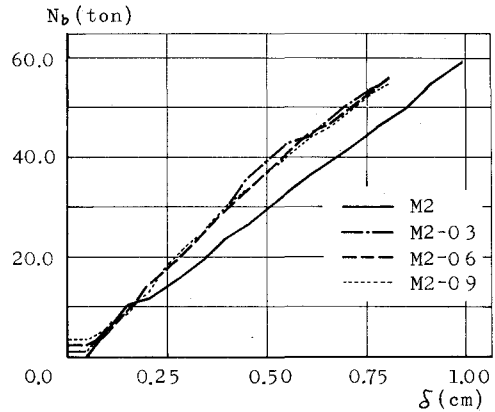


図-23 梁軸力—層間変位関係

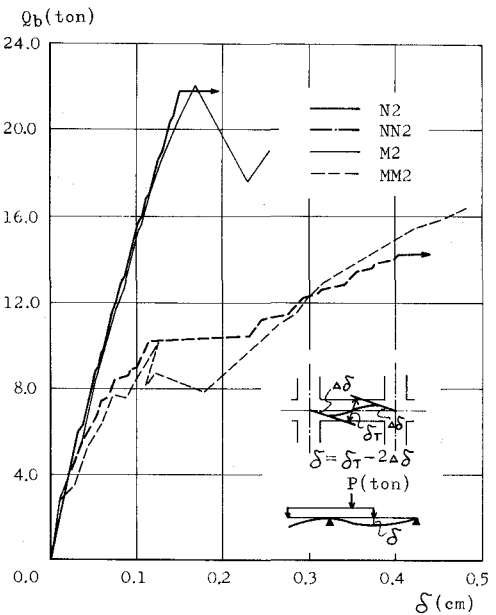


図-24 荷重—撓み関係

かった M2 の梁軸方向圧縮力は同一層間変位について見ると他のものより小さいが、これは柱及び接合部内の亀裂が影響しているものと考えられる。

図-24 は本解析のラーメン梁内法スパンと同じせん断スパンを有する静定梁を大野式加力法により解析した結果の梁材軸位置の荷重—撓み関係を示したものである。N2 は M2 とほぼ同じ軸方向圧縮力が作用した場合であり、NN2 は軸力のない場合である。尚、同図のラーメン梁の変形は柱及び接合部の亀裂によって大きく影響を受け、せん断スパンのみの変形を取り出すことは困難である。そこで、こゝでは同図に示す様に接点回転角から求めた。

これによれば、軸方向力のあるものでは最大荷重以後に、軸力のないものでは 10ton 前後において差が見られるが、これは荷重として変形を与えたものと力を与えたものとの違いであることを考えれば、梁の変形を全体的に見た場合本解析の範囲では、ラーメン梁も静定梁も殆んど差がないと云える。したがって、静定梁の実験結果からラーメン梁の性状を予測し得るものと考えられるが、その場合、前述のようにラーメン梁では亀裂の発生によって軸方向力が生じたことから、むしろ柱の実験結果を用いた方が実状に近いのではないかと考えられる。

V 結 語

以上、有限要素法による鉄筋コンクリート部材の弾塑性解析を行って得られた結果を要約すると次のようである。

静定梁の解析結果より

- i) 有限要素分割の精粗は弾塑性解析結果の耐力に大きな影響を及ぼし、分割の細かいもの程耐力は低い。
- iii) コンクリートの応力度—歪関係に極端な差がない限り弾塑性解析結果はあまり変らない。したがって計算時間をも含めて考えると応力度—歪度関係を非線形とするより折線で近似した方が有利である。
- iii) コンクリートの圧縮—引張域における破壊条件の違いは耐力、亀裂性状に大きく影響する。
- iv) 付着力—すべり関係は比較的近似していたため耐力に若干差が出た程度である。

ラーメンの解析結果より

- i) 従来の静定梁についての強度算定式から予測される破壊様式と本解析結果の破壊様式は著く異なる。
- ii) 柱及び梁の伸縮が拘束されていると、亀裂発生に伴って柱及び梁に軸方向圧縮力が生じ、耐力、変形、亀裂性状に大きな影響を及ぼす。
- iii) 上記 ii) の軸方向圧縮力は耐力を増す結果となるが、逆に変形能力が小さくなり、靱性の点で問題がある。

終りに、本論文は修士及び卒業研究で得られた結果を取纏めたものであり、その間ご助言を頂いた小幡守教授、並びにご助力頂いた加藤信夫、福島泰明、工藤仁司、後藤順、松原浩司、真柄祥吾の諸氏に深く感謝の意を表します。

(昭和51年5月22日受理)

参 考 文 献

- 1) D. Nago and A. C. Scordelis "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams" A. C. I. Journal Mar. 1967
- 2) D. Ngo, A. C. Scordelis and H. A. Franklin "Finite Element Study of Reinforced Concrete Beams with Diagonal Tension Crack" UCSESM Report No. 70-19 Univ. of California, Berkeley, Dec. 1970
- 3) A. H. Nilson "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method" A. C. I. Journal Sept. 1968
- 4) O. C. Zeinckiewiz, S. Valliappan and I. P. King "Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material" Geotechnique Mar. 1968
- 5) S. Valliappan and P. Nath "Tensile Crack Propagation in Reinforced Concrete Beams Finite Technique" International Conference on Shear, Torsion and Bond in Reinforced and Prestressed Concrete Jan. 1969
- 6) S. Valliappan "Nonlinear Stress Analysis of Reinforced Concrete" ASCE, St. Division Apr. 1972
- 7) K. F. Faberty "An Analysis of a Reinforced and a Prestressed Concrete Beam by Finite Element Method" Ph. D. Thesis The Univ. of Iowa 1972
- 8) M. Suidam and W. C. Schnobrich "Finite Element Analysis of Reinforced Concrete" ASCE St. Division Oct. 1973
- 9) Chung-Hyun Nam and Charles G. Salmon "Finite Element Analysis of Concrete Beam" ASCE St. Division Dec. 1974
- 10) M. S. Mirza and A. A. Mufti "Nonlinear Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures" Proc. of the 1974 International Conference on Finite Element Method in Engineering. The Univ. of New South Wales, Australia 1974
- 11) 岩下 "鉄筋コンクリート造構造物の弾塑性解析及び耐震壁に関する研究" 東工大・博士論文 1967.12
- 12) 磯畑 "有限要素法によるコンクリート構造物の2次元弾塑性解析" 建築学会論文報告集 第189号 1971.11
- 13) 黒正, 滝口 "有限要素法による鉄筋コンクリート部材の2次元非線形解析" その1, 2 建築学会論文報告集 第189号, 第200号 1971.11, 1972.10
- 14) 武藤, 津川他 "F. E.M.による鉄筋コンクリート部材の弾塑性解析" 建築学会大会梗概集 1971.11, 1972.10
- 15) 加藤, 福島, 小幡, 大築 "有限要素法によるせん断スパンの小さい梁の弾塑性解析 I, II" 建築学会大会梗概集 1972.10
- 16) 小幡, 大築他 "有限要素法による無限均等ラーメンの亀裂を考慮した解析" 建築学会道支部第40回 1973.9
- 17) 大築, 小幡, 工藤 "有限要素法による鉄筋コンクリート梁の弾塑性解析法の検討その1, 2" 建築学会道支部 1975.3
- 18) 大野, 小幡, 大築 "有限要素法による鉄筋コンクリート梁の弾塑性解析結果に及ぼす計算仮定及び分割方式の影響" 複合材料シンポジウム 1975.6
- 19) 大築, 小幡, 工藤 "有限要素法による鉄筋コンクリート梁の弾塑性解析結果に及ぼす付着力の影響について" 建築学会大会梗概集 1975.10
- 20) 大築, 小幡, 木村 "有限要素法による無限均等ラーメンの弾塑性解析 その1, 2, 3" 建築学会大会梗概集

概集, 建築学会道支部 1975.10, 1976.3

- 21) 大野他 “新載荷法による鉄筋コンクリート梁のせん断抵抗について” 日本建築学会研究報告 30号 1954
- 22) 荒川 “鉄筋コンクリート梁のせん断抵抗に関する研究” 北大工学部研究報告集 第25号 1961.3
- 23) 服部, 柴田, 大野 “鉄筋コンクリート部材の剪断耐力機構に関する考察” 建築学会論文集 第200号 1972
- 24) 六車, 森田, 富田 “鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究 I, II” 建築学会論文集 第131号, 第132号, 1967.1, 1967.2
- 25) O. C. ツィエンキー ヴイツ, Y. K. チェーン共著 吉識雅夫監訳
“マトリックス有限要素法” 培風館