未知入力を持つ線形系に対する状態推定器

未知入力を持つ線形系に対する状態推定器

疋　田　弘　光

Observers for Linear Systems with Unmeasurable Inputs

Hiromitsu Hikita

Abstract

The problem of observing a set of linear functions of states for linear systems with unmeasurable inputs is investigated in terms of transfer function matrices. The structure of the observers is clarified by using the dual results of an exact model matching problem and a design procedure is given for obtaining low order observers. An example is presented in order to illustrate the procedure.

1. まえがき

D．G．ルーエンバーガによって微分器を必要としない状態推定器が提案されて以来，状態推定器に関する数多くの研究がなされてきた。その一つに未知入力を持つ系の状態推定器の構成法がある[1~3]。本論文では出力のみから状態の線形関数を推定する問題を伝達関数法によって解析し状態推定器の存在条件，構造および低次元実現などについて述べる。

2. 推定のための条件

可制御，可観測な次の線形系を考える。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{1-a}$$

$$y(t)=Cx(t) \tag{1-b}$$

ただし，$x(t)\in\mathscr{R}^n$，$u(t)\in\mathscr{R}^m$，$y(t)\in\mathscr{R}^p$ でそれぞれ状態，入力，出力変数である。また，A，B，C はそれぞれ $n\times n$，$n\times m$，$p\times n$ の定数行列である。推定すべき線形関数を

$$w(t)=Fx(t) \tag{2}$$

とする。ただし，$w(t)\in\mathscr{R}^q$，F は $q\times n$ 定数行列である。

いま，系(1)を $p\times m$ の伝達関数行列 $T_1(s)$ で表わすと

$$y(s)=T_1(s)u(s) \tag{3}$$

が成り立つ。また(2)式は

$$w(s) = Fx(s) = T_2(s)\,u(s) \tag{4}$$

と表わせる。$T_2(s)$ は $q \times m$ の伝達関数行列である。ここで，$T_1(s)$，$T_2(s)$ を右既約分解形で表わすと，

$$T_1(s) = Q_1(s)\,P_1^{-1}(s) \tag{5}$$

$$T_2(s) = Q_2(s)\,P_2^{-1}(s) \tag{6}$$

系(1)の出力のみから $Fx(t)$ を推定する状態推定器はプロパーな伝達関数行列 $T(s)$ を持ち，次の左既約分解形で表わされる $q \times p$ の伝達関数行列とする。

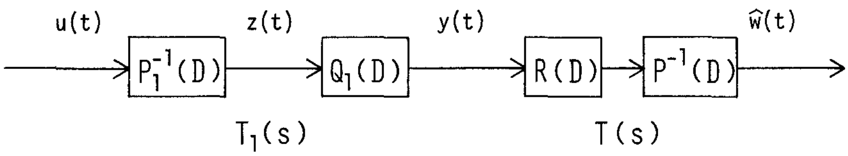
$$T(s) = P^{-1}(s)\ R(s) \tag{7}$$

定理 1　伝達関数 $T(s)$ をもつ状態推定器が線形関数 $Fx(t)$ を推定できる必要十分条件は

1)　$T(s)\ T_1(s) = T_2(s)$　　(8)

2)　$|P(s)| = 0$ の根が左半平面に存在する。

証明　微分オペレータ D を用いて証明する。必要性；$T(s)\ T_1(s)$ の部分を図示すると



図－1　系および状態推定器

ただし，$\hat{w}(t)$ は $w(t)$ の推定値である。$z(t)$ は系の状態の一部で $x(t)$ と次の関係がある[4]。

$$x(t) = S(D)\,z(t)$$

$$S(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ D & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ D^{d_1-1} & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ 0 & D^{d_2-1} & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots \\ 0 & 0 & & D^{d_m-1} \end{bmatrix} \tag{9}$$

ただし，

$$d_i \triangleq \partial c_i[P(s)]\ ;\ i = 1 \sim m \tag{10}$$

したがって，

$$w(t)=Fx(t)=FS(D)\,z(t)\triangleq F(D)\,z(t) \tag{11}$$

また，図－1より次の式が成り立っことが分かる。

$$u(t)=P(D)\,z(t) \tag{12}$$

$$P(D)\,\hat{w}(t)=R(D)\,y(t)=R(D)\,Q_1(D)\,z(t) \tag{13}$$

推定誤差を $e(t)$ とおけば

$$e(t)=\hat{w}(t)-F(D)\,z(t) \tag{14}$$

$P(D)$ を作用させると

$$\begin{aligned}P(D)\,e(t)&=P(D)\,\hat{w}(t)-P(D)\,F(D)\,z(t)\\&=\{R(D)\,Q_1(D)-P(D)\,F(D)\}z(t)\end{aligned} \tag{15}$$

$e(t)$ が $z(t)$ に無関係であるためには

$$R(D)Q_1(D)-P(D)\,F(D)=0 \tag{16}$$

$F(s)\,P_1^{-1}(s)$ を既約形 $Q_2(s)\,P_2^{-1}(s)$ で表わすと(16)式は

$$[R(s)\ \vdots\ P(s)]\begin{bmatrix}Q_1(s)\,P_1^{-1}(s)\\ \hdashline -Q_2(s)\,P_2^{-1}(s)\end{bmatrix}=0 \tag{17}$$

結局，(8)式が成り立たなければならない。$e(t)$ は，

$$P(D)\,e(t)=0 \tag{18}$$

を満足することになり，$t\to\infty$ で0に漸近するためには $|P(s)|=0$ の根が左半平面になければならない。十分性は明らかである。

3．モデル適合問題との双対性

(8)式の両辺を転置すると，

$$T_1^T(s)\ T^T(s)=T_2^T(s) \tag{19}$$

となり，系 $T_1^T(s)$ をモデル $T_2^T(s)$ に適合させるために結合する前置補償器 $T^T(s)$ を設計する問題に変換させられる。したがって，(8)式を満たす最小次元の $T(s)$ を見出す問題に対し，モデル適合問題の最小次元実現の解析結果[5]は行と列を入れかえることでそのまま成り立つ。

いま，$q>r$ とし，$r\times q$ 行列 $K(s)$ を $[K_r(s)\ \vdots\ K_{q-r}(s)]$ と分割する。ただし，$K_r(s)$ は $K(s)$ の前から r 列，$K_{q-r}(s)$ は後の $q-r$ 列からなる行列である。各列内で最高次である項の係数からなる行列 (high order coefficient matrix) $\Gamma_c[K(s)]$ を $[K_{rr}\ \vdots\ K_{q-r,\,r}]$ で表わすと，文献5の双対として次のことが言える。

定理2

$K(s)=[K_p(s)\ \vdots\ K_q(s)]$ を $\ker\begin{bmatrix}T_1(s)\\ \hdashline -T_2(s)\end{bmatrix}$ の $(p+q-m)\times(p+q)$ の次数順，次数最

小基低 (degree ordered, minimal basis)[6~8] とする。(8) 式を満足する最小次元の $T(s)$ が存在する必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,[K_{q\gamma}] = q \tag{20}$$

である。さらに(20)式が成り立てば，$T(s)$ の最小次元は行列 $K_{q\gamma}$ の上から q 本の1次独立な行を選ぶと，$K(s)$ の対応する行の行次数の和に等しい。$K(s)$ から選ばれたその q 本の行を $[R(s) \vdots P(s)]$ とすれば，プロパーでかつ最小次元である $T(s)$ は $T(s) = P^{-1}(s)R(s)$ で与えられる。

注1　定理2では $|P(s)| = 0$ の根が左半平面に存在することを保証していないので安定性については別に議論する必要がある。

例1

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \tag{21-a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{21-b}$$

なる系の出力のみから $x_2(t)$ を推定する場合を考察する。$x_2(t)$ が推定されれば $y(t)$ と $x_2(t)$ から全状態が再現される[9]。

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} s-s^2 \\ 1 \end{bmatrix} / (s^3+3s^2+3s+1) \tag{22}$$

$$T_2(s) = s/(s^3+3s^2+3s+1) \tag{23}$$

したがって

$$\ker \begin{bmatrix} s-s^2 \\ 1 \\ -s \end{bmatrix} / (s^3+3s^2+3s+1) \tag{24}$$

の次数順，次数最小基低を求めると

$$K(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-s \\ 0 & s & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

(25)式の第1行が $[R(s) \vdots P(s)]$ に相当するが $P(s) = 1-s$ であるので $T(s) = P^{-1}(s)R(s)$ は安定な状態推定器とはならない。

一方，(25)式の第2行に任意定数 α を掛け第1行に算し合わせたものを $[R(s) \vdots P(s)]$ とすると次の式が求められる。

$$[R(s) \vdots P(s)] = [1 \quad \alpha s \vdots (1+\alpha)-s] \tag{26}$$

明らかに(26)式は(24)式に含まれるので，(26)式より計算される

$$T(s)=P^{-1}(s)\ R(s)=\frac{[1\quad \alpha s]}{(1+\alpha)-s} \tag{27}$$

はプロパーな状態推定器であり，定理2に従って得られた不安定な $T(s)$ と同じ1次元でありながら α によって任意の極を実現することができる。

4．安定な状態推定器の存在

$P_1(s)$ と $P_2(s)$ の最大共通左因子を $G_{Lp}(s)$ とすると

$$\begin{aligned} P_1^{-1}(s)\,P_2(s)&=\hat{P}_1^{-1}(s)\ G_{Lp}^{-1}(s)\ G_{Lp}(s)\ \hat{P}_2(s)\\ &=\tilde{P}_2(s)\ \tilde{P}_1^{-1}(s) \end{aligned} \tag{28}$$

が成り立つ。ここで $\tilde{P}_2(s)$ はユニモジュラ行列になる。$Q_1(s)\,\tilde{P}_2(s)$ と $Q_2(s)\,\tilde{P}_1(s)$ の最大共通右因子を $G_{RQ}(s)$ とし，その行列式 $\varDelta_Q(s)=0$ の根を $T_1(s)$，$T_2(s)$ の共通零と呼ぶ。また，$Q_1(s)\,\tilde{P}_2(s)\ G_{RQ}^{-1}(s)$ の最大共通右因子を $G_R(s)$ とし，その行列式 $\varDelta_T(s)=0$ の根を $T(s)$ の固定極と呼ぶ。

定理3　(7)式が(8)式の解であるなら状態推定器の極は $\varDelta_D(s)\ \varDelta_T(s)=0$ の根である。また，(20)式が成り立てば $\varDelta_D(s)=0$ の根を任意に配置できるプロパーな状態推定器を見出すことができる。

注2　$T(s)$ の固定極は系 $T_1(s)$ の零から共通零を除いたものが対応する。また，この定理より固定極が不安定なら安定な状態推定器は存在しないことがわかる。

注3　1入力1出力系に対する線形汎関数状態推定器の固定極は単に極－零消去によって生じる。したがって $T_1(s)=r_1(s)/p_1(s)$，$T_2(s)=r_2(s)/q_2(s)$ とすると $\partial[r_1(s)]>\partial[r_2(s)]$ でなければ状態推定器が存在しないことは明らかである。

定理3の証明　文献5の双対から直ちに分かるが，次章での利用のため簡単に示す。

(7)，(8)式より

$$[R(s)\,\vdots\,P(s)]\begin{bmatrix} T_1(s)\\ \hdashline -T_2(s)\end{bmatrix}=0 \tag{29}$$

したがって，

$$[R(s)\,\vdots\,P(s)]\begin{bmatrix} Q_1(s)\,\tilde{P}_2(s)\\ \hdashline -Q_2(s)\,\tilde{P}_1(s)\end{bmatrix}G_{RQ}^{-1}(s)=[R(s)\,\vdots\,P(s)]\begin{bmatrix} M_p(s)\\ \hdashline -M_q(s)\end{bmatrix}=0 \tag{30}$$

ただし，

$$M(s)=\begin{bmatrix} M_p(s)\\ \hdashline -M_q(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_1(s)\ \tilde{P}_2(s)\\ \hdashline -Q_2(s)\ \tilde{P}_1(s)\end{bmatrix}G_{RQ}^{-1}(s) \tag{31}$$

ここで，$M_p(s)$ の最大共通右因子が $G_R(s)$ である。

さて，$T(s)$ には $|\bar{P}(s)|=|P(s)|$ なる右既約分解形

$$T(s)=Q(s)\bar{P}^{-1}(s) \tag{32}$$

が存在するが，双対空間[6] での考察より $(p+q)\times P$ 行列 $\left[\begin{array}{c}\bar{P}(s)\\ \hdashline -Q(s)\end{array}\right]$ の各列は $\ker[R(s) \vdots P(s)]$ の基底となる。さらに，ユニモジュラ行列 $U(s)$ が存在して

$$V(s)=\left[\begin{array}{c}\bar{P}(s)\\ \hdashline Q(s)\end{array}\right]U(s)=\left[\begin{array}{c:c}M_p(s) & \beta(s)\\ \hdashline M_q(s) & \gamma(s)\end{array}\right] \tag{33}$$

ところで $G_R(s)$ は $M_P(s)$ の最大共通右因子であるから $M_p(s)=\bar{M}_p(s)G_R(s)$ なる多項式行列 $\bar{M}_p(s)$ が存在する。したがって

$$\bar{P}(s)U(s)=[\bar{M}_p(s) \vdots \beta(s)]\left[\begin{array}{c:c}G_R(s) & 0\\ \hdashline 0 & I_{p-m}\end{array}\right] \tag{34}$$

結局

$$\Delta_T(s)=|G_R(s)|=0 \tag{35}$$

$$\Delta_D(s)=|\bar{M}(s) \vdots \beta(s)|=0 \tag{36}$$

の根が状態推定器の極となり，$\Delta_T(s)=0$ の根は固定極となる。以上が定理前半の証明である。

(20) 式が成りたてば

$$\partial_c[M_p(s)]\geq\partial_c[M_q(s)] \tag{37}$$

で $\operatorname{rank}\Gamma_c[M_p(s)]=m$ である。 簡単のため（一般性を失うことなく）$\Gamma_c[M_p(s)]$ の上から m 行が1次独立であると仮定する。$M_P(s)$ を $\left[\begin{array}{c}M_{pm}(s)\\ \hdashline M_{p,p-m}(s)\end{array}\right]$ と分割すると，$M_{p,p-m}(s)M_{pm}^{-1}(s)$ はプロパーな伝達関数行列となる。この左既約分解形を $\tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ と表わす。$\tilde{M}(s)$ は行プロパーである。$\mu\triangleq\max_j\partial_{cj}[M_{pm}(s)]$ を定義する。すると，$\tilde{N}(s)$ と $\tilde{M}(s)$ の終結行列[4] が存在し

$$\tilde{M}(s)\alpha_{p-m}(s)+\tilde{N}(s)\alpha_m(s)=D(s) \tag{38}$$

が成り立つ。ここで $\alpha_{p-m}(s)$ は列プロパーで $i\in\boldsymbol{p-m}$ に対し $\partial_{c_i}[\alpha_{p-m}(s)]=\mu-1$，かつ，$\alpha_m(s)\alpha_{p-m}^{-1}(s)$ はプロパーな伝達関数行列である。また $D(s)$ は行プロパーでその行列式 $\Delta_D(s)$ は任意のモニック多項式で，その次数 d は $d=\partial[|\tilde{M}|]+(p-m)(\mu-1)$ である。文献5の双対の議論によって $\beta(s)$ を

$$\beta(s)=\left[\begin{array}{c}-\alpha_m(s)\\ \hdashline \alpha_{p-m}(s)\end{array}\right] \tag{39}$$

とすると

$$\begin{aligned}|M_p(s) \vdots \beta(s)|&=\xi|G_R(s)||D(s)|\\ &=\xi\Delta_T(s)\Delta_D(s)\end{aligned} \tag{40}$$

が成り立つ。ただし ξ はスカラー。また，$\gamma(s)=0$ とすると，(32), (33) 式より

$$T(s) = [M_q(s) \mid 0][M_p(s) \mid \beta(s)]^{-1} \tag{41}$$

これは(37)式よりプロパーである。

例２　(27—a) 式に対し出力方程式が

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{42}$$

で，やはり $x_2(t)$ を推定するなら

$$T_1(s) = \begin{bmatrix} s(1-s) \\ 1-s \end{bmatrix} / (s^3+3s^2+3s+1) \tag{43}$$

より

$$Q_1(s)\,\tilde{P}_2(s)\,G_{RQ}^{-1}(s) = Q_1(s) = \begin{bmatrix} s(1-s) \\ 1-s \end{bmatrix} \tag{44}$$

結局，$G_R(s) = 1-s$ で $T(s)$ は固定極 $+1$ を持ち安定な状態定器は存在しない。

5．低　次　元　化

前章の結果に従えば安定な状態推定器が存在しても，その次元は $\partial[|\tilde{M}(s)|] + (p-m)(\mu-1)$ となり結構高次元になる。また，p が大きい，つまり系の出力数が多いほど状態推定器の次元が高くなり直感的に不合理な点も存在する。

本章ではこれらの点を改善し，状態推定器の低次元化を行なう。

補助定理１　$\partial_c[\beta(s)] \geq \partial_c[\gamma(s)]$ であれば $\gamma(s)$ を $q\times(p-m)$ の任意の多項式行列としても定理３は成立する。

証明　明らかであるので省略する。

補助定理２　$\sigma > \rho$ なる $\sigma\times\rho$ 行列 $H(s)$ の各列は列空間の次数最小基底であるとする。$\sigma\times 1$ 行列 $h(s)$ を結合した $\sigma\times(\rho+1)$ 行列 $[H(s) \mid h(s)]$ の列空間の次数最小基底を $\bar{H}(s)$ とする。$h(s)$ を適当に選ぶことによって $\bar{H}(s)$ の各列の次数の和を $H(s)$ のそれより１次だけ下げることができる。

証明　$h(s)$ を次のように仮定する

$$h(s) = h_\varepsilon s^\varepsilon + h_{\varepsilon-1}s^{\varepsilon-1} + \cdots\cdots + h_1 s + h_0 \tag{45}$$

ただし ε は任意の正の整数。$h_i; i=0\sim\varepsilon$ は $\sigma\times 1$ の未定定数行列。いま適当な相異なる実数 $\lambda_i; i=1\sim\varepsilon+1$ を $H(s)$，$h(s)$ に代入する。$H(\lambda_i); i=1\sim\varepsilon+1$ は定数行列になるが $H(\lambda_i)$ $; i=1\sim\varepsilon+1$ の各列に適当な実数を掛けて算し合わせた結果を $h(\lambda_i); i=1\sim\varepsilon+1$ と等値すると，$h_i; i=0\sim\varepsilon$ に関する連立１次方程式ができ一意的に解くことができる。この $h_i; i=0\sim\varepsilon$ を用いると $[H(s) \mid h(s)]$ の最大共通右因子の行列式は $\varepsilon+1$ 個の根 $\lambda_i; i=1\sim\varepsilon+1$ を持つ。したがって $\bar{H}(s)$ の各列の次数の和は $[H(s) \mid h(s)]$ の各列の次数の和から $\varepsilon+1$ 次だけ低下

され，結局 $H(s)$ と比べると1次だけ低下される。

注4 証明の ε は任意で $\varepsilon=0$，つまり $h(s)=h$ なる $\sigma\times 1$ の定数行列としても当然成り立つ。

定理4 定理3の条件の下で固定極以外の極を任意に指定できるプロパーな伝達関数行例 $T(s)$を持つ状態推定器は $\partial[|\tilde{M}(s)|]-(p-m)$ 次元で実現することができる。

証明 (33)式において $\gamma(s)$ は補助定理1を満たすとする。また，

$$V(s)=\left[\begin{array}{c:c:c} M_p(s) & \beta_1 & \beta_2(s) \\ \hdashline M_q(s) & \gamma_1 & \gamma_2(s) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} V_p(s) \\ \hdashline V_q(s) \end{array}\right] \tag{46}$$

とする。ただし，β_1，γ_1 はそれぞれ $p\times(p-m-1)$，$q\times(p-m-1)$ の未定定数行列である。$\beta_2(s)$，$\gamma_2(s)$ はそれぞれ $\partial_c[\beta_2(s)]=\partial_c[\gamma_2(s)]=\bar{\mu}-1$ を満足する $p\times 1$，$q\times 1$ の未定の多項式行列であるとする。$\bar{\mu}$は後で明らかにされる。定理は次のアルゴリズムに従って証明される。

1) 固定極を含む $\partial[|\tilde{M}(s)|]-(p-m)$ 個の状態推定器の希望の極を決める。

2) $\left[\begin{array}{c} M_p(s) \\ \hdashline M_q(s) \end{array}\right]$ の列空間の次数最小基底における各列の次数の和は $\partial[|\tilde{M}(s)|]$ であるから，補助定理2により

$$\left[\begin{array}{c:c} M_p(s) & \beta_1 \\ \hdashline M_q(s) & \gamma_1 \end{array}\right] \tag{47}$$

の列空間の次数最小基底における各列の次数の和が $\partial[|\tilde{M}(s)|]-(p-m-1)$ となるようにβ_1，γ_1 を求める。その β_1，γ_1 の下での(47)式の列空間の次数最小基底を新たに

$$\left[\begin{array}{c} \hat{M}_p(s) \\ \hdashline \hat{M}_q(s) \end{array}\right] \tag{48}$$

とする。

3)
$$\left[\begin{array}{c:c} \hat{M}_p(s) & \beta_2(s) \\ \hdashline \hat{M}_q(s) & \gamma_2(s) \end{array}\right] \tag{49}$$

において $\bar{\mu}=\max_j \partial_{cj}[\hat{M}_p(s)]$，$\partial_c[\beta_2(s)]=\bar{\mu}-1$ とすると

$$|\hat{M}_p(s) \,\vdots\, \beta_2(s)|=0 \tag{50}$$

の根は最大

$$\begin{aligned} &\partial[|\tilde{M}(s)|]-(p-m-1)+(\bar{\mu}-1) \\ &=\partial[|\tilde{M}(s)|]-(p-m)+\bar{\mu} \end{aligned} \tag{51}$$

個存在する。1) で与えられた $\partial[|\tilde{M}(s)|]-(p-m)$ 個の希望の根（極）以外に $\bar{\mu}$ 個の根を適当に定め，それらを $\lambda_i; i=1\sim\bar{\mu}$ とする。ただし議論の簡単のため，λ_i; $i=1\sim\bar{\mu}$ は 1) の根と重複せずかつ互に相異なるように決める。以上の全 $\partial[|\tilde{M}(s)|]-(p-m)+\bar{\mu}$ 個の根を実現する $\beta_2(s)$ は定理3の証明の方法で求められる。つまり，$\Gamma_c[\hat{M}_p(s)]$ から $p-1$ 本の1次独立な行を抜出し，それらに対応する $\hat{M}_p(s)$の部分を定理3の証明の $M_{pm}(s)$，他の1行を $M_{p,p-m}(s)$ に

対応させ，以下証明と同様の手続きで上記の要求を満足する $\beta_2(s)$ が求められる。

4)　(49)式の s に $\lambda_i\,;\,i=1\sim\bar{\mu}$ を代入すると

$$\mathrm{rank}\,[\widehat{M}_p(\lambda_i) \mid \beta_2(\lambda_i)] = p-1\,;\,i=1\sim\mu \tag{52}$$

であるから適当な $\delta_j^i\,;\,j=1\sim p$ に対して

$$\sum_{j=1}^{p-1}\delta_j^i\widehat{M}_{pj}(\lambda_j)+\delta_p^i\beta_2(\lambda_i)=0\ \ ;\ i=1\sim\bar{\mu} \tag{53}$$

とできる。ただし，$\widehat{M}_{pj}(\lambda_i)$ は $\widehat{M}_p(\lambda_i)$ の第 j 列を意味する。したがって，$\gamma_2(s)$ を

$$\gamma_2(s)=\gamma_{2,\,\bar{\mu}-1}\,s^{\bar{\mu}-1}+\gamma_{2,\,\bar{\mu}-2}\,s^{\bar{\mu}-2}+\cdots\cdots+\gamma_{2,0} \tag{54}$$

また，$\widehat{M}_q(s)$ の第 j 列を $\widehat{M}_{qj}(s)$ とすると

$$\sum_{j=1}^{p-1}\delta_j^i\widehat{M}_{qj}(\lambda_i)+\delta_p^i\gamma_2(\lambda_i)=0\ \ ;\ \ i=1\sim\bar{\mu} \tag{55}$$

から $\gamma_2(s)$ の各係数を求めることにより(49)式の最大共通右因子の行列式の次数を $\bar{\mu}$ とでき，その根は $\lambda_i\ ;\ i=1\sim\bar{\mu}$ である。(49)式の列空間の次数最小基底を

$$\begin{bmatrix}\tilde{V}_p(s)\\ \hdashline \tilde{V}_q(s)\end{bmatrix} \tag{56}$$

とすると各列の次数の和は $\partial[|\tilde{M}(s)|]-(p-m)$ となる。また，$\det\Gamma_c[\tilde{V}_p(s)]\neq 0$ である。

5)　$$T(s)=\tilde{V}_q(s)\,\tilde{V}_p^{-1}(s)\ (=V_q(s)\ V_p^{-1}(s)) \tag{57}$$

によって状態推定器を求めると，$T(s)$ は $\partial_c[|\tilde{M}(s)|]-(p-m)$ 次元でプロパー，かつ1)での希望極を有する。

以上が定理の証明であるが，2)において次のことに留意する必要がある。つまり，β_1，γ_1 の特殊な選び方によっては

$$\Gamma_c\left\{\begin{bmatrix}\widehat{M}_p(s)\\ \hdashline \widehat{M}_q(s)\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}\widehat{M}_{p\gamma}\\ \hdashline \widehat{M}_{q\gamma}\end{bmatrix} \tag{58}$$

における $\widehat{M}_{p\gamma}$ の階数が $p-1$ より小さくなりプロパーな状態推定器が保証されなくなる場合が生じる。このような場合は一般に少ないが，これを避けるためには β_1,γ_1 が1列ならこの事態を簡単に避けられることを利用し，β_1,γ_1 を各ステップでこのような事態が生じないように1列ごとに順に選ぶことで簡単に解決される。

例3　（アルゴリズムを説明する例題）次の系の $x_2(t)$ を推定する場合を考察する。

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-2&-7&-9&-6\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u(t) \tag{59-a}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{59-b}$$

伝達関数行列は

$$T_1(s)=\begin{bmatrix} s^2(1-s) \\ s(1+s^2) \\ 1 \end{bmatrix} /(s^4+6s^3+9s^2+7s+2) \tag{60}$$

$$T_2(s)=s/(s^4+6s^3+9s^2+7s+2) \tag{61}$$

したがって

$$\begin{bmatrix} M_p(s) \\ \hdashline M_q(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^2(1-s) \\ s(1+s^2) \\ 1 \\ \hdashline s \end{bmatrix} \tag{62}$$

この場合(62)式より $\partial\{|\tilde{M}(s)|\}=3$，また $m=1$，$p=3$，$\mu=3$ であるので文献5に従えば7次元の状態推定器を必要とするが，本方法では1次元の状態推定器で $x_2(t)$ を推定することができる。アリゴリズムに従って状態態推定器を導出する。

1)　希望の極を－5とする。

2)　(47)，(62)式より

$$\left[\begin{array}{c:c} \hat{M}_p(s) & \beta_1 \\ \hdashline M_q(s) & \gamma_1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c} s^2(1-s) & \\ s(1+s^2) & \beta_1 \\ 1 & \\ \hdashline s & \gamma_1 \end{array}\right] \tag{63}$$

$s=0$ のとき(63)式の階数が1となるようにすると，$\beta_1^T=[\ 0 \quad 0 \quad 1\ ]$，$\gamma_1=0$ となる。この場合の次元最小基底は

$$\begin{bmatrix} M_p(s) \\ \hdashline \hat{M}_q(s) \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c} s(1-s) & 0 \\ 1+s^2 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 \end{array}\right] \tag{64}$$

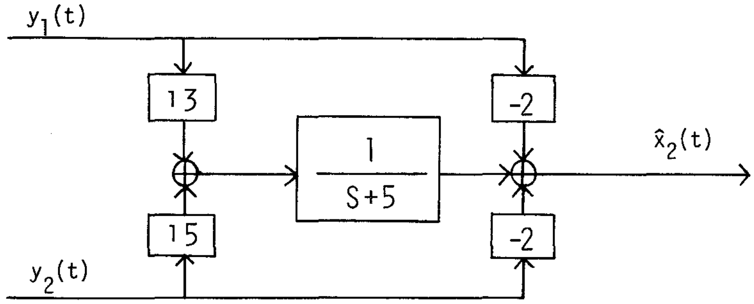
3)　$\bar{\mu}=2$より $\partial_c[\beta_2(s)]=\bar{\mu}-1=1$。したがって，(50)式に対応する式の根は3個存在する。それらを1)での－5，および，仮に $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$ とする。簡単な計算によって，これらを実現する $\beta_2(s)$ は $\beta_2^T(s)=[\ 0 \quad s+5 \quad 0\ ]$ と求められる。

4)　直ちに $\gamma_2(s)=-2s+5$ が求められ，(56)式は次のようになる。

$$\left[\begin{array}{c} \tilde{V}_p(s) \\ \hdashline \tilde{V}_q(s) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 15 & 0 & 0 \\ -13 & 0 & s+5 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline -4 & 0 & -2s+5 \end{array}\right] \tag{65}$$

5) 状態推定器 $T(s)$ は

$$T(s) = \left[\; -2+\frac{13}{s+5} \quad -2+\frac{15}{s+5} \quad 0 \;\right] \tag{66}$$



図－2 状態推定器 T (s)

6．構成に関する補足

定理4で求められる状態推定器は必ずしも最低次元のものではなく，より低次元のものが存在する場合がある。

$$M_{pl}(s) = L\,M_p(s) \tag{67}$$

を考える。ここで L は $p'\times p$ 定数行列で，p' は $p>p'>m$ なる適当な整数である。いま L を適当に選び

$$\mathrm{rank}\,\Gamma_c[M_{pl}(s)] = m \tag{68}$$

$$\partial_c[M_{pl}(s)] \geq \partial_c[M_q(s)] \tag{69}$$

かつ，

($M_p(s)$ の各列の次数の和)－($M_{pl}(s)$ の各列の次数の和) $<$ $p-p'$ (70)

とできるなら，(67)式を $M_p(s)$ のかわりに用い前章の結果を適用すれば定理4の場合よりさらに状態推定器の次元を(70)式の（右辺－左辺）次元だけ低下できる。

また，系の出力のみを用いて状態推定器を構成できない場合，系の入力も用いなければならないが，状態を再現するのに必要とされる入力を見出した後状態推定器を構成するためにここでの結果を適用することができる。

7. あとがき

本論文ではまず第一に未知入力状態推定器の構成問題とモデル適合問題との双対性を利用し状態推定器 $T(s)$ の存在にについて述べた。また安定な状態推定器とその低次元化について論じた。文献5の方法では $p-m$ 個の列を $M(s)$ に付加する際，付加列全部を用い任意極配置を得ているが，本論文では列の付加によりできるだけ高次の行列式をもつ最大共通右因子を発生させ次元の低下を図ると共に，付加列の中の1列のみを用い任意極配置を実現した。したがって，極配置のためにそれ以上の列を用いるなら極配置問題に対し提案されたように[10~12] 極配置以外の特性も同時に考慮する方法の導出が望まれる。

なお，上記の次元低下の操作は見方を変えればH. H. ローゼンブロックによって導入された出力分離零[13] を発生させていることにも対応している。

本論文の結果をモデル適合問題に適用し，さらに発展させることが可能である[14]。

参考文献

1) Wang, S. −H. and Davison, E. J. : IEEE Trans. Automat. Contr. **AC−23**− 3, 481 (1978)
2) Bhattacharyya, S. P. : IEEE Trans. Automat. Contr. **AC−23**− 3, 483 (1978)
3) 高橋，美多：第7回制御理論シンポジウム資料 279 (1978)
4) Wolovich, W. A. Linear Multivariable Systems (Springer, 1974)
5) Wolovich, W. A. , et. al. : IEEE Trans. Automat. Contr. **AC−22**− 1, 88 (1977)
6) Forney, G. D. : SIAM J. Control **13**− 3, 493 (1975)
7) Kung, S. , et. al. : Proc. 4th IFAC International Symp., 97 (1977)
8) Sain, M. K. : Proc. 6th IFAC World Congr. Session 9 (1975)
9) 古田，佐野：基礎システム理論, 132 (コロナ社, 1978)
10) 疋田，ほか2名：計測自動制御学会論文集 **11**− 5, 556 (1975)
11) 疋田，池田：日本機械学会論文集 **43**−370, 2151 (1977)
12) 疋田弘光：計測自動制御学会論文集 **13**− 3, 243 (1977)
13) Rosenbrock, H. H. : State Space and Multivariable Theory, 64 (Nelson, 1970)
14) 疋田弘光：第8回制御理論シンポジウム資料, 31 (1979)