二層同心円柱を伝播する弾性波の位相速度

二層同心円柱を伝播する弾性波の位相速度

その他（別言語等）のタイトル	PROPAGATION OF ELASTIC WAVE IN TWO LAYERED CONCENTRIC CYLINDER HAVING DIFFERENT ELASTIC CONSTANTS
著者	松岡　健一，岸　徳光，菅田　紀之，能町　純雄
雑誌名	室蘭工業大学研究報告．理工編
巻	37
ページ	149-162
発行年	1987-11-10
URL	http://hdl.handle.net/10258/728

二層同心円柱を伝幡する弾性波の位相速度

PROPAGATION OF ELASTIC WAVE IN TWO LAYERED CONCENTRIC CYLINDER HAVING DIFFERENT ELASTIC CONSTANTS

松岡健一・岸　徳光・菅田紀之・能町純雄

By Kenichi MATSUOKA, Norimitsu KISHI, Noriyuki SUGATA and Sumio NOMACHI

Abstract

Propagations of axial, flexural and torsinal stress waves in a two concentrically layered cylinder; an inner solid an outer annular cylinders of different elastic moduli each other, is investigated as an eigen value problem of the coefficients matrices of boundary conditions which are derived from the solution of dynamic equations of cylindrical coordinates by means of Hankel transforms.

The discussions are around the variations of wave velocity with the chage of ratio between wave length and the diameter of the outer cylinder, and the wave modes for various wave length. The numerical calculations are performed for several ratio of the diameter of the cylinders, and elastic moduri for solid and cylinder.

1．まえがき

異質な材料から構成される複合材としては，積層複合材と繊維強化複合材が考えられるが，これらの複合部材は単一材料のものとは異なる力学的挙動を示す。特に波動伝播問題でその差異が大きく工学的に興味のある問題であり，種々研究されている。[1)-5)]著者の一人も大島らとともに，有限プリズム要素を用いて，矩形断面や円筒形断面の複合材の波動伝播問題を種々解析している。[6)-9)]

積層複合材の基本的なものの一種として，同心円状におかれた，異質な材料からなる，多層同心円柱があるが，これらは鋼管構造物などの理想化されたモデルとみることができ，三次元弾性論で厳密に解析することができる。

著者らは，これまで円柱座標で与えられる，波動伝播問題を種々解析して来たが，[10)-13)]本論文はこれを，弾性定数の異なる円柱と厚肉円筒が同心円状におかれた，二層同心円柱の問題に応用し，積層複合材の波動伝播特性を考察したものである。

解析は，円柱および円筒の波動伝播の基礎変位式を境界の条件を満足するように組合せて行なうもので，縦波動，曲げ波動およびねじり波動の位相速度分散曲線と，波動モードを，円柱と円筒の外径比および，弾性定数比を変化させて求め検討を行なった。

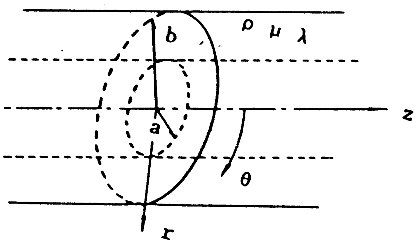
本論文の一部はすでに発表しているが，[14)-15)]本論文はこれらをまとめたものである。

2．基礎変位式

Hankel 変換を用いた円柱座標に関する波動伝播問題の変位解は，すでに求めているので，[10),11)]ここではその求め方の概要を述べ，結果のみを示すこととする。

2.1　縦波動および曲げ波動に対して

図—1のように，円柱軸をz軸とする（r，θ，z）座標系を考え，波動はz軸方向に進行する定常波動伝播を仮定し，波動の角速度をω，伝播速度をVとし，周方向の波動次数をmとすれば，円柱座標で表わされる波動方程式を半径方向にHankel 変換することにより，円筒の各変位成分（u，v，w）は次のように求められる。



図—1　円柱座標

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos m\theta & \cos m\theta & 0 \\ \sin m\theta & -\sin m\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos m\theta \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{A}_{mr} \\ \tilde{B}_{mr} \\ \tilde{W}_{mr} \end{Bmatrix} \exp\,[iw(t-z/V)] \tag{1}$$

$$\{\tilde{A}_{mr}\ \tilde{B}_{mr}\ \tilde{W}_{mr}\}^T = \sum_{k=1}^{2} K_{mk}\{F_{Amk}\ F_{Bmk}\ F_{Cmk}\ E_{mk}\}^T \tag{2}$$

$$\begin{aligned} F_{Amk} &= \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} - iNE_{mk}/2 \\ F_{Bmk} &= \alpha_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} + (m-1)B_{mk} + iNE_{mk}/2 \\ F_{Cmk} &= \beta_{mk}/2\mu + (m+1)A_{mk} - (m-1)B_{mk} + iNE_{mk} \end{aligned} \tag{3}$$

$$K_{mk} = \begin{vmatrix} \chi^{(k)}_{mp}(N_\mu r)/N_\mu & 0 & (\mu N^2/\rho\omega^2)\ \{\chi^{(k)}_{mp}(N_\mu r)/N_\mu - N_\alpha \chi^{(k)}_{mp}(N_\alpha r)/N^2\} & 0 \\ 0 & -\chi^{(k)}_{ms}(N_\mu r)/N_\mu & (\mu N^2/\rho\omega^2)\ \{\chi^{(k)}_{ms}(N_\mu r)/N_\mu - N_\alpha \chi^{(k)}_{ms}(N_\alpha r)/N^2\} & 0 \\ 0 & 0 & -i(2\mu N/\rho\omega^2)\ \{G^{(k)}_m(N_\alpha r) - G^{(k)}_m(N_\mu r)\} & G^{(k)}_m(N_\alpha r) \end{vmatrix} \tag{4}$$

ここで，$N=\omega/V$，$N_\mu^2=N^2-\rho\omega^2/\mu$，$N_\alpha^2=N^2-\rho\omega^2/(2\mu+\lambda)$，$\rho$：円筒の密度；$\mu$，$\lambda$：Lamé の弾性定数であり，$m$ は波動の円周方向のモードを示すもので，$m=0$のとき縦波動，$m=$

1のとき曲げ波動を表わす。また式中の関数G，χは，円筒の外半径をa_1，内半径を$a_0=a_2$とすると次のように表わされる。

$$G^{(k)}_{m}(Nr)=\frac{R^{(k)}_{mm}(Nr)}{R^{(k)}_{mm}(Na_k)} \qquad \chi^{(k)}_{mp}(Nr)=\frac{R^{(k)}_{m+1,m}(Nr)}{R^{(k)}_{mm}(Na_k)} \qquad \chi^{(k)}_{ms}(Nr)=\frac{R^{(k)}_{m-1,m}(Nr)}{R^{(k)}_{mm}(Na_k)} \tag{5}$$

$$R^{(k)}_{j,m}(Nr)=I_j(Nr)K_m(Na_{k-1})-(-1)^{j+m}I_m(Na_{k-1})K_j(Nr) \tag{6}$$

ただし，I，Kは変形第1種および第2種のBessel関数である。また式中の系数α，β，A，B，Eは円筒の内外面の変位および応力で与えられるもので次のように示される。

$$\alpha_{mk}=\tilde{\tau}_{r\theta m})_{r=a_k}, \quad \beta_{mk}=\tilde{\sigma}_{rm})_{r=a_k}, \quad A_{mk}=\tilde{A}_{mr})_{r=a_k}/a_k, \quad B_{mk}=\tilde{B}_{mr})_{r=a_k}/a_k,$$
$$F_{mk}=\tilde{W}_{mr})_{r=a_k}, \quad \tau_{r\theta}=\tilde{\tau}_{r\theta m}\sin m\theta\, exp[i\omega(t-z/V)], \quad \sigma_r=\tilde{\sigma}_{rm}\cos m\theta\, exp[i\omega(t-z/V)] \tag{7}$$

2.2　ねじり波動に対して

ねじり波動のみが伝播する場合は

$$u=w=\sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_z=\tau=\tau_{rz}=0 \tag{8}$$

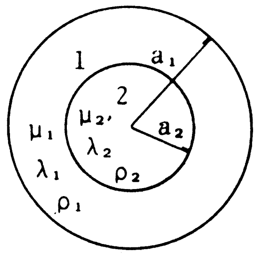
とおくことが出来る。ねじり波動の伝播速度をVとすれば，このとき残りの変位および応力成分は2.1と同様に

$$f=\tilde{f}\exp\{i\omega(t-z/V)\} \tag{9}$$

と表わせる。この時の波動方程式は

$$\partial\tau_{r\theta}/\partial r+2\tau_{r\theta}/r+\partial\tau_{\theta z}/\partial z=\rho\partial^2 v/\partial t^2 \tag{10}$$

であり，これの変位vおよび応力成分$\tau_{r\theta}$は円筒の場合に



図—2　二層同心円柱

$$\tilde{v}=C_1G^{(1)}(N_\mu r)+C_2G^{(2)}(N_\mu r) \tag{11}$$

$$\tilde{\tau}_{r\theta}=N_\mu\{C_1\chi^{(1)}_p(N_\mu r)+C_2\chi^{(2)}_p(N_\mu r)\} \tag{12}$$

ただし，

$$C_1=\tilde{v}_{r=a_1}, \quad C_2=\tilde{v}_{r=a_2}$$

$$G^{(k)}(Nr)=R^{(k)}_{11}(Nr)/R^{(k)}_{11}(Na_k), \quad \chi^{(k)}_p(Nr)=R^{(k)}_{12}(Nr)/R^{(k)}_{11}(Na_k) \tag{13}$$

$$R^{(k)}_{ij}(Nr)=I_j(Nr)\,K_1(Na_{k-1})+(-1)^j I_i(Na_{k-1})\,K_j(Nr) \tag{14}$$

ここで，I，K，k，j，a_0，a_1，a_2 は，2.1と同様である。

以上が円筒に対する変位式であるが，円柱の場合は，$a_2=0$ として $k=1$ の項のみを考慮することで与えられる。この場合，関数Rは次のようになる。

$$R_{j,m}^{(1)}(Nr)=I_j(Nr) \tag{15}$$

3．境界条件

二層同心円柱を伝わる弾性波の速度は，2．で求めた変位式を円筒と円柱の境界条件を満足するように導かれた境界条件式からなる固有値方程式の固有値問題として与えられる。いま円筒を表わすすべての量を添字1，円柱を表わすすべての量を添字2で示すものとする。

3.1　縦波動および曲げ波動に対して

2．で求めた解に対して，まず次の適合条件を満足しなければならない。

円筒に対して

$$\tilde{A}_{mr\cdot 1})_{r=a_k}=a_k\,A_{mk\cdot 1},\quad \tilde{B}_{mr\cdot 1})_{r=a_k}=a_k\,B_{mk\cdot 1} \tag{16}$$

円柱に対して

$$\tilde{A}_{mr\cdot 2})_{r=a_2}=a_2\,A_{m1\cdot 2},\quad \tilde{B}_{mr\cdot 2})_{r=a_2}=a_2\,B_{m1\cdot 2}, \tag{17}$$

さらに，円筒の内外面における境界条件を考えると，

i）円筒の外面で，

$$\tau_{r\theta\cdot 1})_{r=a_1}=0 \qquad \alpha_{m1\cdot 1}=0, \tag{18}$$

$$\sigma_{r\cdot 1})_{r=a_1}=0 \qquad \beta_{m1\cdot 1}=0, \tag{19}$$

$$\tau_{rz\cdot 1})_{r=a_1}=0 \tag{20}$$

ii）円筒の内面で，

円筒の内面は，円柱と接触しているので，接触面の条件によって異なる境界条件となるが，ここでは，接触面で変位が連続な場合を考えるものとする。

$$u_1)_{r=a_2}=u_2)_{r=a_2},\quad V_1)_{r=a_2}=V_2)_{r=a_2} \qquad A_{m2\cdot 1}=A_{m1\cdot 2},\quad B_{m2\cdot 1}=B_{m1\cdot 2}, \tag{21}$$

$$W_1)_{r=a_2}=W_2)_{r=a_2}, \qquad E_{m2\cdot 1}=E_{m1\cdot 2}, \tag{22}$$

$$\tau_{r\theta\cdot 1})_{r=a_2}=\tau_{r\theta\cdot 2})_{r=a_2} \qquad \alpha_{m2\cdot 1}=\alpha_{m1\cdot 2}, \tag{23}$$

$$\sigma_{r\cdot 1})_{r=a_2}=\sigma_{r\cdot 2})_{r=a_2}, \qquad \beta_{m2\cdot 1}=\beta_{m1\cdot 2}, \tag{24}$$

$$\tau_{rz\cdot 1})_{r=a_2}=\tau_{rz\cdot 2})_{r=a_2} \tag{25}$$

従って，二層同心円柱を伝わる縦波動および曲げ波動の位相速度は，式(16)，(17)，(20)，(25)で与えられる固有値方程式の根として求めることができる。

3.2　ねじり波動に対して

このときの境界条件は

i ）円筒と円柱の境界 $r=a_2$ で

$$\tilde{v}_{1r=a_2}=\tilde{v}_{2r=a_2}, \quad C_{2\cdot l}=C_{1\cdot 2} \tag{26}$$

$$\tilde{\tau}_{r\theta 1})_{r=a_2}=\tilde{\tau}_{r\theta 2})_{r=a_2} \tag{27}$$

ii ）円筒の外周 $r=a_1$ で

$$\tau_{r\theta 1})_{r=a_1}=0 \tag{28}$$

二層円柱を伝播するねじり波動の位相速度は，境界条件式(27)，(28)式の係数からなる固有値行列式の根として求められる。

4．数値解析および考察

数値解析は，縦波動（$m=0$），曲げ波動（$m=1$）およびねじり波動に対して行ない，円筒と円柱の弾性係数，ポアソン比をそれぞれ E_1，ν_1・E_2，ν_2 として次の２つの場合について行った。

i ）$E_1<E_2$ の場合（Case Ⅰ）

このとき，円柱の方が円筒より大きな弾性係数をもつ場合であるがこのとき用いた数値は，

$\nu_1=1/6$，$\nu_2=0.3$，$E_2/E_1=7.0$，$\rho_2/\rho_1=3.2$，$a_2/a_1=0.0$，0.25，0.5，0.9，1.0

ii ）$E_2<E_1$ の場合（Case Ⅱ）

このとき，円筒の方が円柱より大きな弾性係数をもつ場合であるが，このとき用いた数値は，

$\nu_1=0.3$，$\nu_2=1/6$，$E_1/E_2=7.0$，$\rho_1/\rho_2=3.2$，$a_2/a_1=0.0$，0.25，0.5，0.9，1.0

である。$a_2/a_1=0.0$ は１のみ円柱であり，$a_2/a_1=1.0$ は２のみ円柱である。

位相速度は，３．で示した固有値方程式の固有値として与えられるが，この場合固有値は方程式の中に陰な型で含まれるため，反復法により求める必要があり，５桁以上の精度を有するよう

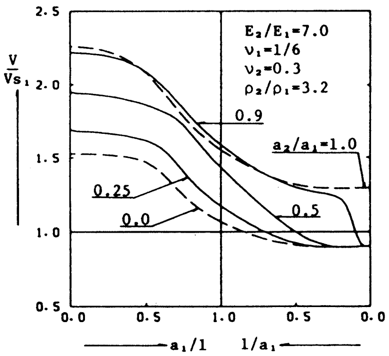
に求めた。

計算結果の一部を図に示すが，位相速度は，図で縦軸に位相速度と小さい方のせん断波速度の比を，横軸には波動の半波長を l として，左半分に a_1/l を，右半分に l/a_1 をとり，全体として波長零から無限大までを示すようにしている。

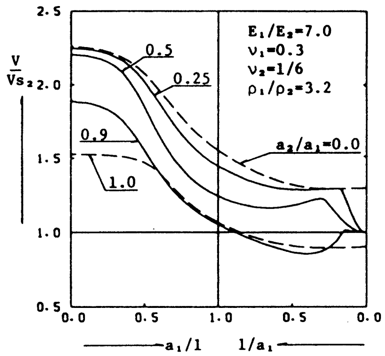
1） 縦波動について

図―3～6に縦波動の位相速度分散曲線を示した。図―3はCase Ⅰの一次の分散曲線を示したが，二層円柱は，おおむね二種類の円柱だけの位相速度の中間値をとるが，円柱の径が大きい時（$a_2/a_1=0.9$），$0.5<a_1/l<1.4$ の範囲で円柱だけの場合より大きな値を示している。波長無限大では $a_2/a_1=0.25$，0.5，0.9 に対して V/V_{S1} の値はそれぞれ1.681，1.942，2.220となるが，これは二層円柱を体積に応じた換算材料定数をもつ円柱としたときの bar velocity 1.679，1.940，2.217とほぼ一致している。また，波長零では円筒体（弾性波速度の小さい方）の Rayleigh 波の速度に一致している。

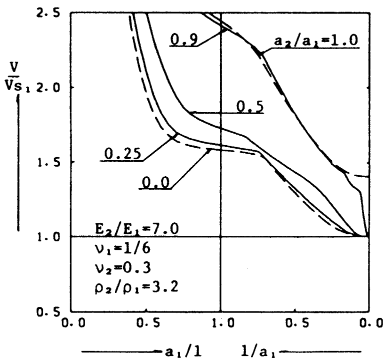
図―4には，Case Ⅱについて同様一次の分散曲線を示したが，Case Ⅰと同様，二層円柱は一部の値について2つの円柱のみの位相速度の間の値をとらないことがある（$a_2/a_1=0.9$で0.6



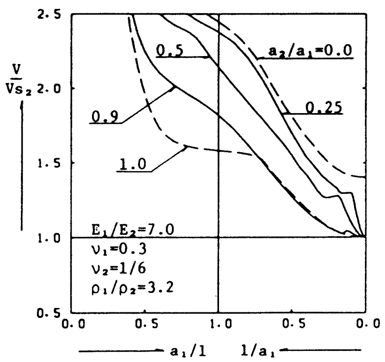
図―3　一次の縦波動の位相速度分散曲線（Case Ⅰ）



図―4　一次の縦波動の位相速度分散曲線（Case Ⅱ）

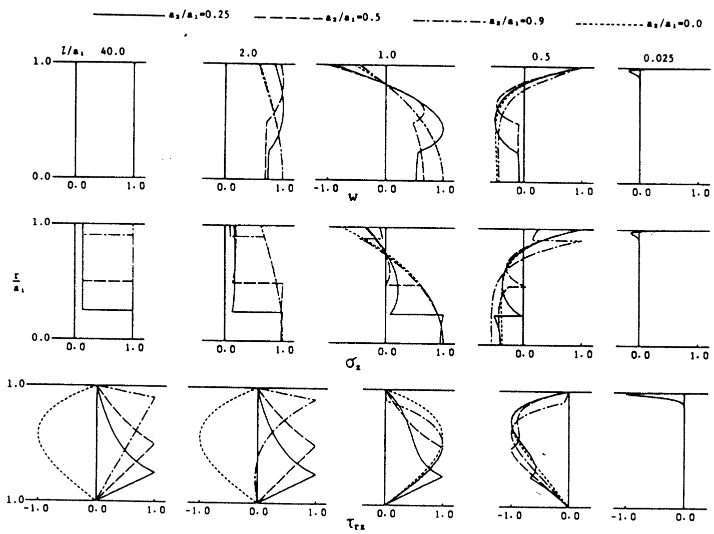


図―5　二次の縦波動の位相速度分散曲線（Case Ⅰ）

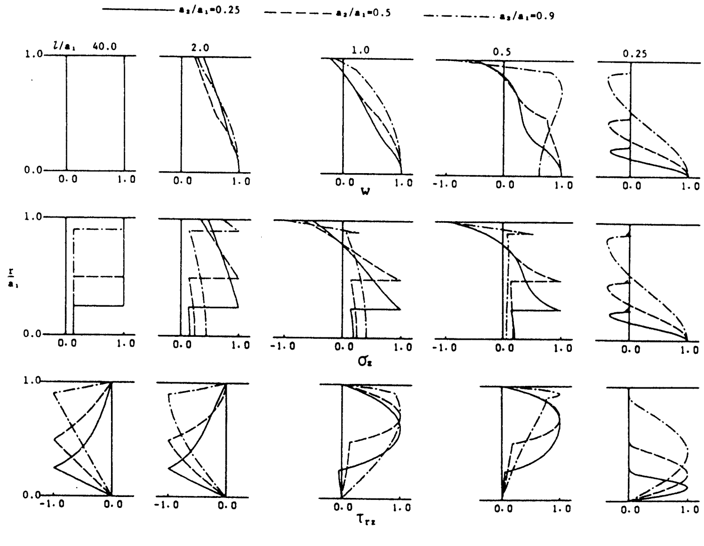


図―6　二次の縦波動の位相速度分散曲線（Case Ⅱ）

$<a_1/<5$ 付近）が，その他は間の値をとる。また，波長無限大では V/V_{s2} の値は，$a_2/a_1 = 0.9,\ 0.5,\ 0.25$ に対してそれぞれ，2.250，2.205，1.884となるが，これも Case Ⅰと同様に換算断面の bar velocity 2.247，2.201，1.877とほぼ一致している。しかし波長零ではこの場合は円柱（弾性波速度の小さい方）のせん断波の速度と一致している。図—5，6は，Case ⅠおよびⅡの二次の位相速度の分散曲線を同じように示したものである。いずれの場合も一次のものと同様一部で二つの円柱の中間的な値をとらないことがあるものの全体としてはほぼ間の値をとっており，波長無限大では無限大，波長零では小さい方のせん断波速度に一致している。



図—7　一次の縦波動モード（Case Ⅰ）



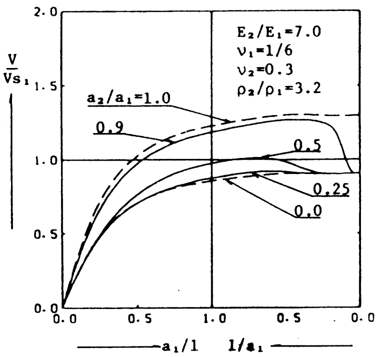
図—8　一次の縦波動モード（Case Ⅱ）

図—7，8には，縦波動の波動モードを w，σ_z，τ_{rz} について，若干の波長に対して示した。Case Ⅰ（図—7），Case Ⅱ（図—8）いずれの場合も波長無限大では，全断面一様に変位し，平面保持が満足されている。波長が短くなるに従い平面保持はくずれ，Case Ⅰでは，表面に変位

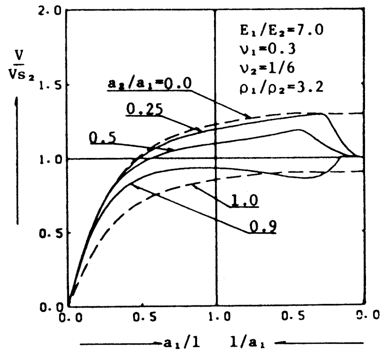
が集中し，また応力も表面に集中し，表面波の様相を呈してくる。しかし，Case Ⅱでは表面よりむしろ内部に集中し，波動は軟い部分を伝播するようである。応力の波動モードは，σ_z はいずれの場合も波長の長いところでは，弾性定数の大きな部分で大きく，波長が短くなるに従って円筒部が曲げを受けるように挙動し，さらに短くなると，弾性定数の小さな部分に集中してくる。τ_{rz} は，波長の長い時境界面に集中し，波長 $l/a_1=0.5$ 位までは，Case Ⅰ，Case Ⅱとも同じように挙動し，波長が短くなるに従い，軟い部分に集中している。

2）　曲げ波動について

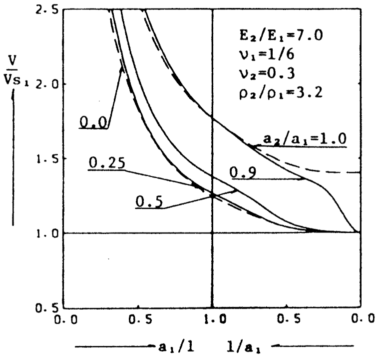
図―9～12に，位相速度の分散曲線を示した。図―9，10は一次の分散曲線を示しているが，曲げ波動は波長無限大で零となるからCase Ⅰ，Ⅱともそれ程ときな差はないが，波長零では縦波動と同じようにCase ⅠのときRaylegh波の速度となり，Case Ⅱのとき円柱部のせん断波速度になる。



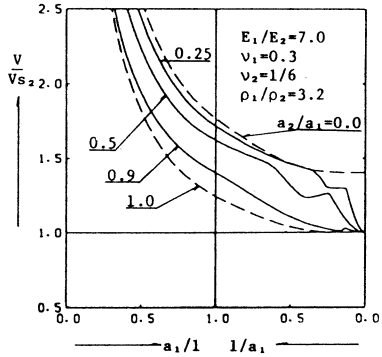
図―9　一次の曲げ波動の位相速度分散曲線（Case Ⅰ）



図―10　一次の曲げ波動の位相速度分散曲線（Case Ⅱ）



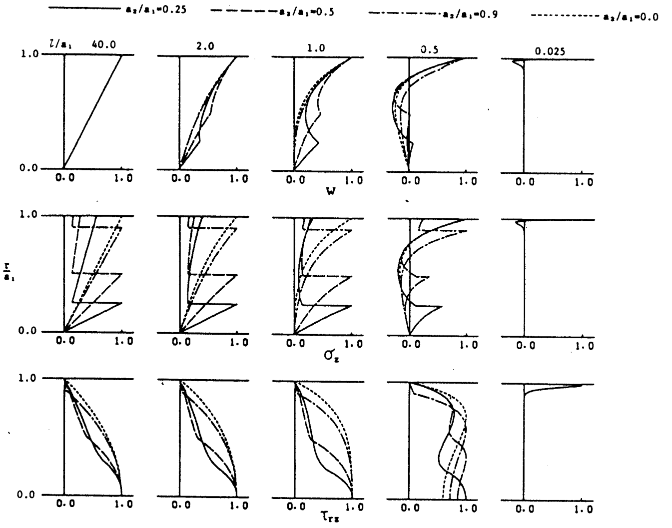
図―11　二次の曲げ波動の位相速度分散曲線（Case Ⅰ）



図―12　二次の曲げ波動の位相速度分散曲線（Case Ⅱ）

二次の分散曲線は，図—11～12に示したが，縦波動と同様，波長無限大では，無限大，波長零では軟い方のせん断波速度となっている。また中間の波長に対しては，一般に縦波動より小さな値となっている。

図—13は，Case Ⅰの波動モードであるが，波長が長いときは縦波動と同様，均一断面のように平面保持を満足する変位および応力の分布となり，波長が短くなるに従い，複雑な変位および応力の分布を示しつつ円筒部の表面に集中する表面波の様相を呈するようになっている。



図—13　一次の曲げ波動モード（Case Ⅰ）

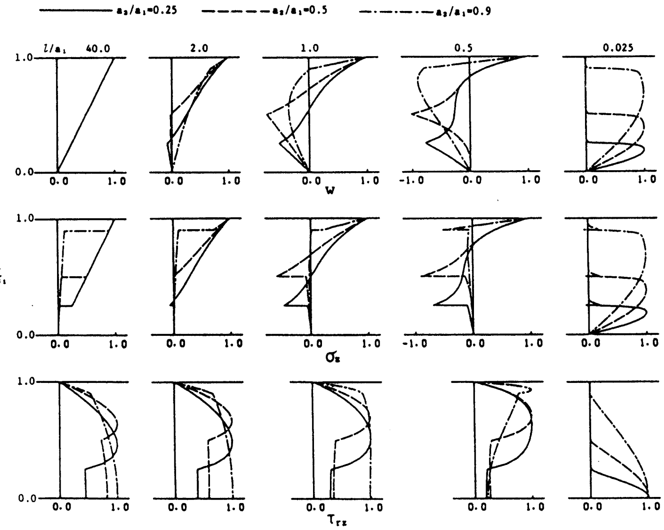
Case Ⅱの曲げ波動モードは，図—14に示した。この場合もCase Ⅰ同様，波長の長いところ（l/a_1 >40）では，平面保持を満足する変位や応力の分布となっているが，波長が短くなるに従い，円筒部と円柱部の境界に変位が集中する様になり（l/a_1=1.0および0.5），しかも表面とは逆の変位となっている。これは積層板でも現われる現象であるが，円筒部と円柱部が別々に曲げを受けている様に変位している。従って応力σ_zも同様に分布し，円筒部で大きな曲げ応力となっている。せん断応力τ_{rz}も円筒部で大きな値を示している。さらに波長が短くなると，変位と曲げ応力は円筒と円柱の境界付近の円柱部で最大となる分布を示し，せん断応力は円柱部中心で最大となり，やはり波動は軟い部分を伝播するようになる。波長の短い範囲（l/a_1=0.4～0.1）の波動モードの移り変りをもう少し詳しく求めたものを図—15に示した。これによれば，半径比a_2/a_1の相違によってかなり異ったモード分布を示していることがわかる。半径比a_2/a_1=0.9では，波長l/a_1=0.2まで円筒部の曲げが大きく，半径比a_2/a_1=0.5では比較的長い波長l/a_1=0.4から円柱部へ集中している。

3）　ねじり波動について

図—16は，Case Ⅰの一次の位相速度を示したものであるが，波長無限大では断面ねじりモーメントに応じた換算材料定数をもつ円柱としたときのせん断波の速度と一致し，波長零では，弾性定数の小さな方のせん断波の速度に一致している。a_1/l<1.0の範囲では，あまり変化がなく，波長無限大の値に近い。波長が零に近づくにつれて，半径比a_2/a_1が小さくなるにしたがってせ

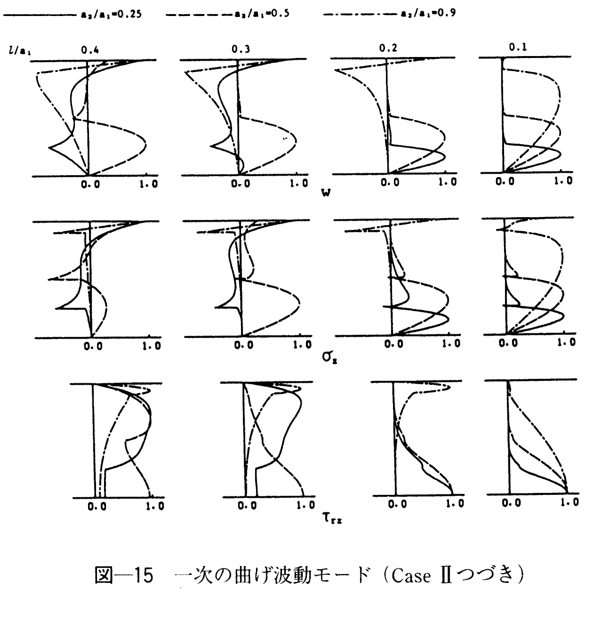
ん断波速度は，急激に減少し弾性定数の小さな方のせん断波速度に収束している。しかし，いずれの半径比でも，二層同心円柱は，それぞれ単独の円柱の場合の中間的な値をとっている。

図—18には，Case Ⅰの二次の位相速度を示した。二次の位相速度は，一次の位相速度とは異なり，単独の円柱の場合の中間的な値をとらず，はずれる場合があるが，波長無限大では，位相速度も無限大となり，波長零ではやはり弾性定数の小はな方のせん断波速度に一致している。



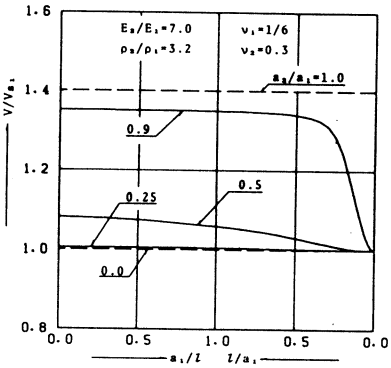
図—14　一次の曲げ波動モード（Case Ⅱ）

図—17，19は，Case Ⅱについて同様のものを示したものであるが，Case Ⅰと同様，一次の場合は，波長無限大で換算材料定数をもつ円柱のせん断波速度と一致し，波長零ではやはり，弾性定数の小さな方のせん断波速度に一致している。二次の位相速度も，Case Ⅰとほぼ同様である。

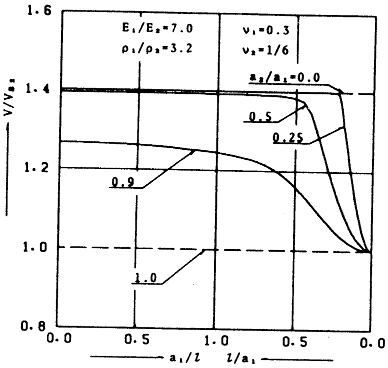


図—15　一次の曲げ波動モード（Case Ⅱつづき）

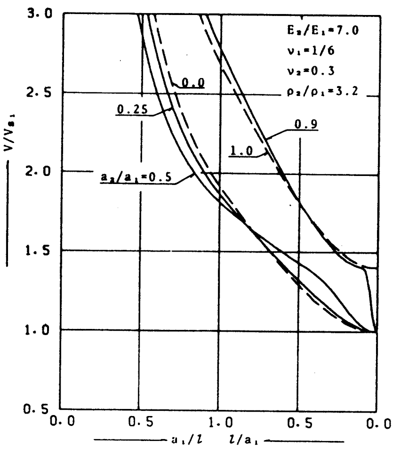
図—20, 21に波動モードを示したが，Case Ⅰ（図—20）では波長無限大での平面保持から波長が短くなるにつれて変位vと応力$\tau_{\theta z}$は円筒部のみに集中し，応力$\tau_{r\theta}$は円筒と円柱の境界部へ集中するが，縦波動や曲げ波動のような表面への集中はみられない。またCase Ⅱ（図—21）では，波長無限大ではCase Ⅰと同様，平面保持を示すが，波長が短くなるに従い変位，応力とも円柱部に集中するようになる。



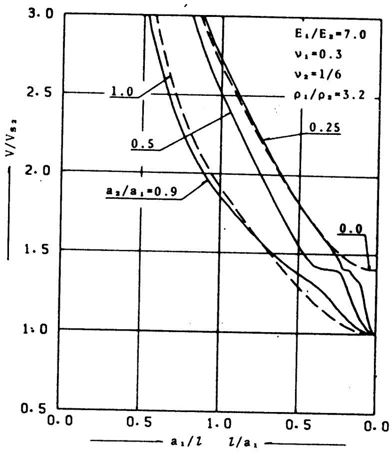
図―16 一次のねじり波動の位相速度分散曲線（Case Ⅰ）



図―17 一次のねじり波動の位相速度分散曲線（Case Ⅱ）



図―18 二次のねじり波動の位相速度分散曲線（Case Ⅰ）



図―19 二次のねじり波動の位相速度分散曲線（Case Ⅱ）

5．まとめ

二層同心円柱の波動伝播問題を縦波動と曲げ波動およびねじり波動について解析し，位相速度と波動モードを若干の数値に対して求め検討を加えた。用いた数値は，鉄筋コンクリートや鋼管コンクリートを想定しているが，この結果次のことが明らかとなった。

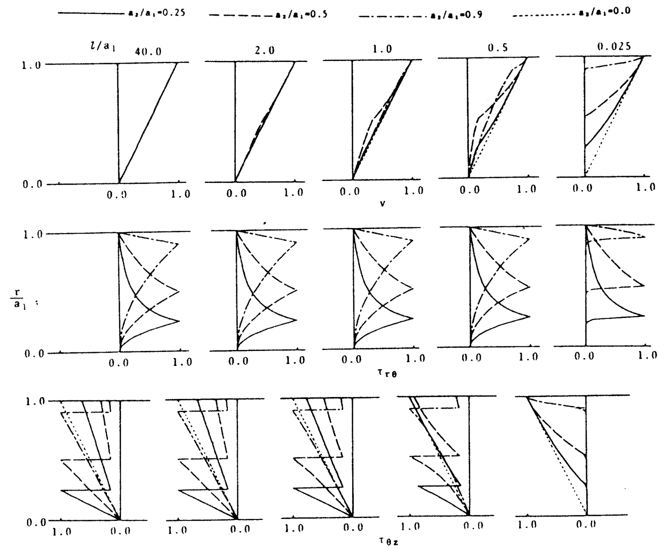
1） 縦波動の位相速度は波長が無限大に近づくに従い換算断面の bar velocity に近づき，波長が零に近づくに従い円筒が軟いもの（Case Ⅰ）は円筒部の材料の Rayleigh 波速度に近づき，円

柱部の軟いもの（Case Ⅱ）は円柱部の材料のせん断波速度に近づく。

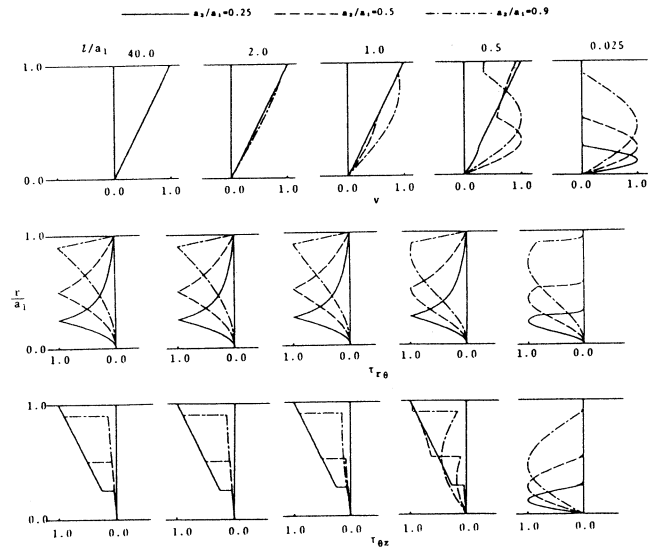
2）縦波動の波動モードは，波長の長い時（$l/a_1>40.0$ 位）は平面保持を示すが，波長が短くなるに従い Case Ⅰは円筒部表面に集中し，Case Ⅱでは円柱中心部に集中するようになる。

3）曲げ波動の位相速度は，波長無限大では零，波長が零に近づくに従い縦波動と同様，Case Ⅰは円筒部の Rayleigh 波速度に，Case Ⅱでは円柱部のせん断波速度に近づく。

4）曲げ波動の波動モードは，波長の長い時は縦波動と同様平面保持を示し，波長が短くなるに従い，特に Case Ⅱで，円筒部に著しい曲げを受けるようなモード分布を示しながら，波長が零に近づくに従い Case Ⅰでは円筒表面に，Case Ⅱでは円筒と円柱の境界付近に集中する波動モードを示している。



図—20　一次のねじり波動モード（Case Ⅰ）



図—21　一次のねじり波動モード（Case Ⅱ）

5）ねじり波動の場合も，一次の位相速度は，波長無限大では，換算弾性定数をもつ均一円柱のせん断波速度に一致し，波長零では，弾性定数の小さな方にせん断波速度に一致する。

6）ねじり波動の波動モードも，他のものと同様，波長無限大では平面保持を示し，波長が短く

なるに従い Case Ⅰでは変位 v と応力 $\tau_{\theta z}$ は円筒部に集中し，$\tau_{r\theta}$ は円筒と円柱の境界に集中し，Case Ⅱでは変位，応力とも円柱部に集中している。

7）二次の位相速度は，縦波動，曲げ波動，ねじり波動ともそれ程大きな違いはなく，Case Ⅰ，Ⅱとも波長が無限大に近づくに従い速度も無限大となり，波長零では軟い部分のせん断波速度（遅い方の弾性波速度）に近づいている。

以上，材料定数については二種類の計算結果について述べたが，その他の組合せの場合も同様の傾向を示すことを確認している。

尚，本論の数値計算は，北海道大学大型計算機センターおよび室蘭工業大学情報処理教育センターの計算機を用いて行なったものであることを付記する。

参考文献

1）Kohn, W., J. A. Krumhansl and E. H. Lee: Variational Methods for Dispersion Relations and Elastic Properties of Composite Materials, J. Appl. Mech., June, 1972.

2）Hegemier, G. A. and T. C. Bache: A General Continuum Theory with Microstructure for Wave Propagation in Elastic Laminated Composites, J. appl. Mech., March, 1974.

3）Gurtmann, G. A. and G. A. Hegemier: A Mixture Theory for Wave Guide-Type Propagation and Debonding in Laminated Composites, Int. J. Solids Structures, Vol. 11, 1975.

4）Hegemier, G. A., G. A. Gurtmann and A. H. Nayfeh: A Continuum Mixture Theory of Wave Propagation in Laminated and Fiber Reinforced Composites, Int. J. Solids Structures, Vol. 9, 1973.

5）Tauchert, T. R. and A. N. Guzelsu: An Experimental Study of Dispersion of Stress Waves in a Fiber Rainforced Composite, J. Appl., March, 1972.

6）能町純雄・大島俊之：内部に軸方向の補強材を有する梁の波動分散曲線について，第26回応力力学連合講演会講演概要集，C129，1976.

7）Ohshima, T. and S. G. Nomachi: Dispersion of Harmonic Flexural Waves in Fiber Rainforced Rectanglar Beam, 北見工業大学研究報告，第9巻，第1号，1977.

8）大島俊之・能町純雄：有限プリズム法による繊維強化複合材の縦波動伝播速度の研究，土木学会論文報告集，第297号，1980.

9）三上修一・大島俊之・能町純雄：有限プリズム法による繊維強化円筒シェルの弾性波速度の研究，土木学会北海道支部論文報告集，第41号，1985.

10）松岡健一・能町純雄：弾性媒体中にある円柱を伝わる曲げ波動の伝播速度について，土木学会輸文報告集，第258号，1977.

11）能町純雄・松岡健一・坂下正幸：弾性媒体中にある厚肉円筒を伝わる弾性波について，土木学会論文報告集，第293号，1980.

12）Nomachi, S. G., K. G. Matsuoka, N. Kishi and T. Ohshima: Elastic Waves of Cylinder in an Elastic Medium, Proc. 4th A. S. C. E. EMD Speciality Conference, 1983.

13）松岡健一・能町純雄・岸徳光：入射せん断波を受ける弾性体中にある厚肉円筒の動的応答，構造工学論文集，Vol. 31A, 1985.

14）松岡健一・菅田紀之・能町純雄・木田啓量：二層同心円柱を伝わる弾性波の伝播速度，構造工学論文集，Vol. 32A, 1986.

15）松岡健一・菅田紀之・岸徳光・能町純雄：二層同心円柱を伝わるねじり波動の位相速度，土木学会第

41回年次学術講演会, 1986.