高次相関型連想記憶に関する基礎的考察

高次相関型連想記憶に関する基礎的考察

熊 谷 幸 雄

Fundamental Considerations on the Higher-Order Correlated Associative Memory

Yukio KUMAGAI

Abstract

A characteristic feature in the associative memory is that traces of data from many different occurences are superimposed on the same memory elements. So, cross-talk will inevitably occur when the output recollection in relation to the input key will be performed.

Therefore, this paper deals with the associative memory subjected to the higher-order correlation matrix formalism, and derives some explicit descriptions in a form which enables direct discenment of the quality of the recollection. In general, it might be true that more exact recollection is expected as the correlation order is increased as well as the missing portions of the input key are decreased. But, theoretically, it is shown that the latter case is not in true case. An approach to improve this situation is presented, and its availability is discussed.

1. はじめに

近年に於ける電子計算機の著しい応用分野の拡大に伴い，より効率の良い情報処理を実現する為に，新しい形式の情報処理方式の提案とその研究が盛んである[1,2,3]。中野[4]，T, Kohonen[5]等によって提案された連想型記憶は，従来の電子計算機の記憶の仕方とは異なり，たくさんのデーター・キーの対を或る同一の記憶場所に重ね合せて記憶し，読み出しは，結局，キー入力によって必要なデーターをこの記憶場所から分離する事によってなされる形式のものである。それ故，連想型記憶では，データーの探索等といった時空間的操作は基本的に不要であり，しかも，入力キーの部分的欠落に対しても必要とされる全体のデーターの想起が可能である等可成りの柔軟性も持ち合わせた情報処理が可能とされている[7]。従って，この方式は，大量のデーターの処理・探索等が要求される局面等では，可成り時間的にも効率の良い情報処理の行えることが期待されるが，連想型記憶のこの記憶に於ける重ね合わせは，何らかの特別の工夫をしない限り，読み出しに際して漏話を生じさせる原因となり，現在のところ，期待される程多くのデーターを取扱いうる装置とは成り得ていない。

ところで，Kohonen[6]は，連想型記憶に於けるこの漏話の原因は，より直接的に考えられる記憶に用いられるデーター・キー対の数ではなく，記憶に用いられるキー入力間の線形従属性にあ

ることを示し，従って，正確なデーターの読み出しを行なうためには，記憶に用いるキーが互いに線形独立であることが十分条件として成り立つことを示した。しかしながら，いま仮りに，記憶に用いるキーを，長さ n の二値ベクトルとしてみると，これらキー集合の次元はたかだか n であるから，たかだか n 個のデーターしか正確に読み出し得ないことになり，この個数は，可能なキーの総数 2^n に比べて余りにも少なく，とても大量のデーターを取扱いうるとは言い切れない。連想型記憶が現在直面している種々の局面で，一つの新しい情報処理方式となりうるためには，やはり，より多くのデーターの取扱いが可能となることが必要であり，このことは，連想型記憶の基本的問題点の一つであると考えられる。

ところで，この問題点に関する対応策の一つとして，Poggio[(8)]，市川等[(9)]は，記憶に用いられるキー成分間の高次相関情報をデーター・キー対のキー側に用いることを提案している。しかしながら，特に後者は，前者で用いられた重複した情報の付加分については改善しているものの，確率論的評価が主体であり，特に，彼等が入力条件と呼んだ場合の議論であるため，汎用的状態を想定しがたく，また，高次相関情報と漏話の減少との係わり合いについての明確な議論はなされていない。一般に，高次相関情報の導入はそれに伴う連想型記憶の記憶空間の増大を引き起こすことになるから，付加される高次相関情報とそれによってもたらされる漏話の減少とのかね合いを数量的に明確にしておくことは極めて基本的事項として大切なことと考えられる。事実，入力の仕方について，入力条件をやぶった場合には，入力キーの欠落を少なくしても，想起の正確さが必ずしも増加しないという“漏話の不減現象”と呼ぶ状態が発生し，また新たな対策の必要なことが指摘できる。

それ故，本論文は，従来の連想型記憶により多くのデーターの取り扱いを可能とさせるために，特に，Kohonen の条件以上のデーター・キー対を重ね合わせた場合について，キーの高次相関情報の導入と読み出しに際する漏話との関係について数量的立場からその議論を行なったもので，導入される相関情報の高次化と共に漏話の減少が引き起こされることを数量的に明らかにし，一方，固定された相関次数の下では，“漏話の不減現象”と呼ぶ必ずしも望ましいことではない現象の発生することについて定量的考察を与え，且つ，それに対する対策について一つの提案をし，その解析を行ったものである。

2．二値型連想記憶と諸定義

本論文が考察の対象とする連想型記憶は，データー，並びに，キーのいづれもが，その成分を ±1 とする二値で表されたベクトルとなっている二値型の連想型記憶である。

添字集合：$\mathrm{I} \triangleq \{i \mid i=1,2,\cdots,v\}$ によって，連想型記憶が総数 v 個の互いに異なるデーター・キー対を取り扱うことを意味させる。ここで，互いに異なるとは，少なくとも v 個のキーは異なることであるとする。

i 番目のデーター：$\mathbf{y}^{(i)}$, i 番目のキー：$\mathbf{x}^{(i)}$ を，それぞれ

$$\mathbf{y}^{(i)} \triangleq \mathrm{col}(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots, y_m^{(i)}),\ y_j^{(i)} \in \{\pm 1\},\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{2-1}$$

$$\mathbf{x}^{(i)} \triangleq \mathrm{col}(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}), x_j^{(i)} \in \{\pm 1\},\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{2-2}$$

とし，i 番目のデーター・キー対は（$\mathbf{y}^{(i)}$, $\mathbf{x}^{(i)}$）で表す。

さて，キー $\mathbf{x}^{(i)}$ にその高次相関情報を付加することは，数学的には，キー $\mathbf{x}^{(i)}$ の適当な成分間の積を元の $\mathbf{x}^{(i)}$ に新たに付加することに対応し，相関の次数は掛けられる互いに異なる成分の個数に対応する。それ故，与えられたキー $\mathbf{x}^{(i)}$ に対して，その互いに異なる成分間の積を作って元の $\mathbf{x}^{(i)}$ の高次相関情報を得る操作を，簡単のために，$\mathbf{x}^{(i)}$ の拡大を行うと呼び，特に，その相関情報が特定の α（$0 \leqq \alpha \leqq n$）次のものをうる操作のときには，$\mathbf{x}^{(i)}$ の α 次拡大を行うと呼ぶことにする。

さて，$\mathbf{x}^{(i)}$ の α 次拡大，並びに，それによってえられる結果の表現を以下のように行う。

まず，キー $\mathbf{x}^{(i)}$ の全ての成分の添字集合を

$$\mathbf{J} \triangleq \{j \mid j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\} \tag{2-3}$$

とする。

α を $0 \leqq \alpha \leqq n$ とし，$\mathbf{J}$ からとられた互いに異なる α 個の要素の組み合わせを

$$\begin{array}{ll} (j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_\alpha),\ j_\nu \in \mathbf{J}\ (\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ \alpha) & \cdots\cdots(\alpha \geqq 1) \\ (\phi), & \cdots\cdots(\alpha=0) \end{array} \tag{2-4}$$

それらの集合を

$$\begin{array}{ll} \mathbf{J}^{(\alpha)} \triangleq \{(j_1,\ j_2,\ \cdots, j_\alpha) \mid j_\nu \in \mathbf{J},\ \ \nu=1,\ 2,\ \cdots,\ \alpha\} & \cdots\cdots(\alpha \geqq 1) \\ \mathbf{J}^{(0)} \triangleq \{\phi\} & \cdots\cdots(\alpha=0) \end{array} \tag{2-5}$$

但し，$\alpha \geqq 1$ に対しては，$j_1 < j_2 < \cdots < j_\alpha$，$\phi$ は空なる要素を表わす

とする。

このとき，この $\mathbf{J}^{(\alpha)}$ は ${}_nC_\alpha$ 個の異なる要素をもつことは明らかで，いま，各要素に対する $\mathbf{x}^{(i)}$ の α 次拡大を，対応：

$$\begin{array}{ll} f^{(\alpha)}_{(j_1, j_2, \cdots, j_\alpha)}(\mathbf{x}^{(i)}) = \prod_{\nu=1}^{\alpha} x_{j_\nu}{}^{(i)} & \cdots\cdots(\alpha \geqq 1) \\ f^{(0)}_{(\phi)}(\mathbf{x}^{(i)}) = 1 & \cdots\cdots(\alpha=0) \end{array} \tag{2-6}$$

によって表せば，$\mathbf{J}^{(\alpha)}$ の全ての要素について，${}_nC_\alpha$ 個の異なる対応の結果を得る。

そこで，いま，この対応について，添字となっている組合せ：$(j_1,j_2,\cdots,j_\alpha)$ について，$j_1,j_2,\cdots,j_\alpha$が，特に，辞書式順序を満たすように対応の結果を並べたもの，

即ち，辞書式順序を≪，$\mu,\mu'\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ {}_nC_\alpha\}$としたとき

$j_\mu(\alpha)\triangleq(j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_\alpha)$，$j_{\mu'}(\alpha)\triangleq(j_1',\ j_2',\ \cdots,\ j_\alpha')\in\mathbf{J}^{(\alpha)}$に対して

$$j_1,\ j_2,\ \cdots,\ j_\alpha \ll j_1',\ j_2',\ \cdots,\ j_2' \Leftrightarrow \mu<\mu'$$

として，<の順序に従って，μ，μ'を並べたもの：

$$\mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{x}^{(i)})\triangleq\mathrm{col}(f^{(\alpha)}_{j_1(\alpha)}(\mathbf{x}^{(i)}),f^{(\alpha)}_{j_2(\alpha)}(\mathbf{x}^{(i)}),\cdots,f^{(\alpha)}_{j_nC_\alpha}(\mathbf{x}^{(i)})) \tag{2-7)}$$

は，キー$\mathbf{x}^{(i)}$の次数αの高次相関情報を全て抽出したベクトルになっているので，これを$\mathbf{x}^{(i)}$のα次拡大ベクトルと呼ぶ。

また，この$\mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{x}^{(i)})$を，さらに，$\alpha=0$，1，…，Nの順に並べ

$$\mathbf{F}^{N}(\mathbf{x}^{(i)})\triangleq\mathrm{col}(\mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{x}^{(i)}),\ \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}^{(i)}),\ \cdots,\ \mathbf{F}^{(N)}(\mathbf{x}^{(i)})) \tag{2-8}$$

但し，$\mathbf{F}^{(0)}(\mathbf{x}^{(i)})\triangleq 1$

としたものは，$\mathbf{x}^{(i)}$のN次までの拡大ベクトルと呼ぶ。

このとき，$\mathbf{F}^{N}(\mathbf{x}^{(i)})$の要素の総数は，次式で与えられる。

$$n(N)=\sum_{\alpha=0}^{N}{}_nC_\alpha \tag{2-9}$$

さて，このN次までの拡大を行い，従って，N次までの高次相関情報をとり入れた連想型記憶の記憶の仕方は，次のように行われる。

$$\mathbf{M}=\sum_{i=1}^{v}\mathbf{y}^{(i)}\otimes\mathbf{F}^{N}(\mathbf{x}^{(i)})^{t} \tag{2-10}$$

但し，$\otimes$はクロネッカー積，tは転置を表す。

即ち，$\mathbf{M}$をm行n(N)列の行列として，各データー・キー対毎に，$\mathbf{y}^{(i)}\otimes\mathbf{F}^{N}(\mathbf{x}^{(i)})^{t}$が計算され，これが全てのデーター・キー対にわたって，同一の記憶場所であるm行n(N)列の行列$\mathbf{M}$の各要素毎に加算されて行くわけである。

一方，読み出しは，キー入力を$\mathbf{x}=\mathrm{col}\ (x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)$としたとき，これについても同様のN次までの拡大を行ったものを$\mathbf{F}^{N}(\mathbf{x})$とすると

$$\mathbf{z}=u(\mathbf{M}\cdot\mathbf{F}^{N}(\mathbf{x})) \tag{2-11}$$

によってなされる。

但し，$\mathbf{z}$ は読出しの結果であり，$\mathbf{z}=\mathrm{col}(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_m)$，また，u は次式で定義される量子化関数である。

$$u(x)=\begin{cases} -1 & \cdots x<0 \\ 0 & \cdots x=0 \\ 1 & \cdots x<0 \end{cases} \tag{2-12}$$

式(2-11)に関して

$$\mathbf{w} \triangleq \mathbf{M}\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x}) \tag{2-13}$$

但し，$\mathbf{w} \triangleq \mathrm{col}(w_1, w_2, \cdots, w_m)$

とおくと，式(2-10)より，これは

$$\mathbf{w}=\sum_{i=1}^{v}\mathbf{y}^{(i)}<\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)})\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x})> \tag{2-14}$$

但し，$<\cdot>$は内積をとることを表す

と書かれる。このとき，$<\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)})\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x})>$は総和の中で占めるデーター $\mathbf{y}^{(i)}$ の割合いを与えることによなり，読出し特性を調べる上で重要な量となる。

それ故，この量：$<\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)})\cdot F(\mathbf{x})>$をデーター $\mathbf{y}^{(i)}$の重み関数と呼び，以後で，その性質が詳しく調べられる。

さて，本論文では，キー $\mathbf{x}$ に部分的欠落が起きた場合について，特に，詳しく議論されるが，欠落は，値 0 をその部分に置いたベクトル：

$$\mathbf{x}(s) \triangleq \mathrm{col}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_s,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ x_j \in \{\pm 1\}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ s) \tag{2-15}$$

但し，$1 \leqq s \leqq n$

で表現し，$\mathbf{x}$ から $\mathbf{F}^N(\mathbf{x})$を得たのと全く同様の手続きで $\mathbf{F}^N(\mathbf{x}(s))$を構成し，これを $\mathbf{M}$ に作用させ，想起の結果を調べることにする。

3．N 次までの拡大をもつ高次相関型連想記憶の読出し特性

本章では，まず，重み関数$<\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)})\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x}(s))>$について，概括的評価を行い，N と s に関する陽な表現を求め，N 次までの拡大が施された高次相関型連想記憶では，$N<s$ か否かによって大きくその読出し特性を異にすることを示す。一方，実現上の見地から，可解な限り N の小さい連想型記憶の構成を要求すると，このことは，直ちに，$N<s$ となる場合になることを示し，従って，この場合に相当する重み関数$<\mathbf{F}^N(\mathbf{x})\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x}(s))>$の性質が詳しく調べられ，その結果，漏話の不滅現象の発生することが提示される。

3－1　重み関数$<\mathbf{F}^N(\mathbf{x})\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x}(s))>$の概括的評価

s個が入力として与えられ，残りのn－s個に欠落が生じている入力キー$\mathbf{x}(s)$に対する読出し結果$\mathbf{z}$を

$$\mathbf{z}=\mathrm{col}(u(\mathbf{M}\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x}(s))) \tag{3-1}$$

$$z_j=u(\sum_{i=1}^{u} y_j^{(i)}<\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)})\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x}(s))>),\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{3-2}$$

とする。

さて，通常，入力$\mathbf{x}$は，予め記憶しているデーター・キー対のいづれかのキーとして選ばれる。従って，欠落をもったキー$\mathbf{x}(s)$も，そのようにして選ばれたキー$\mathbf{x}$の一部分が欠落したものと考えるのが自然である。このことを，我々は，

$$\mathbf{x}(s)\equiv\mathbf{x}^{i*}(s),\ i^*\in\mathbf{I} \tag{3-3}$$

と書き，入力$\mathbf{x}^{i*}(s)$によって，読出し結果$\mathbf{z}$は，データー$\mathbf{y}^{(i*)}$に等しくなることを期待するものとする。

さて，この(3-3)の条件下では，式(3-2)は，次のようになる。

$$z_j=u(\sum_{i=i*}y_j^{(i)}<\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)})\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{i*}(s))>+\sum_{i\neq i*}y_j^{(i)}<\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)})\cdot\mathbf{F}(\mathbf{x}^{i*}(s))>). \tag{3-4}$$

式(3-4)の右辺第一項は，全てのキーが記憶の段階では全て異なっていても欠落のある入力キーが加えられることによって，i^*と同じになる幾つかのiが記憶されているデーター・キー対の中に発生することを表わし，第二項は，そうではない残りのiによって生成される量であることを表している。前者は，多重整合状態の発生を，後者は，漏話量の発生を意味する。

ところで，第一項は，$i=i^*$となる全てのiについての計算であるから

$$\sum_{i=i*}<\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)})\cdot\mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{i*}(s))>=\mathrm{const} \tag{3-5}$$

であり，しかも，このconstは正の量であるから，今，若し，第二項で示される漏話量が値0であれば，式(3-4)，(3-5)より

$$z_j=u(\mathrm{const}\cdot\sum_{i=i*}y_j^{(i)})(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{3-6}$$

となり，多重整合しているデーターの代数和に等しい値を想起結果として与えることになる。この状態は，期待されているデーター$\mathbf{y}^{(i*)}$が少くともその中に含まれているという意味に於いて，或いは，想起の仕方が一意に既知にされる故，分離のための対策だけを考えればよいという意味に於いて，望ましい結果を与えるものと考えられる。事実，全てのiについて$\mathbf{y}^{(i)}$と$\mathbf{x}^{(i)}$とが等し

い自己想起型の場合には，式(3-6)より，更に，

$$z_j = u(\mathrm{const} \cdot \sum_{i=i^*} x_j^{(i)}) = x_j^{(i^*)}, (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{3-6)'$$

となり，仮りに，第二項で与えられる漏話量が極めて大きいような場合には，このような想起結果に対する一意性はいえなくなり，殆ど，その意味付けができなくなってくる。

従って，式(3-4)の第二項で与えられる漏話量：

$$\sum_{i \neq i^*} y_j^{(i)} \cdot \langle \mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)}) \cdot \mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{i^*}(s)) \rangle,\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m) \tag{3-7}$$

が，高次相関情報を表すNと，どのような量的係わり合いをもつことになるのかが，極めて基本的事柄として大切になってくる。

本論文は，このことを調べるため，まず，次式で示されるハミング距離 $\mathbf{D}(\mathbf{x}^{(i)},\ \mathbf{x}^{i^*}(s))$ を，全ての i と i^* との間に定義することから始める。

$$D(\mathbf{x}^{(i)},\ \mathbf{x}^{i^*}(s)) \triangleq \sum_{j=1}^{s} |(x_j^{(i)} - x_j^{i^*})/2| \tag{3-8}$$

明らかに，与えられた s に対して，s+1 の通りのハミング距離の値が存在する。

即ち，

$$D(\mathbf{x}^{(i)},\ \mathbf{x}^{i^*}(s)) \triangleq d_{i,\ i^*} \tag{3-9}$$

と略記し，更に，$d_{i,\ i^*}=d$ とすると

$$d=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s \tag{3-10}$$

である。

式(3-10)で $d_{i,\ i^*}=0$ を与える i は，i^*と多重整合を生じていることを示し，一方，$d_{i,\ i^*}$ が1以上の値をとる i は，i^*に対して漏話の原因となっていることを示している。

さて，各 $i \in \mathbf{I}$ は，i^* に対して，一意な $d_{i,\ i^*}$ をもつから，この $d_{i,\ i^*}$ の値による $\mathbf{I}$ の分割を

$\mathbf{I} = \{\mathbf{I}^{(d)} \mid d=0,\ 1,\ 2,\ \cdots s\}, \mathbf{I}^{(d)} = \{i \mid d_{i,\ i^*}=d, i \in \mathbf{I}\}(d=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s)$

と書き，各 i についての考察を，s＋1種類の違いをもつ $d_{i,\ i^*}$ のもとでのそれに移す。

即ち，各 $i \in \mathbf{I}^{(d)}(d=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s)$に対して

$$\mathbf{H}^N(d_{i,\ i^*}) = \langle \mathbf{F}^N(\mathbf{x}^{(i)}) \cdot \mathbf{F}^N \mathbf{x}^{i^*}(s)) \rangle \tag{3-11}$$

を定義し，以降，これを評価する。

式(2-3)(2-7)(2-8)より，式(3-11)は，以下のように書き換えられる。

$$\mathbf{H}^N(d_{i,\ i^*}) = \sum_{\alpha=0}^{N} \langle \mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{x}^{(i)}) \cdot \mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{x}^{i^*}(s)) \rangle$$

$$= 1 + \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_\alpha) \in J^{(\alpha)}} \left\{ \prod_{\nu=1}^{\alpha} x_{j_\nu}^{(i)} \cdot \prod_{\nu=1}^{\alpha} x_{j_\nu}^{i^*} \right\} \tag{3-12}$$

$$= 1 + \sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_\alpha) \in J^{(\alpha)}} \prod_{\nu=1}^{\alpha} \left\{ x_{j_\nu}^{(i)} \cdot x_{j_\nu}^{i^*} \right\} \tag{3-13}$$

但し，$\alpha \geqq 1$としている。

さて，$s \leqq N$，$s > N$の場合にわけて評価を行う。

(1) $s \leqq N$の場合：

この場合は，入力キー成分の全ての組み合せ：$(x_{j_1}^{i^*}, x_{j_2}^{i^*}, \cdots, x_{j_\alpha}^{i^*})(\alpha = 0, 1, \cdots, s)$ に対して，記憶されているs次までの高次相関情報が利用できる。

式(3-12)より，$\alpha \geqq s$に対しては，$\Pi_{\nu=1}^{\alpha} x_{j_\nu}^{i^*} = 0$．それ故，式(3-13)について

$$\mathbf{H}^N(d_{i,\, i^*}) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_\alpha) \in J^{(\alpha)}} \prod_{\nu=1}^{\alpha} \left\{ x_{j_\nu}^{(i)} \cdot x_{j_\nu}^{i^*} \right\} \tag{3-14}$$

$$= \prod_{\nu=1}^{s} \left\{ 1 + x_{j_\nu}^{(i)} x_{j_\nu}^{i^*} \right\} \tag{3-15}$$

さて，$d_{i,\, i^*} = 0$なるiに対しては，全てのj_ν ($\nu = 1, 2, \cdots, s$) について

$$x_{j_\nu}^{(i)} = x_{j_\nu}^{i^*}$$

が成り立つから，式(3-15)を参照することにより

$$\mathbf{H}^N(d_{i,\, i^*} = 0) = 2^s. \tag{3-16}$$

一方，$d_{i,\, i^*} \fallingdotseq 0$なるiに対しては，$x_{j_\nu}^{(i)} \fallingdotseq x_{j_\nu}^{i^*}$とする$j_\nu$が少くとも1個存在するから，そのような$x_{j_\nu}^{(i)}$については

$$x_{j_\nu}^{(i)} x_{j_\nu}^{i^*} = -1$$

が成り立つ故，同様に，式(3-15)を参照することにより

$$\mathbf{H}^N(d_{i,\, i^*} \fallingdotseq 0) = 0 \tag{3-17}$$

が得られる。

即ち，$s \leqq N$なる範囲の入力欠落に対しては，完全に漏話量が0である読出しが可能であることが示される。

(2) $s > N$の場合：

この場合には，入力キーの非零成分の組み合わせ：$(x_{j_1}^{i^*}, x_{j_2}^{i^*}, \cdots, x_{j_\alpha}^{i^*})$ ($\alpha = 0, 1, \cdots, s$)は，

$\alpha=N$までしか利用できない。即ち，式(3-12)に対して，$\alpha \geqq N+1$については$\Pi_{\nu=1}^{\alpha} \cdot x_{j_\nu}^{(i)}=0$であるから，式(3-14)に対応するものは，次のようになる。

$$\mathbf{H}^N(d_{i,i^*})=1+\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_\alpha)\in \mathbf{J}^{(\alpha)}}\Pi_{\nu=1}^{\alpha}\{x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}\} \tag{3-18}$$

さて，式(3-18)について，場合(1)と同様，$d_{i,i^*}=0$となるiから，その評価を行う。
$d_{i,i^*}=0$となるiについては，その全ての組合せ：$(j_1,j_2,\cdots,j_\alpha)(\alpha=0，1，\cdots，N)$に対して

$$\prod_{\nu=1}^{\alpha}\{x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}\}=1$$

が成り立つから，式(3-18)より次式が得られる。

$$\mathbf{H}^N(d_{i,i^*}=0)=\sum_{\alpha=0}^{N}{}_sC_\alpha \tag{3-19}$$

ところで，この式(3-19)は，同じ条件下では，次のように書いてもよい。

$$\mathbf{H}^N(d_{i,i^*}=0)=2^s-\sum_{\alpha=N+1}^{s}{}_sC_\alpha \tag{3-20}$$

このことは，式(3-18)に対応するものとして，次式を考えてもよいことを意味する。

$$\mathbf{H}^N(d_{i,i^*})=\prod_{\nu=1}^{s}\{1+x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}\}-\sum_{\alpha=N+1}^{s}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_\alpha)\in \mathbf{J}^{(\alpha)}}\prod_{\nu=1}^{\alpha}\{x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}\} \tag{3-21}$$

事実，式(3-21)と(3-18)が，数学的に等価なものであることは，容易に確しかめられ，且つ，式(3-21)の右辺，第二項は，$s>N$のもとでは，いつでも，計算可能な量である。

さて，$d_{i,i^*}\fallingdotseq 0$なるiについては，式(3-21)を用いて，その評価を行う。
場合(1)と同様，$d_{i,i^*}\fallingdotseq 0$なるiについては，$x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}=-1$となる$j_\nu$が少くとも1個存在する。従って，式(3-21)の右辺第一項は0となり，次式が得られる。

$$\mathbf{H}^N(d_{i,i^*}\fallingdotseq 0)=(-1)\cdot\sum_{\alpha=N+1}^{s}\sum_{(j_1,j_2,\cdots,j_\alpha)\in \mathbf{J}^{(\alpha)}}\prod_{\nu=1}^{\alpha}\{x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}\} \tag{3-22}$$

式(3-22)の右辺を評価するため，$d_{i,i^*}=d$，即ち，$i\in \mathbf{I}^{(d)}$とし，dは$1\leqq d\leqq s$の範囲にある或る値に固定して考える。いま，
$\mathbf{J}^{(d)}=\{j_\nu \mid x_{j_\nu}^{(i)}\fallingdotseq x_{j_\nu}^{i^*}，\nu=1，2，\cdots，s\}$，$\tilde{\mathbf{J}}^{(d)}=\{j_\nu \mid x_{j_\nu}^{(i)}=x_{j_\nu}^{i^*}，\nu=1，2，\cdots，s\}$とすると，$\mathbf{J}^{(d)}$の要素数はd，また，$\tilde{\mathbf{J}}^{(d)}$の要素数は$s-d$になっている。

さて，右辺のα個の組合わせ：$(j_1，j_2，\cdots，j_\alpha)$について，いま，特に，$\mathbf{J}^{(d)}$の要素を$\zeta$個（$0\leqq \zeta \leqq d$）含むものを考えると，これは，残りの$\alpha-d$個が$\tilde{\mathbf{J}}^{(d)}$の要素から選ばれた場合に限って意味をもつ。従って，α個の積の計算について，次のような分割を考える，

$$\prod_{\nu=1}^{\alpha}\{x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}\}=\prod_{j_\nu\in \mathbf{J}^{(d)}}x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}\cdot\prod_{j_\nu\in \tilde{\mathbf{J}}^{(d)}}x_{j_\nu}^{(i)}x_{j_\nu}^{i^*}$$

このとき，右辺の前者の分割については${}_dC_\zeta$個の選び方が可能であり，後者の分割はその各々について${}_{(s-d)}C_{(\alpha-\zeta)}$個の選び方が可能である。

一方，この分割の積の値については，次式がなりたつ，

$$\prod_{j_\nu \in J^{(d)}} x_{j_\nu}^{(i)} x_{j_\nu}^{i^*} = \begin{cases} -1 \cdots\cdots \zeta \text{が奇数のとき} \\ \\ 1 \cdots\cdots \zeta \text{が0または偶数のとき} \end{cases}$$

$$\prod_{j_\nu \in \bar{J}^{(d)}} x_{j_\nu}^{(i)} x_{j_\nu}^{i^*} = 1$$

従って，式(3-22)は，次のように計算される。

$$\mathbf{H}^N(d_{i,\ i^*}=d) = \sum_{\alpha=N+1}^{s} \sum_{\zeta=0}^{d} (-1)^{\zeta+1}\, {}_dC_\zeta \cdot {}_{(s-d)}C_{(\alpha-\zeta)} \tag{3-23}$$

式(3-23)の値は，一般には0とはならない。これは，場合(1)の$s \leqq N$のときとは，大きく異なっている点であり，高次相関型連想記憶では，Nとsの大小関係によって，大きくその読出し特性を異にすることが理解される。

3－2　$N < s \leqq n$ に対する $\mathbf{H}^N(d)$ の諸性質と漏話の不滅現象

式(3-23) は，$N < s$ の場合の漏話量 $\mathbf{H}^N(d_{i,\ i^*}=d)$ をN，s，dに関して陽に表現している。以下，$\mathbf{H}^N(d_{i,\ i^*}=d)$ を $\mathbf{H}^N(d)$と書き，その性質を調べる。

その前に，前節で得られた結果をまとめておく，

〔性質　1〕$s \leqq N$ならば

$$\mathbf{H}^N(d=0) = 2^s \tag{3°-1}$$

$$\mathbf{H}^N(d \neq 0) = 0,\ (d=1,\ 2,\ \cdots,\ s). \tag{3°-2}$$

〔性質　2〕$s > N$ならば

$$\mathbf{H}^N(d=0) = 2^s - \sum_{\alpha=N+1}^{s} {}_sC_\alpha \tag{3°-3}$$

$$\mathbf{H}^N(d \neq 0) = \sum_{\alpha=N+1}^{s} \sum_{\zeta=0}^{d} (-1)^{\zeta+1}\, {}_dC_\zeta \cdot {}_{(s-d)}C_{(\alpha-\zeta)},\ (d=1,\ 2,\ \cdots,\ s). \tag{3°-4}$$

欠落の度合いを表わすsの最大値はnであるから，N=n, 即ちn次までの拡大を施しておけば，〔性質1〕より，全ての欠落に対して，完全に漏話のない読出し特性を与えることができる。しかし，拡大次数Nの最大値もnであるから，これは最大の拡大を施こした場合であり，記憶空間の大きさを$m \cdot n(N)$で評価すると，この場合の記憶空間は，

$$m\cdot n(N)=m\cdot\sum_{\alpha=0}^{n}{}_{n}C_{\alpha}=m\cdot 2^{n}$$

となり，m，n が大きいときには膨大なものとなり，実用上問題が残る。実際の場合には，漏話量が $\mathbf{H}^{N}(d=0)$ に対して十分小さければ十分とできる場合もありうるから，N＜n として $\mathbf{H}^{N}(d)$ の性質を詳しく調べるべきであると考える。

さて，N＜n の場合，s は 1 から n まで変化するから，このときの読出し特性は，〔性質 1〕と〔性質 2〕とを同時にもっていることに注意しなければならない。しかし，〔性質 1〕の場合がおきる s に対しては，漏話量が 0 となることが，既でに，分かったので，以降，〔性質 2〕の場合がおきる s に対して考えてゆくことにする。

〔性質 3〕s＞N とする。このとき，全ての d（$\neq 0$）について

$$\mathbf{H}^{N}(d\neq 0)<\mathbf{H}^{N}(d=0)$$

がなりたつ。

〔証明〕

$$\mathbf{H}^{N}(d\neq 0)=\sum_{\alpha=N+1}^{s}\sum_{\zeta=0}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(\alpha-\zeta)}$$

$$<\sum_{\alpha=N+1}^{s}\sum_{\zeta=0}^{d}{}_{d}C_{\zeta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(\alpha-\zeta)}=\sum_{\alpha=N+1}^{s}{}_{s}C_{\alpha}=\mathbf{H}^{N}(d=0) \qquad \square$$

〔性質 4〕$1\leqq N<s$ とする。このとき，d＝1，2，…，〔s/2〕に対して

$$\mathbf{H}^{N}(d)=(-1)^{N}\cdot\mathbf{H}^{N}(s-d+1)$$

がなりたつ。但し，〔　〕はガウスの記号である。

〔証明〕

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\alpha=N+1}^{s}\sum_{\zeta=0}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(\alpha-\zeta)} \tag{3°-5}$$

$\beta=\alpha-\zeta$ とおき，変数（α，ζ）について和を，変数（β，ζ）についての和に書き改める。このとき，

$$0\leqq\beta\leqq s-d \tag{3°-6}$$

$$0\leqq\zeta\leqq d$$

であり，この範囲以外の（β，ζ）については，式(3°-5)は定義されないことに注意すると，N によって，次の三つの場合が考えられる。

(1)　d≦N＋1≦s−d の場合

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=N+1}^{s-d}\left(\sum_{\zeta=0}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta}\right){}_{(s-d)}C_{\beta}+\sum_{\beta=N+1-d}^{N}\sum_{\zeta=N+1-\beta}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta\,(s-d)}C_{\beta} \quad (3°\text{-}7)$$

式(3°-7)の第一項は，$\Sigma^{d}_{\zeta=0}$ $(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta}=0$ より 0 となり，第二項のみが意味をもつ。

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=N+1-d}^{N}\sum_{\zeta=N+1-\beta}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta\,(s-d)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=N+1-d}^{N}\left(\sum_{\zeta=0}^{N-\beta}(-1)^{\zeta}{}_{d}C_{\zeta}\right)\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=N+1-d}^{N}(-1)^{N-\beta}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta} \quad (3°\text{-}8)$$

(2)　N＋1＜d の場合

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=N+1}^{s-d}\left(\sum_{\zeta=0}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta}\right)\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}+\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\zeta=N+1-d}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta\,(s-d)}C_{\beta} \quad (3°\text{-}9)$$

同様に，式(3°-9) の第一項は 0．それ故

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\zeta=N+1-\beta}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=0}^{N}\left(\sum_{\zeta=0}^{N-\beta}(-1)^{\zeta}{}_{d}C_{\zeta}\right)\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^{N-\beta}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta} \quad (3°\text{-}10)$$

(3)　N＋1＞s−d の場合

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=N+1-d}^{s-d}\sum_{\zeta=N+1-\beta}^{d}(-1)^{\zeta+1}{}_{d}C_{\zeta}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=N+1-d}^{s-d}\left(\sum_{\zeta=0}^{N-\beta}(-1)^{\zeta}{}_{d}C_{\zeta}\right)\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=N+1-d}^{s-d}(-1)^{N-\beta}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta} \quad (3°\text{-}11)$$

一方，$\mathbf{H}^{N}(s-d+1)$ は，式(3°-5)より，次のように与えられる。

$$\mathbf{H}^{N}(s-d+1)=\sum_{\alpha=N+1}^{s}\sum_{\zeta=0}^{s-d+1}(-1)^{\zeta+1}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\cdot{}_{(d-1)}C_{(\alpha-\zeta)} \quad (3°\text{-}12)$$

前と同様，$\beta=\alpha-\zeta$ とおき，式(3°-12)を（β，ζ）についての和に書き改め，前と同じ三つの場合に対応させて考える。但し，式(3°-12)が定義される範囲は

$$0 \leqq \beta \leqq d-1$$

$$0 \leqq \zeta \leqq s-d+1 \tag{3°-13}$$

である。

(1) d≦N＋1≦s－d の場合

$$\mathbf{H}^N(s-d+1)=\sum_{\beta=0}^{d-1}\Big(\sum_{\zeta=N+1-\beta}^{s-d+1}(-1)^{\zeta+1}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\Big)\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta}=\sum_{\beta=0}^{d-1}\sum_{\zeta=0}^{N-\beta}(-1)^{\zeta}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=0}^{d-1}(-1)^{N-\beta}{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta}=\sum_{\beta=N}^{N-d+1}(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta} \tag{3°-14}$$

式(3°-8)と(3°-14)の比較より

$$\mathbf{H}^N(d)=(-1)^N\,\mathbf{H}^N(s-d+1)$$

(2) N＋1＜d の場合

$$\mathbf{H}^N(s-d+1)=\sum_{\beta=N+1}^{d-1}\Big(\sum_{\zeta=0}^{s-d+1}(-1)^{\zeta+1}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\Big){}_{(d-1)}C_{\beta}$$

$$+\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\zeta=N+1-\beta}^{s-d+1}(-1)^{\zeta+1}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta} \tag{3°-15}$$

式(3°-15)の第一項は０になる。それ故，第二項のみとなり

$$\mathbf{H}^N(s-d+1)=\sum_{\beta=0}^{N}\Big(\sum_{\zeta=N+1-\beta}^{s-d+1}(-1)^{\zeta+1}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\Big)\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta}=\sum_{\beta=0}^{N}\Big(\sum_{\zeta=0}^{N-\beta}(-1)^{\zeta}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\Big){}_{(d-1)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^{N-\beta}{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta}=\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta} \tag{3°-16}$$

式(3°-9)と(3°-16)との比較より

$$\mathbf{H}^N(d)=(-1)^N\mathbf{H}^N(s-d+1)$$

(3) N＋1＞s－d の場合

$$\mathbf{H}^N(s-d+1)=\sum_{\beta=N+1-(s-d+1)}^{d-1}\Big(\sum_{\zeta=N+1-\beta}^{s-d+1}(-1)^{\zeta+1}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\Big)\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=N-(s-d)}^{d-1}\Big(\sum_{\zeta=0}^{N-\beta}(-1)^{\zeta}{}_{(s-d+1)}C_{\zeta}\Big)\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=N-(s-d)}^{d-1}(-1)^{N-\beta}{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(d-1)}C_{\beta}=\sum_{\beta=s-d}^{N-(d-1)}(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

(3°-17)

式(3°-11)と(3°-17)との比較より

$$\mathbf{H}^{N}(d)=(-1)^{N}\,\mathbf{H}^{N}(s-d+1)$$

よって，証明された。 □

この〔性質4〕は，考えられるs通りの漏話量 $\mathbf{H}^{N}(d)$ $(d=1,2,\cdots,s)$ が，$d=(s+1)/2$ を中心にして，絶対値に関する尖どい対称性を有していることを述べている。即ち，i^{*} に対してハミング距離が1のものとsのものとが絶対値を同じくし，以下同様に，2のものとs−1のものとが絶対値を同じくしているのである。

〔性質5〕 $0\leqq N\leqq[(s-1)/2]$ とする。このとき，$1\leqq d\leqq[(s+1)/2]$ に対して，次式がなりたつ，

$$\mathbf{H}^{N}(d)=(-1)^{d-1}\cdot\mathbf{H}^{s-1-N}(d)$$

〔証明〕式(3°-4)に関して，その定義域は，$0\leqq\zeta\leqq d$，$0\leqq N+1-\zeta\leqq s-d$ である。
$0\leqq N\leqq[(s-1)/2]$ とすると，次の二つの場合を考えればよい。

(1) $N+1<d$ の場合

この場合，式(3°-4)は(3°-10)のように変形された。それを，再記する。

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^{N-\beta}\,{}_{(d-1)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta} \tag{3°-10}$$

(2) $d\leqq N+1\leqq[(s-1)/2]$ の場合

この場合，式(3°-4)は(3°-8)のように変形された。それを，再記する。

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=N+1-d}^{N}(-1)^{N-\beta}\,{}_{(d-1)}C_{(N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta} \tag{3°-8}$$

さて，ここで，Nを $s-1-N$ でおきかえ，$N'=s-1-N$ とすると，$N+1$ が場合(1)のときには $N'>s-d$ となり，N' については，式(3°-11)がなりたち，更にそれは次のように変形される。

$$\mathbf{H}^{s-1-N}(d)=\mathbf{H}^{N'}(d)$$

$$=\sum_{\beta=N'+1-d}^{s-d}(-1)^{N'-\beta}\,{}_{(d-1)}C_{(N'-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}=\sum_{\beta=s-d-N}^{s-d}(-1)^{s-1-N-\beta}\,{}_{(d-1)}C_{(s-1-N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=s-d-N}^{s-d}(-1)^{s-1-N-\beta}\,{}_{(d-1)}C_{(d-s+N+\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{(s-d-\beta)}$$

ここで，$\beta'=s-d-\beta$ とおくと

$$=\sum_{\beta'=0}^{N}(-1)^{N-\beta'+d-1}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta')}\,{}_{(s-d)}C_{\beta'}=(-1)^{d-1}\sum_{\beta'=0}^{N}(-1)^{N-\beta'}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta')}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta'}$$

$$=(-1)^{d-1}\mathbf{H}^{N}(d)$$

一方，N＋1が場合(2)のときには，Nをs－I－N＝N′でおきかえても，N′の範囲には変わりはないから，′の記号を省略して，変形を進める。

$$\mathbf{H}^{s-1-N}(d)=\sum_{\beta=s-d-N}^{s-1-N}(-1)^{s-1-N-\beta}{}_{(d-1)}C_{(s-1-N-\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

$$=\sum_{\beta=s-d-N}^{s-1-N}(-1)^{s-1-N-\beta}{}_{(d-1)}C_{(d-s+N+\beta)}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta}$$

ここで，$\beta'=s-d+\beta$ とおくと

$$=\sum_{\beta'=N+1-d}^{N}(-1)^{d-1-N+\beta'}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta')}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta'}=(-1)^{d-1}\sum_{\beta=N+1-d}^{N}(-1)^{N-\beta'}{}_{(d-1)}C_{(N-\beta')}\cdot{}_{(s-d)}C_{\beta'}$$

$$=(-1)^{d-1}\cdot\mathbf{H}^{N}(d)$$

よって，証明された。 □

即ち，この性質は，あるd（$1\leqq d\leqq s$）に対する高次化によって，$\mathbf{H}^{N}(d)$がどのような変化をうけるかについて述べている。奇妙なことに，N＝（s－1）/2を中心にして，$\mathbf{H}^{N}(d)$は絶対値に関する対称性をもっているのだから，Nを高次にしても$\mathbf{H}^{N}(d)$は，低次のそれに変りのない状態を保つことになり，高次化が一見，無意味のようにみえる。

しかし，これは，後で分かるように，$\mathbf{H}^{N}(0)$は，Nと共に極めて大きくなるから，$\mathbf{H}^{N}(d=0)$に対する相対的な見方をすれば，Nの高次化は全てのdについて漏話量を減少されるように働くことになるのである。

〔性質6〕 $1\leqq d\leqq s$，$1\leqq N\leqq s-1$ とする。このとき，次のことがいえる。

(1) $\mathbf{H}^{N}(d)$を，Nを或る値に固定し，dに関する一つの関数と見放すと，$\mathbf{H}^{N}(d)$はdに関するN次の多項式である。

(2) $\mathbf{H}^{N}(d)/H^{N}(1)$で，dを或る値に固定し，Nに関する一つの関数と見放すと，$\mathbf{H}^{N}(d)/\mathbf{H}^{N}(1)$は，Nに関するd－1次の多項式である。

〔証明〕式(3°-5)，(3°-19)，(3°-11)で，各々$\beta'=N-\beta$と変数変換を行い，その結果を，改めて，βで表現すると，以下の通りである。

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=0}^{d-1}(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}\quad(d\leqq N+1\leqq s-d)\qquad(3°\text{-}8')$$

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=0}^{N}(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}\quad(d>N+1)\qquad(3°\text{-}10')$$

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\beta=d-1}^{N-(s-d)}(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}\quad(N+1>s-d)\qquad(3°\text{-}11')$$

Ｎのいづれの範囲に対しても $\mathbf{H}^{N}(d)$は，項：$(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}$を含む。
ところで，これは次のようにかかれる。

$$(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}$$

$$=(-1)^{\beta}\frac{(d-1)(d-2)\cdots(d-\beta+1)}{\beta\,!}\cdot\frac{(s-d)(s-d-1)\cdots(s-d-N+\beta+1)}{(N-\beta)\,!}$$

上式の分子は，ｄについて，各，最高，β回，$N-\beta$回の掛け算，即ち$\beta+(N-\beta)=N$回の掛け算を行っており，そのとき，この回数のｄの積について，前者は，$(+1)$をβ回，後者は(-1)を$N-\beta$回掛けることになるから，最高次 d^{N} の係数は，

$$(-1)^{\beta}\cdot(+1)^{\beta}\cdot(-1)^{N-\beta}=(-1)^{N}$$

となることから，それは

$$\sum_{\beta}(-1)^{N}\frac{1}{\beta\,!(N-\beta)\,!}$$

と与えられ，これは，Ｎのいづれの範囲に於いても０となることはない。

それ故，$\mathbf{H}^{N}(d)$は，ｄについてＮ次の多項式となる。
一方，$\mathbf{H}^{N}(1)$は，Ｎを０以上とすると式(3°-8)の場合に相当し，式(3°-8)を直接計算することにより，次のように与えられる。

$$\mathbf{H}^{N}(1)={}_{(s-1)}C_{N}$$

式(3°-8′)，(3°-10′)，(3°-11′)は，いづれも${}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}$を含む。それ故，これを${}_{(s-1)}C_{N}$によって表現することを考えると次の関係式を得る。

(1) $d\geqq3$，$1\leqq\beta\leqq d-2$の場合

$${}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}=\prod_{\gamma_1=1}^{d-1}\frac{1}{(s-\gamma_1)}\cdot\prod_{\gamma_2=0}^{\beta-1}(N-\gamma_2)\cdot\prod_{\gamma_3=1}^{d-1-\beta}(s-N-\gamma_3)\cdot{}_{(s-1)}C_{N}$$

(2) $d\geqq2$，$\beta=0$の場合

$${}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}=\prod_{\gamma_1=1}^{d-1}\frac{1}{(s-\gamma_1)}\cdot\prod_{\gamma_3=1}^{d-1}(s-N-\gamma_3)\cdot{}_{(s-1)}C_{N}$$

(3)　$d \geqq 2$，$\beta = d-1$ の場合

$$ {}_{(s-d)}C_{(N-\beta)} = \prod_{\gamma_1=1}^{d-1} \frac{1}{(s-\gamma_1)} \cdot \prod_{\gamma_2=0}^{(d-1)-1} (N-\gamma_2) \cdot {}_{(s-1)}C_N $$

さて，$d \geqq 2$ ならば，この(1)，(2)，(3)のいづれの場合も，Nについて，最高 $d-1$ 回の掛け算となっており，しかも，そのときの $d-1$ 回の積の係数は，(1)の場合には，$(-1)^{d-1-\beta}$，(2)，(3)の場合には $(-1)^{(d-1)}$ となり，従って，$N^{(d-1)}$ の係数は，

(1)の場合には，

$$ \sum_{\beta} (-1)^{\beta} \cdot {}_{(d-1)}C_{\beta} \cdot (-1)^{(d-1)-\beta} \cdot \prod_{\gamma_1=1}^{d-1} \frac{1}{(s-\gamma_1)} \cdot {}_{(s-1)}C_N $$

$$ = \sum_{\beta} (-1)^{d-1} \cdot {}_{(d-1)}C_{\beta} \cdot \prod_{\gamma_1=1}^{d-1} \frac{1}{(s-\gamma_1)} \cdot {}_{(s-1)}C_N $$

となり，これは明らかに0ではない。場合(2)，(3)のときも，同様に，$N^{(d-1)}$ の係数が0ではないことは，β についての和の係数が $(-1)^{d-1}$ という定符号であることから，容易に，確かめられる。

従って，$\mathbf{H}^N(d)/\mathbf{H}^N(1)$ は，Nについて，$d-1$ 次の多項式となる。　□

この性質は，$\mathbf{H}^N(d)$ の細部での振舞いを厳密に表現していることになるが，と同時に，$\mathbf{H}^N(d)$ に関する解析的取扱いに対する限界も示していることになろう。

〔性質7〕 $1 \leqq N < s$ とする。このとき

(1)　$\mathbf{H}^N(1)$ は常に正であり，且つ，$N = [(s-1)/2]$ のとき，その最大を与える。

(2)　$d = 2, 3, \cdots, s-1$ に対して，常に，$|\mathbf{H}^N(d)/\mathbf{H}^N(1)| < 1$ がなりたつ。

〔証明〕

$\mathbf{H}^N(1)$ は，式(3°-8)，(3°-11)より直接求められ $\mathbf{H}^N(1) = {}_{(s-1)}C_N$ をうる。それ故，$\mathbf{H}^N(1) > 0$，且つ，$N = [(s-1)/2]$ のとき，最大になることは明らか。

さて，〔性質4〕，〔性質5〕の $\mathbf{H}^N(d)$ の対称性より，$|\mathbf{H}^N(d)/\mathbf{H}^N(1)|$ の性質を調べるに当っては，$N \leqq [(s-1)/2]$，$d \leqq [(s+1)/2]$ の範囲で十分である。

(1)　$d > N+1$ の場合

$$ \mathbf{H}^N(d) = \sum_{\beta=0}^{N} (-1)^{\beta} {}_{(d-1)}C_{\beta} \cdot {}_{(s-d)}C_{(N-\beta)} $$

それ故，

$$ \frac{|\mathbf{H}^N(d)|}{\mathbf{H}^N(1)} = \frac{\left| \sum_{\beta=0}^{N} (-1)^{\beta} {}_{(d-1)}C_{\beta} \cdot {}_{(s-d)}C_{(N-\beta)} \right|}{{}_{(s-1)}C_N} $$

$$<\frac{\sum_{\beta=0}^{N}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}}{{}_{(s-1)}C_N}=\frac{{}_{(s-1)}C_N}{{}_{(s-1)}C_N}=1$$

(2)　$d \leqq N+1 \leqq [(s+1)/2]$ の場合

$$\mathbf{H}^N(d)=\sum_{\beta=0}^{d-1}(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}$$

それ故

$$\frac{|\mathbf{H}^N(d)|}{\mathbf{H}^N(1)}=\frac{\left|\sum_{\beta=0}^{d-1}(-1)^{\beta}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}\right|}{{}_{(s-1)}C_N}$$

$$<\frac{\sum_{\beta=0}^{d-1}{}_{(d-1)}C_{\beta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(N-\beta)}}{{}_{(s-1)}C_N}=\frac{{}_{(s-1)}C_N}{{}_{(s-1)}C_N}=1$$

それ故，Nの全ての範囲について $|\mathbf{H}^N(d)|<\mathbf{H}^N(1)$ がなりたつ。　□

この性質は，漏話量 $\mathbf{H}^N(d)$ のうちで，i^* と最もハミング距離が近くにある $d=1$ のキーと，従って，〔性質4〕より，ハミング距離が最も遠くなる $d=s$ のキーとが，漏話量としては，最大のものになることを示している点で重要である。

ところで，前にも述べたが，実際の読出しに際しては，u（・）なる量子化関数によってその出力が決定されるから，読出しに際して問題になるのは，漏話量 $\mathbf{H}^N(d)$ の各 d 毎のもつ絶対的大きさではなく，$\mathbf{H}^N(0)$ に対する相対的な大きさである。ところで〔性質7〕では $\mathbf{H}^N(1)$ は $N=[(s-1)/2]$ のとき最大になることを示したが，それではNを低次のものからこの最大のところまで高次化をはかったとき，漏話量が増え，高次化は意味がなくなるのであろうか。これについて，次の性質がなりたつ。

〔性質8〕 $|\mathbf{H}^N(1)/\mathbf{H}^N(0)|$ は，$N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s-1$ に対して単調に減少する。

〔証明〕〔性質2〕より $\mathbf{H}^N(1)/\mathbf{H}^N(0)={}_{(s-1)}C_N/\Sigma_{\zeta=0}^{N}{}_sC_{\zeta}$ がなりたつ。

${}_{(s-1)}C_N=\Sigma_{\zeta=0}^{N}(-1)^{\zeta}{}_sC_{\zeta}$ となることから，全ての $N(0\leqq N\leqq s-1)$ について

$$\frac{\mathbf{H}^N(1)}{\mathbf{H}^N(0)}=\frac{\Sigma_{\zeta=0}^{N}(-1)^{\zeta}{}_sC_{\zeta}}{\Sigma_{\zeta=0}^{N}{}_sC_{\zeta}}\leqq 1$$

但し，等号は $N=0$ のときである。

さて，

$$\frac{\mathbf{H}^{N+1}(1)}{\mathbf{H}^{N+1}(0)}=\frac{{}_{(s-1)}C_{(N+1)}}{\Sigma_{\zeta=0}^{N+1}{}_sC_{\zeta}}=\frac{\Sigma_{\zeta=0}^{N+1}(-1)^{N+1+\zeta}{}_sC_{\zeta}}{\Sigma_{\zeta=0}^{N+1}{}_sC_{\zeta}}=\frac{{}_sC_{(N+1)}-\Sigma_{\zeta=0}^{N}(-1)^{N+\zeta}{}_sC_{\zeta}}{{}_sC_{(N+1)}+\Sigma_{\zeta=0}^{N}{}_sC_{\zeta}}$$

$$=\frac{{}_sC_{(N+1)}-{}_{(s-1)}C_N}{{}_sC_{(N+1)}+\Sigma_{\zeta=0}^{N}{}_sC_{\zeta}}=\frac{{}_{(s-1)}C_{(N+1)}}{{}_sC_{(N+1)}+\Sigma_{\zeta=0}^{N}{}_sC_{\zeta}}$$

となることに注意して，$\mathbf{H}^{N+1}(1)/\mathbf{H}^{N+1}(0)-\mathbf{H}^{N}(1)/\mathbf{H}^{N}(0)$を調べる。

$$\frac{\mathbf{H}^{N+1}(1)}{\mathbf{H}^{N+1}(0)}-\frac{\mathbf{H}^{N}(1)}{\mathbf{H}^{N}(0)}=\frac{{}_{(s-1)}C_{(N+1)}}{{}_{s}C_{(N+1)}+\sum_{\zeta=0}^{N}{}_{s}C_{\zeta}}-\frac{{}_{(s-1)}C_{N}}{\sum_{\zeta=0}^{N}{}_{s}C_{\zeta}}$$

$$=\frac{({}_{(s-1)}C_{(N+1)}-{}_{(s-1)}C_{N})\cdot\sum_{\zeta=0}^{N}{}_{s}C_{\zeta}-{}_{s}C_{(N+1)}\cdot{}_{(s-1)}C_{N}}{({}_{s}C_{(N+1)}+\sum_{\zeta=0}^{N}{}_{s}C_{\zeta})\cdot\sum_{\zeta=0}^{N}{}_{s}C_{\zeta}}$$

上式で，分母が正であることは明らかである。このとき，分子が負になることが次のようにして示される。

$$({}_{(s-1)}C_{(N+1)}-{}_{(s-1)}C_{N})\cdot\sum_{\zeta=0}^{N}{}_{s}C_{\zeta}-{}_{s}C_{(N+1)}\cdot{}_{(s-1)}C_{N}$$

$$=\frac{s-2(N+1)}{N+1}{}_{(s-1)}C_{N}\cdot\sum_{\zeta=0}^{N}{}_{s}C_{\zeta}-{}_{s}C_{(N+1)}\cdot{}_{(s-1)}C_{N}$$

$$=\left\{\frac{s-2(N+1)}{N+1}\sum_{\zeta=0}^{N}{}_{s}C_{\zeta}-\sum_{\zeta=0}^{N+1}(-1)^{N+1+\zeta}\cdot{}_{(s+1)}C_{\zeta}\right\}{}_{(s-1)}C_{N}$$

$$=\sum_{\xi=0}^{[N/2]}\left\{\frac{s-2(N+1)}{N+1}({}_{s}C_{(N-2\xi)}+{}_{s}C_{(N-1-2\xi)})+{}_{(s+1)}C_{(N-2\xi)}\right\}{}_{(s-1)}C_{N}$$

$$+(-1)\cdot\sum_{\xi=0}^{[N/2]}{}_{(s+1)}C_{(N+1-2\xi)}\cdot{}_{(s-1)}C_{N}$$

$$=\sum_{\xi=0}^{[N/2]}\left\{\left(\frac{s-2(N+1)}{N+1}+1\right){}_{(s+1)}C_{(N-2\xi)}-{}_{(s+1)}C_{(N+1-2\xi)}\right\}\cdot{}_{(s-1)}C_{N}$$

$$=\sum_{\xi=0}^{[N/2]}\left(\frac{s-(N+1)}{N+1}-\frac{s+1-N}{N+1-2\xi}\right){}_{(s+1)}C_{(N-2\xi)}\cdot{}_{(s-1)}C_{N}$$

$$=(-2)\cdot\sum_{\xi=0}^{[N/2]}\frac{1+\xi(s/(N+1)-1)}{N+1-2\xi}{}_{(s+1)}C_{(N-2)\xi)}\cdot{}_{(s-1)}C_{N}$$

ここで，$0\leqq N\leqq s-1$，$0\leqq\xi\leqq[N/2]$に対して

$$\frac{1+\xi(s/(N+1)-1)}{N+1-2\xi}>0$$

となるから，分子は負となり，従って，全てのNに対して

$$\frac{\mathbf{H}^{N+1}(1)}{\mathbf{H}^{N+1}(0)}<\frac{\mathbf{H}^{N}(1)}{\mathbf{H}^{N}(0)}$$

となることが結論される。 □

即ち，最大の漏話量となる$\mathbf{H}^{N}(1)$（従って$\mathbf{H}^{N}(s)$）の更に最大を与える$N=[(s-1)/2]$

付近の漏話量は，そのNに対応する$\mathbf{H}^N(0)$から相対的にみると，最も値の小さかった$\mathbf{H}^N(1)$よりも，相対的には，十分に小さくなっていることを示しているわけで，このことは，高次相関情報の次数の増大と共に，より漏話量の少ない読出し特性が実現されてゆくことを意味しているものと解釈される。

さて，今度は，Nを或る値に固定し（従って，或る特定の次数までの高次相関情報を付加しているとして），その次数以上の欠落の度合sを，順次，増加させていったとき，どのようになるか考えてみる。実は，sの増加にもかかわらず，漏話量が増加してゆくという“漏話の不滅減少”が観察される。

〔性質9〕$1 \leqq s$，$N < n$，且つ，$N < s$とする。

このとき，$s = N+1$，$N+2$，…，nに対して$\mathbf{H}^N(1)/\mathbf{H}^N(0)$は単調に増加する。

〔証明〕 $s = N+\xi$，$(\xi = 1, 2, \dots, n-N)$とおき，sの増加をξの増加で表す。

いま，

$$\mathbf{G}^{\xi}(N) = \frac{\mathbf{H}^N(1)}{\mathbf{H}^N(0)} = \frac{{}_{(s-1)}C_N}{\sum_{\zeta=0}^{N} {}_sC_\zeta}$$

を定義すると，$\mathbf{G}^{\xi}(N)$，$\mathbf{G}^{\xi+1}(N)$は，各々，次のように表される。

$$\mathbf{G}^{\xi}(N) = \frac{{}_{(N+\xi-1)}C_N}{\sum_{\zeta=0}^{N} {}_{(N+\xi)}C_\zeta},\quad \mathbf{G}^{\xi+1}(N) = \frac{{}_{(N+\xi)}C_N}{\sum_{\zeta=0}^{N} {}_{(N+1+\xi)}C_\zeta}$$

このとき，$\mathbf{G}^{\xi+1}(N)/\mathbf{G}^{\xi}(N)$は，次のようになる。

$$\frac{\mathbf{G}^{\xi+1}(N)}{\mathbf{G}^{\xi}(N)} = \frac{{}_{(N+\xi)}C_N}{{}_{(N+\xi-1)}C_N} \cdot \frac{\sum_{\zeta=0}^{N} {}_{(N+\xi)}C_\zeta}{\sum_{\zeta=0}^{N} {}_{(N+\xi+1)}C_\zeta}$$

$$= \frac{N+\xi}{\xi} \cdot \frac{\sum_{\zeta=0}^{N} {}_{(N+\xi)}C_\zeta}{\sum_{\zeta=0}^{N} \left\{\frac{N+1+\xi}{N+1+\xi-\zeta}\right\} {}_{(N+\xi)}C_\zeta} \geqq \frac{N+\xi}{\xi} \cdot \frac{1+\xi}{N+1+\xi}$$

但し，ここでの不等号は

$$\sum_{\zeta=0}^{N} \left\{\frac{N+1+\xi}{N+1+\xi-\zeta}\right\} {}_{(N+\xi)}C_\zeta \leqq \frac{N+1+\xi}{1+\xi} \sum_{\zeta=0}^{N} {}_{(N+\xi)}C_\zeta$$

であることを用いている。

ところで，一般に，任意の正数，a，b，mに対して，$a > b$ならば

$$\frac{b}{a}<\frac{b+m}{a+m}$$

がなりたつ。それ故，ここで，$a=1+\xi$，$b=\xi$，且つ，$m=N$とおけば

$$\frac{N+\xi}{\xi}\cdot\frac{1+\xi}{N+1+\xi}=\frac{1+\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi+N}{1+\xi+N}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b+m}{a+m}>1$$

となり，$\mathbf{G}^{\xi}(N)$の，$\xi=1, 2, 3, n-N$に対する単調増加性が示される。 □

ところで，この性質は，高次相関型連想記憶の基本的な性質とも考えられるし，同時に根幹的な欠点を示しているとも考えられる。通常，我々は，sの増加とともに，より多くの情報を与え，従って，それと共に想起の正確さは増加することを期待し，事実，高次相関連想記憶は，少くとも，より多くの情報を付加することにより想起特性の改善を図ることを意図したはずのものであるからである。しかし，この性質は，〔性質8〕までに示したものとは異なり，sの増加に伴う取得情報の増加は，同一次数である限り，実質的には漏話量の増大を引きおこすことと等価になることを述べているわけであり，それ故，我々は，次章で，その対策につき考察することにする。

4．偶奇性に基ずく連想型記憶の構成

前章で指摘された漏話の不滅現象に対する対応策を考えるため，本章では，まず，$\mathbf{H}^{N}(d)$の構成要素となっていた$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$（$\alpha=0, 1, \cdots, N$）について，再度，その性質を調べ，キーベクトルの偶奇性に基ずく記憶方法を考えることにより，必ずしも，拡大次数を増やすことなく，適応的に，不滅現象に対応できることが示される。

4－1　$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$の性質

重み関数$\mathbf{H}^{N}(d)$と，その構成要素$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$，（$\alpha=0, 1, 2, \cdots, N$）との間の関係を再起する。

$$\mathbf{H}^{N}(d)=\sum_{\zeta=0}^{N}H^{(\alpha)}(d) \tag{4-1}$$

$$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)=<\mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{x}^{(i)})\cdot\mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{x}^{i*}(s))> \tag{4-2}$$

$$=\sum_{\zeta=0}^{d}(-1)^{\zeta}{}_{d}C_{\zeta}\cdot{}_{(s-d)}C_{(d-\zeta)} \tag{4-3}$$

前章では，高次相関型連想記憶の読出し特性を，より直接的に明らかにするため，構成要素$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$の和である$\mathbf{H}^{N}(d)$の性質が調べられた。それでは，個々の$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$はどのような性質をもっているのであろうか。このことを調べてみると，以下の性質のあることが分かる。但し，厳密な証明は紙数の関係で省略する。

〔性質1〕$1\leqq s\leqq n$，$1\leqq\alpha\leqq$〔$s/2$〕とする。このとき，$d=0, 1, \cdots,$〔$s/2$〕に対して，

$\mathbf{H}^{(\alpha)}(s-d)=(-1)^{(\alpha)}\cdot\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$が成立する。

〔性質２〕 $1\leqq s\leqq n$，$1\leqq d\leqq[s/2]$ とする。このとき，$\alpha=0, 1, \cdots, [s/2]$ に対して，$\mathbf{H}^{(s-\alpha)}(d)=(-1)^{d}\cdot\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$が成立する。

〔性質３〕 $1\leqq s\leqq n$，$0\leqq\alpha\leqq s$ とする。このとき

$0\leqq\alpha\leqq[s/2]$ ならば，$\mathbf{H}^{(\alpha)}(1)\geqq 0$

$[s/2]+1\leqq\alpha\leqq s$ ならば，$\mathbf{H}^{(\alpha)}(1)\leqq 0$

がなりたつ。

〔性質１〕と〔性質２〕は，$\mathbf{H}^{N}(d)$の構成要素$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$，$(d=0, 1, 2, \cdots, s, \alpha=0, 1, 2, \cdots, s)$ もまた，著しい対称性を有していることを示している。即ち，$0\leqq\alpha\leqq[s/2]$，$0\leqq d\leqq[s/2]$ の$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$の値が，それ以外のところでの$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$に，それぞれ，絶対値が等しく符号はα，dの偶奇性だけにもとずいて対応ずけられる。但し，〔性質１〕で，前章での$\mathbf{H}^{N}(d)$は，区間$1\leqq d\leqq s$でのものであったのに対して，ここでの$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$は$0\leqq d\leqq s$での対称性になっていること，また〔性質２〕では，$\mathbf{H}^{N}(d)$は $(-1)^{d-1}$の対称性であったのに対して，ここでの$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$は $(-1)^{d}$となっていることは注意しなければならない。

ところで，前章では，最大の漏話量を与える$d=1$での$\mathbf{H}^{N}(1)/\mathbf{H}^{N}(0)$の性質が調べられた。これに対応して，$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$の〔性質３〕の性質をみる。

すなわち，前章〔性質８〕から，$\mathbf{H}^{N}(1)/\mathbf{H}^{N}(0)$はNを逐次増加させれば単調に減少させることができる。一方，〔性質７〕から$\mathbf{H}^{N}(1)$は，他のあらゆる$\mathbf{H}^{N}(d)$の内で最大となるのであるから，結局，Nを増大させれば，$\mathbf{H}^{N}(0)$に対する他のあらゆる$\mathbf{H}^{N}(d)$の比の値もそれに伴って減少させることができる。これは，直ちに，連想型記憶の読み出し特性の改善を意味し，漏話の不滅現象もまた例外でなく改善されうる。

しかし，このような拡大次数Nを単に増加させる方法は，それに伴う記憶空間を単調に増大させるだけのことであるから，我々は，これ以外の方法で，漏話量を減少させることができないかどうか考えてみる。

このようなことを考えるに当って，$\mathbf{H}^{(\alpha)}(1)$に関する〔性質３〕の結果は極めて興味深い。それは，$\mathbf{H}^{(\alpha)}(1)$が，$\alpha=[(s+1)/2]$を中心にして，その符号を変えることにある。

即ち，比較的低次のNで記憶空間を構成した場合，$s>N$なる欠落に対しては，$\alpha>N$なるαの構成要素$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$は，当然，記憶されてはいないのであるが，$\alpha\geqq[(s+1)/2]$に対する$\mathbf{H}^{(\alpha)}(1)$は，それ以下の$\mathbf{H}^{(\alpha)}(1)$に対して必ず符号を異にしているのであるから，若し，何らかの方法を考え，前者を後者に加える；または，それと等価なことができればそれは少なくとも記憶空間を増大させることなく，$\mathbf{H}^{N}(1)$のところの漏話量は減少させることができると考えられる。

いま，何らかの方法が解決したものとして，このときの状況を調べてみる。

〔性質４〕 $s>N$，εを，$0\leqq\varepsilon\leqq s$なる適当な正の整数として，次のような重み関数$\mathbf{G}^{\varepsilon}(1)$を

考える。

$$\mathbf{G}^{\varepsilon}(1)=\mathbf{H}^{N}(1)+H^{(\varepsilon)}(1)$$

このとき，N≦〔s/2〕ならばε≧s－N, N＞〔s/2〕ならばε＞N に対して

$$\frac{\mathbf{G}^{\varepsilon}(1)}{\mathbf{G}^{\varepsilon}(0)}\leqq\frac{\mathbf{H}^{N}(1)}{\mathbf{H}^{N}(0)}$$

がなりたつ。

〔証明〕$\mathbf{H}^{N}(1)$は，N＋1個の$\mathbf{H}^{(\alpha)}(1)$から構成されている。即ち

$$\mathbf{H}^{N}(1)=\sum_{\alpha=0}^{N}\mathbf{H}^{(\alpha)}(1)$$

である。このとき，〔性質３〕より，N≦〔s/2〕ならばε≧s－N，N＞〔s/2〕ならばε＞N を満たすεに対しては，$\mathbf{H}^{(\varepsilon)}(1)$は，いつでも，負であり，一方，N＜s であるから前章〔性質７〕より$\mathbf{H}^{N}(1)$は正である。従って

$$\mathbf{G}^{\varepsilon}(1)=\mathbf{H}^{N}(1)+\mathbf{H}^{(\varepsilon)}(1)\leqq\mathbf{H}^{N}(1)$$

が成り立つ。一方，$\mathbf{H}^{N}(0)$，$\mathbf{H}^{(\varepsilon)}(0)$は常に正であるから

$$\mathbf{G}^{\varepsilon}(0)=\mathbf{H}^{N}(0)+\mathbf{H}^{(\varepsilon)}(0)\geqq\mathbf{H}^{N}(0)$$

であり，従って

$$\mathbf{G}^{\varepsilon}(1)/\mathbf{G}^{\varepsilon}(0)\leqq\mathbf{H}^{(N)}(1)/\mathbf{H}^{N}(0)$$

が成り立つ。 □

この性質は，$\mathbf{H}^{N}(1)/\mathbf{H}^{N}(0)$を減少させると云う意味で望ましいものである。しかし，これは欠落が s＞N である以上，εに対応する情報を記憶していないから直接実行できるものではない。しかし，例えば，$\mathbf{H}^{(s)}(d)$に対応する$\prod_{j=1}^{s}x_j^{(i)}$のようなものはいつでも作りうる（或いは計算可能である）ことを考えてみると，これは，計算する回路を新たに付加することにより，これを実行可能にする一つの考え方を導く。即ち，次節で提案するように，記憶に用いられるキーベクトルに予め偶奇性と呼ばれる一定の性質をもたせるように，或いは，この偶奇性にもとずいて予め分類して記憶しておけば，この一定の性質を手掛りにして，与えられたキーから見かけ上の高次の$H^{(\alpha)}(d)$を得る考え方である。

4－2　高次相関型連想記憶に於ける偶奇性の導入

二値のキーベクトルの高次相関情報は，例へその次数がどのようなものであれ，常に，±1の値をとる。そこで，いま，i番目のn次相関情報，即ち，$\prod_{j=1}^{n}x_j^{(i)}$が，値1をとるならば，このキー

ベクトルは，偶の偶奇性をもつと呼び，若し，値－1をとるならば，奇の偶奇性をもつ呼ぶことにすると，記憶に用いられる全てのキーベルトルは，偶または奇の偶奇性のいづれかに分類される。勿論，このとき，キーベクトル $\mathbf{x}^{(i)}=\mathrm{col}\,(x_1^{(i)},\ x_2^{(i)},\ \cdots,\ x_n^{(i)})$ に新たな成分 $x_{n+1}^{(i)}$ を付加して都合n＋1次の高次相関情報が，全てのiについて，どちらか一方の偶奇性に属するように $x_{n+1}^{(i)}$ を定めることは，いつでも可能である。ところで，この後者の方法は，キーベクトルに，所謂，冗長度を導入することであり，この際には，記憶できるキーベクトルの総数は，実際のベクトルの長さn+1について考えられる 2^{n+1} の半分，即ち，2^n になる。

ところで，この後者のように，冗長度を付加せずに，偶の偶奇性のものと，奇の偶奇性をものとを，それぞれ，記憶の段階で，別々の記憶空間に分けて記憶するものとすると，記憶できるキーベクトルの総数は，記憶空間の大きさは2倍になるものの，2^n と変りはない。とにかく，ここでは，これらいづれかの方法によって，記憶空間の偶奇性を一つのものになるように予め揃えて記憶したとしたときに，どのようなことがいえるかそれを問題にする。

〔性質1〕キーベクトルの長さをnとし，記憶空間は一定の偶奇性をもっているものとする。このとき，N次までの拡大を施した高次相関型連想記憶では，$N \leqq [n/2]$ とすると，$s \geqq n-N$ なる欠落に対して，n－N次以上の高次相関情報を必ずとりこむことができる。

〔証明〕記憶空間は，偶の偶奇性をもっているものとする。入力として与えられた欠落をもつキーを

$$\mathbf{x}^{i*}(s)=\mathrm{col}(x_1^{i*},\ x_2^{i*},\ \cdots,\ x_s^{i*},\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ i^* \in \mathbf{I}$$

としたとき，ここでは，これを

$$\mathbf{x}^{i*}(s)=\mathrm{col}(x_1^{i*},\ x_2^{i*},\ \cdots,\ x_s^{i*},\ x_{s+1},\ x_{s+2},\ \cdots,\ x_n)$$

と書く。

このとき，x_{s+1}，x_{s+2}，…，x_n は，各々，値0ではあるが，実は，記憶空間の偶奇性からsの値によっては，それらの積の値を既知することができる。

即ち，$i^* \in \mathbf{I}$ ならば，記憶空間が偶の偶奇性をもっているものとすると

$$\prod_{j=1}^{s} x_j^{i*} \cdot \prod_{j=s+1}^{n} x_j = 1$$

がなりたち，且つ，連想型記憶はN次までの積の値を全てもっているから，若し，0として与えられているn－s個の部分について

$$n-s \leqq N$$

がなりたてば，

$$\prod_{j=s+1}^{n} x_j = \prod_{j=1}^{s} x_j^{i*}$$

となり，これは，最初，０として未知だったものが，その積の値に関しては，与えられたｓ個のものから計算できるということを意味する。

明らかに

$$n-s>N$$

の場合には，こういうことはできない。

ところで，この計算可能な場合，その計算の仕方を少し修正して，次のようなことを考えてみる。即ち，現在は０であるため，情報として無意味になっている部分の情報が記憶されているところへ，既知のところの組合せを種々変えた積の値を作り，それを，あたかも，０の部分が与えられているかのように，入力として代用して印加することである。

このとき，この考え方が，実行可能であることが，次のようにして示される。
いま，$s=n-N+\kappa$ として，$\kappa \in \{0, 1, 2, \cdots, N\}$ とすれば，既知の部分からは

$$\sum_{\beta=0}^{\kappa} C_{(s-\kappa+\beta)}$$

個の互いに異なる組合せをとりうる。

即ち，x_j の添字集合を，$\mathbf{J}=\{j \mid j=1, 2, \cdots, s\}$ として

$$\mathbf{J}^{\beta}=\{(j_1(\beta), j_2(\beta), \cdots, j_{n-N+\beta}(\beta)) \mid j_{\nu}(\beta) \in \mathbf{J},\ \nu=1, 2, \cdots, n-N+\beta\}$$
$$(\beta=0, 1, \cdots, \kappa)$$

但し，(・，・，…，) は要素・・・の組合せを表す
とすると，$\mathbf{J}^{\beta}$ の各要素に対して，積：

$$\prod_{j_{\nu}(\beta) \in \mathbf{J}^{\beta}} x_{j_{\nu}(\beta)}^{i*}$$

を作ると，この値は，記憶空間が隅の偶奇性の場合には，次式と同じ値である：

$$\prod_{j=s+1}^{n} x_j \cdot \prod_{j_{\nu}(\beta) \in \mathbf{J}^{\beta}} x_{j_{\nu}(\beta)}^{i*}$$

ところで，この値は，高々，Ｎの積であるから，Ｎ次までの高次相関情報をもつ連想型記憶では，必ず，記憶情報としてもっている。

それ故，この記憶場所に，先ほどの値を入力して掛けてやることが可能になる。偶奇性が奇のものについても，符号の変更を除いて，同様の計算を行ない，若し，これが別の記憶空間に属するものであれば，偶のものに加えてやる。

ところで，これらの計算は，入力0として想起した後に，新たな計算量として加えて行くことにすると，この後者の計算によって加えられるものは，実は，s次からs－κ次までのみκ＋1個の高次相関情報としての構成要素$\mathbf{H}^{(\alpha)}(d)$，(α＝s，s－1，…，s－κ)を加えたことになることは明らかである。 □

漏話の不滅現象は，sの増加と共に漏話量が大きくなる。ところで，ここで示した方法による高次相関情報の付加は，s≧n－Nであればその付加が始まることになり，しかもsの増加と共に，作りうる組合せの量も増加してゆくから，付加される高次相関情報も多くなってゆくことになり，この意味で，〔性質1〕の方法は，一つの適応性も持ち合せた方法になっていることも分かる。

5．結　　論

連想型記憶では，全てのデーターがキーとの対を作りながら，或る記憶空間に重ね合わせて記憶される。そのため，必然的に漏話が発生し，特に，記憶されるデーター数が多くなるにつれて，正確な想起がむつかしくなる。高次相関型連想記憶は，より高次の相関情報をキーに取り入れることによって，この漏話量の抑制を意図したものであるが，本論文では，入力キーに全く任意の欠落を許すより一般的な場合について，このとき発生する漏話量を相関次数Nによって陽な形で表現することを試み，高次相関型連想記憶の漏話の生成のされ方についての基本的記述を与えた。今後，これをもとにした統計的立場からの特性評価がなされねばならない。

一方，3章の〔性質9〕で示した漏話の不滅現象の発生の指摘は，高次相関型連想記憶の基本的な性質とも考えられるし，同時に，高次相関型連想記憶が与える特性の限界を与えるものとも解釈される。それ故，本論文では，この現象に対処する一つの対策を与え，その有効性を確認したが，しかし，これを発展的に拡張することが今後の課題として残されている。

最後に，卒業論文として電子計算機によるシミュレーションに協力していただいた本学卒業生諸氏に，心から感謝申し上げるとともに，本稿をまとめるに当って御助力いただいた杉本敏勝・後藤智明の両君に御礼申し上げます。

参考文献

1) Kogge, P. M：The Architecture of Pipelined Computer, Washington, New York, London：McGraw-Hill 1981
2) Foster, C. C：Content Addressable Parallel Processors, New York：Van Nostrand Reinhold 1976
3) Frindler, N. V：Associative Networks, New York：Acedmic Press 1979
4) Nakano, K：Asociatron-a model of associative memory, IEEE Trans. Syst. Man Cyber. 2, 380-388(1972)
5) Kohonen, T：Correlation Matrix memory. IEEE Trans. Comp. 21, 353-359(1972)
6) Kohonen, T：Representation of associated data by matrix operators, IEEE Trans. Comp. 22, 701-702(1973)

7) Kohonen, T：Associative memory, Berlin, Heideberg, New York：Springer 1978
8) Poggio, T.：Optimal nonlinear associative recall. Biol. Cybern. 19, 201-209(1975)
9) 市川・黒木：展開型高次相関行列を用いる連想記憶，電子通信学会論文誌(A), J66-A, 2, 115-121(1983)