分数の教授学的研究

分数の教授学的研究

山口　　格

Didactical study of fractins

Kaku YAMAGUCHI

Abstract

The aim of this paper is to discuss new methods of teaching fractions in mathematics. E, Landau's mathematical theory of fractions are compaired with Toyama's methods of teaching fractions.

1．はじめに

数学教育というものは，たとえそれがどの学校段階においてであっても，学問としての数学を教えることを目的とするという立場を，われわれはかねてから表明したきた[1)]。現在おこなわれている数学教育のそれぞれの実践が，はたしてその意味で目的にかなっているものであるかを検討することは，学問としての数学を教えることを目的とするという立場がどのように可能であるのかを具体的に示す端緒になるであろう。

小論においては，戦後の民間教育運動（民教運動）の中心的存在であった数学教育協議会（数教協）のとなえた「量にもとずく数学教育」という観点に立った，分数の実践プログラムの代表例の一つを取りあげ，学問としての数学を教えるという立場から検討してみたものである。

分数については既に1951年および1958年の文部省の指導要領以降所謂「割合分数」にかかわって論議がおこなわれてきた。そのことについてはじめに簡単に総括し，次に分数の数学的理論の概要を提示する。最後に現行の代表的実践プログラムを分数の数学的理論の内容と対比検討することにしたい。

2．分数の数学論

分数とは何かということについて，様々な見方がある。1958年（昭和33年）の文部省指導要領では分数について次のようになっていた。

2年　A．数と計算の(9)

具体的な事物の取り扱いを通して，割合の考え方の基礎となることが

らについて理解させる。

ア．……の２ばい

……の$\frac{1}{3}$（三ぶんの一）などの意味を知ること。

３年　Ａ．数と計算の(11)

簡単な場合について，等分してできる大きさまたは端数部分などを表すのに，分数および小数を用いることを知らせる。

４年　Ａ．数と計算の(12)

分数の意味について理解させるとともに，分数についても加法・減法などの計算ができることを知らせる。

Ｃ．数量関係の(1)

二つの数量の割合について理解を深める。

ア．たとえば，二つの量Ａ，ＢについてＡの大きさを２とみるとき，Ｂの大きさが３とみられるという考え方や，またそのとき，ＡはＢの$\frac{2}{3}$であり，ＢはＡの$\frac{3}{2}$であることなどを知ること。

この1958年の指導要領では「割合」という言葉が出て来るので，割合分数という概念を小学校の数学教育の内容としていると考えられる。この割合という考え方は，上にもあるように，Ａ，Ｂという二つの自然数があたえられたとき，それを比という立場からみているのである。任意に与えられたＡという量（数）を２とみるということは，子どもにとってはたいへん困難なことである。１は１，２は２…と自然数を習っている時期にＡを２とみよ（このことのなかには当然，与えられたものを１としたらという考え方がはいっている）というのはむづかしいのである。

遠山啓はこの割合分数を批判して，量分数で教えることを主張した[2]。この量分数という言葉は遠山の作った言葉のようであるが次のように説明される。「まず連続的な外延量の抽象的な表現として分数を定義する。それは加法や乗法の演算から切り離して分数を一つの実体概念としてとらえさせる。つまり，$\frac{2}{3}$は$\frac{2}{3}$ｍや$\frac{2}{3}\ell$から抽象されたものとみなすのである。そのさい，量としては外延量だけをとりあつかっておけばよいのである。そうすれば，合併から加法がでてくるので，分数の加法や，その逆としての減法は容易に理解できる。そこには乗除はまだ介入してこないし，その必要もない。数としては加法群としての分数だけを考えていくことができる[3]。」

遠山啓の言う，連続的な外延量の抽象的な表現として分数を考えるという考え方は，遠山だけでなく，多くの人が以前から主張している。たとえばクラインは次の様に述べている。「学校教育における分数の取り扱いから説明をはじめよう。整数の直観的なモデルにくらべて，ただ土台がかわっただけである。すなわち，物の個数からその分量に，数えられるものの考察から，測られるものの考察へとうつったのである。貨幣とか重量の体系は，ある条件つきで，また長さの体

系は完全に可測な集合の例を与える。これらは分数の概念を生徒に与える実例である[4)]。」ここでクラインのいう測られるものというのが遠山の連続的な外延量に相当していることは明らかである。またアレクサンドロフは次のように述べている。「ところで量をはかる場合には，一般的にいって，選ばれた単位ではかられる量が整数回で割切れず，しかも単位をただ数えただけでは間に合わないことがあるのである。こういう場合には，単位を割ったもの，すなわちもはや整数ではなく分数によるほうがより正確に量をあらわすことができるから，単位を分割することが必要になる。分数はつぎにあげる歴史上またはその他の事実の分析がしめしているように，実際的なものとして生まれたのである。分数は，連続量の分割と比較から，すなわち，計量から生まれた。人間が計量した最初の量は，長さ，播種面積，液体や粉体の体積などの幾何学的量であった。したがって分数の発生そのもののなかに，算術と幾何の相互作用が見られるのである。この相互作用が分数という新しい重要な概念を出現させ，整数から分数への数概念の拡張をもたらした[5)]。」

遠山啓は割合分数を批判するのに次の観点を出している。分数を二つの分離量の割合とみる，割合分数の考え方は，クロネッカーの数え主義に源をもっている。クロネッカーが自然数だけを数とみて，他の数を自然数から人工的に作られたものとみたことはよく知られているが，この考え方が黒表紙教科書以来の日本の数学教育の中心的潮流として，割合分数という姿をとって現れたのである。この考え方で分数をみると，分数は分子と分母の二つの自然数の対とみられる。これは代数学における商体の考え方である。たとえば$\frac{2}{3}$は（２，３）という二つの自然数の対とみて，それらの対のあいだに加減乗除の演算を形式的に導入する。そして$\frac{2}{3}$がどのような大きさであるかを問題にしない。つまり抽象代数的考え方で，演算の形式（規則）のみが問題にされて，量の観点はない。量の追放を云ったのは黒表紙教科書を作った藤沢利喜太郎であるが，割合分数はクロネッカー，藤沢の流れをくんで量を追放しているのである。遠山啓は以上のような論旨で，割合分数を批判しているのであるが，この遠山の考え方の中に現代数学の商体という概念に言及したところが出て来る。その部分を遠山啓の文章から引用してみよう。「分数や小数は歴史的にも連続量の抽象化として出現したことは疑問の余地のないところであるが，〈クロネッカー——藤沢利喜太郎〉の“量を放逐すべきだ”という立場からすれば，分数・小数をまったくべつの方法によって導入するほかはない。そのようにして考えられたのが，分数を一つの量ではなく，二つの整数の組として定義する方法である。その方法は，たとえば，ファン・デル・ウェルデンの「現代代数学」の第１巻で展開されているような整域から商体を構成する形式的方法である。分数は二つの整数a，bの組（a，b）として定義される。それは一つの量ではなく，あくまで二つの整数の組にすぎない。クロネッカーによれば，a，bという整数は愛する神がつくり給うたのであるが，$\frac{2}{3}$という分数は『人間業（わざ）（Menschenwerk）で，神ならぬ人間のデッチあげたつくりもの』で，つまらぬものであるから，（２，３）という二つの整数の組と考えれば，人は手を

汚さずにすむ，というわけである[6]。」遠山啓は今みたように，割合分数を推進する人々は，量を追放する為に，商体という概念をとりあげたと述べている。遠山は割合分数が量に依拠していないのを非難するあまり，現代数学の分数の理論である商体までを否定してしまったように見える。つまり，割合分数＝商体という図式で，割合分数を葬るついでに，「学問としての数学を教える」という道を問うべき現代数学の概念をそまつに扱ってしまったのではなかろうか。

3．分数の定義について

そこでこれから，遠山啓の量分数の理論にもとづく，実践プランを現代数学の立場から検討してみよう。量分数の実践プランとしてとりあげるのは「わかるさんすう」4および5の分数の部分である[7]。はじめに「わかるさんすう」4の分数の導入の部分をみてみよう（図版1参照)。底面が1辺10㎝の正方形になっている直方体の水そうに水を入れておいて，何ℓはいっているか水の量をはかることからはじめる。高さ20㎝と小々の水量である。水そうの側面に水の高さまで，はば10㎝のテープをはったと考えて，そのテープを10㎝×10㎝の正方形の紙タイルで折り紙をしてはかる。正方形タイル（10㎝×10㎝）2枚とはんぱがでる。次にそのはんぱを単位にして，正方形をおりかえすと，ちょうどはんぱが3つ分でタイル1枚になる。このはんぱは3つ分で1ℓを表すタイル1枚になるから，1を3等分した大きさである。このはんぱの大きさを$\frac{1}{3}$と定義し「3分の1」という。テープ全体の大きさは1辺10㎝の正方形2つとはんぱの$\frac{1}{3}$だから「2と3分の1」とか「2か3分の1」といって，$2\frac{1}{3}$と書くというふうに帯分数の定義をする。そして「はじめの水の量は$2\frac{1}{3}$ℓです。」と量を表現する量分数として分数の導入を行っている。次に資料1の196頁では，長方形の紙㋐の大きさを求めている。ここでは水の量ではなく，紙の大きさを長方形のたての長さを一辺とした正方形ではからせる。1のタイル（正方形）が3つとはんぱがでる。はんぱのタイル㋑で1のタイルをはかると，2個分と㋒のはんぱがでる。㋒で㋑をはかるとちょうど2個分で㋑になる。㋑の大きさをa，㋒の大きさをbとすると，

$$1=2a+b$$

$$a=2b$$

となる。これより

$$1=5b$$

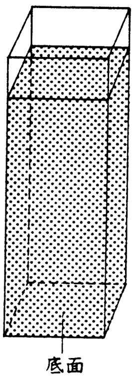
つまり㋒の大きさは1を5等分した大きさである。従って㋒は$\frac{1}{5}$となる。㋑は$\frac{1}{5}$が2つぶんであるがこれを「5分の2」と定義し，$\frac{2}{5}$と書く。㋐の大きさは3と$\frac{2}{5}$で，$3\frac{2}{5}$となる。そしてこのあとに「$\frac{2}{5}$の下の数を分母，上の数を分子といいます。分母は1を等分した大きさ，分子はそれがいくつあるかを表わします。$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{5}$，…のような$\frac{分子}{分母}$になっている数を分数といいます。」と分数の定義をしている。

この導入の部分の特徴は，(1)　量の測定から，連続量のはんぱを表すものとして分数を導いて

いる。(2) 帯分数から入っている。(3) 1のタイルを等分した単位分数（分子が1の分数）と，そのいくつ分という形に分母，分子を意味づけている。(4) 互除法を用いている，などである。

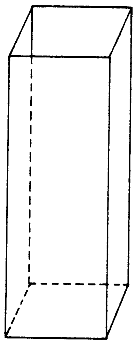
8．分　　数

1）分数のおいたち



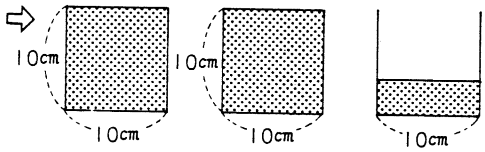
底面が1辺 10 cmの正方形になっている直方体の水そうに，水がはいっています。

水は何ℓあるでしょう。

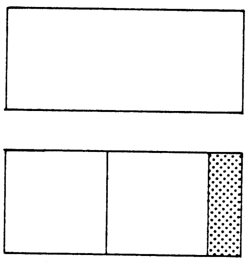


水そうに水が何ℓはいっているか，はかりました。

2ℓとすこしです。

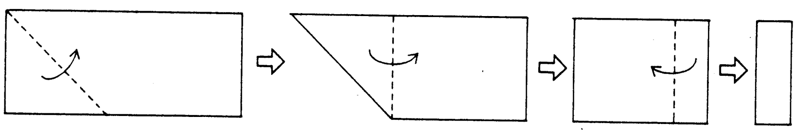


はんぱの量はいくらになるか，横 10 cm，たては水そうの水の高さと同じ長方形の紙を使って調べましょう。1辺 10 cmの正方形で水1ℓを表わすことにします。

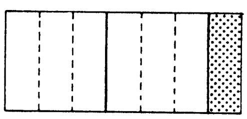


この紙タイルを下の図のようにおります。

はんぱの大きさがわかれば，水の量がわかります。



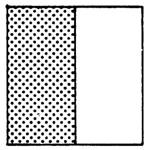
はんぱの大きさでおりかえすと，ちょうど3つぶんで1になります。



おり目をつけて，ひろげてみると，はんぱの大きさは1を3等分した大きさです。この大きさを「3分の1」といい，$\frac{1}{3}$ と書きます。

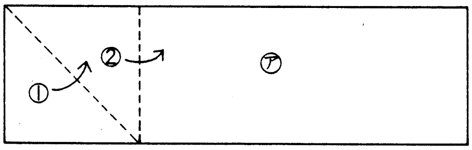
長方形の紙の大きさは2と$\frac{1}{3}$です。これを「2か3分の1」とか，「2と

3分の1」といいます。$2\frac{1}{3}$と書きます。はじめの水の量は$2\frac{1}{3}$ℓです。

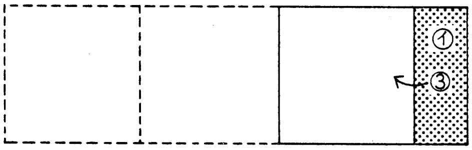


2つぶんで1になる大きさ，つまり，1を2等分した1つぶんを「2分の1」といい，$\frac{1}{2}$と書きます。

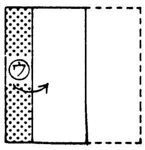
1．紙タイルをおって，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$　のタイルを作りなさい。



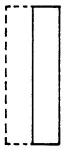
左のような長方形の紙㋐の大きさは，いくらでしょう。



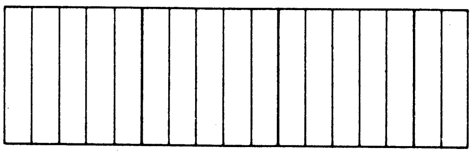
1のタイルが3つとちょっとです。はんぱでおりかえしました。



はんぱのタイル㋑では，2個ぶんとれて，1にちょっとたりません。㋒があまります。

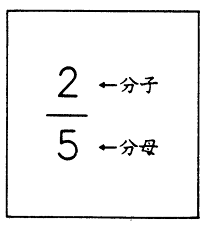


㋒でおりかえしました。ちょうど2個ぶんで㋑になりました。



㋒の大きさは，1を5等分した大きさです。㋒は$\frac{1}{5}$です。㋑は$\frac{1}{5}$が2つぶんです。

$\frac{1}{5}$が2つぶんの大きさを「5分の2」といい，$\frac{2}{5}$　と書きます。㋐の大きさは3と$\frac{2}{5}$です。これを「3か5分の2」または「3と5分の2」といい，$3\frac{2}{5}$と書きます。



$\frac{2}{5}$　の下の数を分母（ぶんぼ），上の数を分子（ぶんし）といいます。分母は1を等分した大きさ，分子はそれがいくつあるか

を表わします。$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, ……のような$\frac{分子}{分母}$になっている数を**分数**といいます。

この方法を短く表現すると「量の分割分数」とでも云うべき内容である。

ここで上にあげた特徴の(4)互除法を用いていることについて検討してみよう。互除法は次の割り算定理に基づいている。

定理　(割り算定理)　任意の整数aと$b>0$に対して

$$a=qb+r \qquad (0\leqq r<b)$$

となる整数q, rがただ一組存在する。

この定理は，整数aを整数$b>0$で割ると，商pが立って余りr ($0\leqq r<b$) がでるという内容であるから，割り算定理と呼ぶことにする。この割り算定理を用いて互除法（Euclidの互除法とも云う）を説明しよう。**R**を実数全体の集合，**Z**を整数全体の集合とする。いまa, $b\in\mathbf{R}$, (a, $b>0$) が与えられたとき，

$$x_0=a, \quad x_1=b$$

とおき，以下順次にx_2, x_3, $\cdots\in\mathbf{R}$を次のように定める。

$$(1)\begin{cases} x_0=\mathrm{k}_0x_1+x_2 & (0<x_2<x_1,\ \mathrm{k}_0\in\mathbf{Z},\ \mathrm{k}_0\geqq 0) \\ x_1=\mathrm{k}_1x_2+x_3 & (0<x_3<x_2,\ \mathrm{k}_1\in\mathbf{Z},\ \mathrm{k}_1>0) \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{m-2}=k_{m-2}x_{m-1}+x_n & (0<x_m<x_{m-1},\ k_{m-2}\in\mathbf{Z},\ k_{m-2}>0) \\ x_{m-1}=k_{m-1}x_m & (k_{m-1}\in\mathbf{Z},\ k_{m-1}>0) \end{cases}$$

もしa, $b\in\mathbf{Z}$であれば，x_2, $x_3\cdots\in\mathbf{Z}$, $x_1>x_2>\cdots>x_n>\cdots\geqq 0$であるのである$m$に対して，$x_m=(a,\ b)$, $x_{m+1}=0$となる。a, $b\in\mathbf{Z}$のとき，この操作は割り算定理を有限回くりかえすことになる。a, $b\in\mathbf{Z}$のとき，x_mは$(a,\ b)$すなわちaとbの最大公約数となることはよく知られている。

例1．$a=42$, $b=11$とすれば

$$42=3\times 11+9$$

$11 = 1 \times 9 + 2$

$9 = 4 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1$

となる。この場合 $k_0 = 3$，$k_1 = 4$，$k_3 = 2$ となり，$(42,\ 11) = 1$ である。

さて Euclid の互除法は次に述べる連分数と深く関っている。a，b を正の整数として，有理数 $\frac{a}{b}$ を連分数で表してみる。

$x_0 = a$，$x_1 = b$ として Euclid 互除法を行い

$$\omega = \frac{x_0}{x_1},\quad \omega_1 = \frac{x_1}{x_2},\quad \cdots,\quad \omega_{m-1} = \frac{x_{m-1}}{x_m}$$

とおく。ここで

$$\omega > 0,\quad \omega_1 > 1,\quad \cdots\ \omega_{m-1} = k_{m-1} > 0$$

であって

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \omega = \dfrac{x_0}{x_1} = k_0 + \dfrac{x_2}{x_1} = k_1 + \dfrac{1}{\omega_1} \\[2ex] \omega_1 = \dfrac{x_1}{x_2} = k_1 + \dfrac{x_3}{x_2} = k_1 + \dfrac{1}{\omega_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \omega_{m-2} = \dfrac{x_{m-2}}{x_{m-1}} = k_{m-2} + \dfrac{x_m}{x_{m-1}} = k_{m-2} + \dfrac{1}{\omega_{m-1}} \\[2ex] \omega_{m-1} = k_{m-1} \end{array}\right.$$

となる。

したがって

$$\begin{aligned} \omega &= k_0 + \frac{1}{\omega_1} \\ &= k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{\omega_2}} \\ &= \ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cdots\cdots + \cfrac{1}{k_{m-2} + \cfrac{1}{k_{m-1}}}}} \end{aligned}$$

の形に表わされる。この形を連分数（continued fraction）といい

(3)　$\omega = k_0 + \frac{1}{k_1} {}_{+} \frac{1}{k_2} {}_{+} \cdots {}_{+} \frac{1}{k_{m-1}}$

と書く。あるいはもっと簡単に

(4)　$\omega = [k_0,\ k_1,\ \cdots,\ k_{m-1}]$

とも表す。

例２　前の例１を用いると$\frac{42}{11}$は

$$42 = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}$$

$$\frac{42}{11} = 3 + \frac{1}{1} {}_{+} \frac{1}{4} {}_{+} \frac{1}{2} = [\,3,\ 1,\ 4,\ 2\,]$$

と連分数で表される。

「わかるさんすう」４の分数の導入の部分の２番目の例（資料１，p. 196）では，互除法で k_0, k_1, k_2 を出している。すなわち

$k_0 = 3$，$k_1 = 2$，$k_2 = 2$

である。したがって連分数で表すと

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

となる。$2 + \frac{1}{2}$を$\frac{5}{2}$と計算して

$$3 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}}$$

$$= 3 + \frac{2}{5} = 3\frac{2}{5}$$

を得ることになるが，もちろん「わかるさんすう」では連分数は出していない。ここでは

$x_0 = 3x_1 + x_2$ ……………………①

$x_1 = 2x_2 + x_3$ ……………………②

$x_2 = 2x_3$ ……………………③

として③式を②式に代入してみる。

$x_1 = 4x_3 + x_3 = 5x_3$

すなわち

$$x_1 = 5x_3$$

を得る。この5を分母に用いる単位分数$\frac{1}{5}$を得るために行った

$$x_1 = k_1k_2x_3 + x_3 = (k_1k_2 + 1)x_3$$

という計算は，x_1 と x_3 を測りきる量を導くために，互除法を逆にたどっているのである。このあたりの事情を現場の教師は実践者の立場から例えば次の様に述べている[8)]。「互除法そのものに深入りする必要はない。要は分数は単位と未測量の共通尺度をはんぱで測ることのくり返しの中でみつけていくという分数の考え方と手続きの理解が重要である。」

4．分数の数学的理論

1930年に E. Landau は「Grundlagen der Analysis」という書物を出した。この本はランダウのゲッティンゲン大学における講義を本にしたものであるが，ペアノの公理からはじめて，自然数から実数，複素数までの構成を，ランダウ独特の簡明な方法で述べている。半世紀も前の本であるが，数の体系を問題にするときはこの本を参照しなければならないとされている。ここで分数の数学的理論として，ランダウの上記の本「解析の基礎」から分数の部分を抄訳する[9)]。

定義1　分数$\frac{x_1}{x_2}$（x_2 分の x_1 と読む）とは，自然数 x_2，x_2 の（この順序での）対のことである[10)]。

定義2　$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$（〜は同値であると読む）とは，$x_1y_2 = y_1x_2$ のときである。

このように定義すると次の一連の定理が成り立つ。

定理1　$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$

証明　$x_1x_2 = x_1x_2$

定理2　$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$なら，$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{x_1}{x_2}$

証明　$x_1y_2 = y_1x_2$ より $y_1x_1 = x_1y_2$.

定理3　$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$　且つ$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$なら$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$

証明　$x_1y_2=y_1x_2$, $y_1z_2=z_1y_2$ であるから

$$(x_1y_2)(y_1z_2)=(y_1x_2)(z_1y_2)$$

積について $(xy)(zu)=(xu)(zy)$ が常に成り立つから

$$(x_1y_2)(y_1z_2)=(x_1z_2)(y_1y_2)$$

且つ

$$(y_1x_2)(z_1y_2)=(y_1y_2)(z_1x_2)=(z_1x_2)(y_1y_2)$$

従って

$$(x_1z_2)(y_1y_2)=(z_1x_2)\ (y_1y_2)$$

$$x_1z_2=z_1x_2$$

定理1から定理3までによって，すべての分数は類別されることがわかる。つまり

$$\frac{x_1}{x_2}\sim\frac{y_1}{y_2}$$

のとき，そのときにかぎり$\frac{x_1}{x_2}$と$\frac{y_1}{y_2}$は同じ類に属するとすることによってである。

定理 4　$\frac{x_1}{x_2}\sim\frac{x_1x}{x_2x}$

証明　$x_1(x_2x)=x_1(xx_2)=(x_1x)x_2$

分数の順序については次のようにする。

定義 3　$x_1y_2>y_1x_2$ のとき，$\frac{x_1}{x_2}>\frac{y_1}{y_2}$ とする。

定義 4　$x_1y_2<y_1x_2$ のとき，$\frac{x_1}{x_2}<\frac{y_1}{y_2}$ とする。

定理 5　$\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{y_1}{y_2}$を任意の分数とするとき，

$$\frac{x_1}{x_2}\sim\frac{y_1}{y_2},\ \frac{x_1}{y_2}>\frac{y_1}{y_2},\ \frac{x_1}{x_2}<\frac{y_1}{y_2}$$

のうち，ちょうど一つが成り立つ。

証明　与えられた x_1, x_2, y_1, y_2 に対して

$x_1y_2=y_1x_2$, $x_1y_2>y_1x_2$, $x_1y_2<y_1x_2$

のうち，ちょうど一つが成り立つから。

定理 6　$\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{y_1}{y_2}$なら，$\dfrac{y_1}{y_2}<\dfrac{x_1}{x_2}$である。

証明　$x_1y_2>y_1x_2$なら$y_1x_2<x_1y_2$である。

定理 7　$\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{y_1}{y_2}$なら，$\dfrac{y_1}{y_2}>\dfrac{x_1}{x_2}$である。

証明　$x_1y_2<y_1x_2$なら，$y_1x_2>x_1y_2$である。

定理 8　$\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{y_1}{y_2}$，$\dfrac{x_1}{x_2}\sim\dfrac{z_1}{z_2}$，$\dfrac{y_1}{y_2}\sim\dfrac{u_1}{u_2}$なら

$$\frac{z_1}{z_2}>\frac{u_1}{u_2}$$

である。

証明　$y_1u_2=u_1y_2$，$z_1x_2=x_1z_2$，$x_1y_2>y_1x_2$

より

$$(y_1u_2)(z_1x_2)=(u_1y_2)(x_1z_2)$$

自然数x，y，zには$x>y\Rightarrow xz>yz$という性質があるから，それを用いて

$$(y_1x_2)(z_1u_2)=(u_1z_2)(x_1y_2)>(u_1z_2)(y_1x_2)$$

自然数x，y，zに対して$xz>yz\Rightarrow x>y$が成り立つことから

$$z_1u_2>u_1z_2$$

この定理から分数の類の間の大小が，類の代表元の大小として考えられることがわかる。

定理 9　$\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{y_1}{y_2}$，$\dfrac{x_1}{x_2}\sim\dfrac{z_1}{z_2}$，$\dfrac{y_1}{y_2}\sim\dfrac{u_1}{u_2}$なら

$$\frac{z_1}{z_2}<\frac{u_1}{u_2}$$

である。

証明　定理 7 によって，$\dfrac{y_1}{y_2}>\dfrac{x_1}{x_2}$である。$\dfrac{y_1}{y_2}\sim\dfrac{u_1}{u_2}$，$\dfrac{x_1}{x_2}\sim\dfrac{z_1}{z_2}$より定理 8 から，$\dfrac{u_1}{u_2}>\dfrac{z_1}{z_2}$をうる。定理 6 より$\dfrac{z_1}{z_2}<\dfrac{u_1}{u_2}$となる。

定義 5 $\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$ とは，$\frac{x_1}{x_2} > \frac{y_1}{y_2}$ または $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$ を意味するものとする。

定義 6 $\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$ とは，$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$ または $\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2}$ を意味するものとする。

定理10 $\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$，$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$，$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$ なら

$$\frac{z_1}{z_2} \gtrsim \frac{u_1}{u_2}$$

である。

証明　仮定で＞が成り立つときは，定理 8 から，そうでないときは

$$\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

である。

定理11 $\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$，$\frac{x_1}{x_2} \sim \frac{z_1}{z_2}$，$\frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{y_2}$ なら

$$\frac{z_1}{z_2} \lesssim \frac{u_1}{u_2}$$

である。

証明　仮定で＜が成り立つときは，定理 9 から明らかである。そうでないときは

$$\frac{z_1}{z_2} \sim \frac{x_1}{x_2} \sim \frac{y_1}{y_2} \sim \frac{u_1}{u_2}$$

である。

定理12 $\frac{x_1}{x_2} \gtrsim \frac{y_1}{y_2}$ なら，$\frac{y_1}{y_2} \lesssim \frac{x_1}{x_2}$ である。

証明　定理 2 と定理 6 から。

定理13 $\frac{x_1}{x_2} \lesssim \frac{y_1}{y_2}$ なら，$\frac{y_1}{y_2} \gtrsim \frac{x_1}{x_2}$ である。

証明　定理 2 と定理 7 から。

定理14 （順序の推移性）　$\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2}$，$\frac{y_1}{y_2} < \frac{z_1}{z_2}$ なら，$\frac{x_1}{x_2} < \frac{z_1}{z_2}$ である。

証明　$x_1y_2<y_1z_2$，$y_1z_2<z_1y_2$ だから，

$$(x_1y_2)(y_1z_2)<(y_1x_2)(z_1y_2)$$
$$(x_1z_2)(y_1y_2)<(z_1x_2)(y_1y_2)$$
$$x_1z_2<z_1x_2$$

定理15　$\frac{x_1}{x_2}\leq\frac{y_1}{y_2}$，$\frac{y_1}{y_2}<\frac{z_1}{z_2}$ または，$\frac{x_1}{x_2}<\frac{y_1}{y_2}$，$\frac{y_1}{y_2}\leq\frac{z_1}{z_2}$ ならば $\frac{x_1}{x_2}<\frac{z_1}{z_2}$

証明　仮定で同値の記号が成り立つ場合は定理９から，その他の場合は定理14から従う。

定理16　$\frac{x_1}{x_2}\leq\frac{y_1}{y_2}$，$\frac{y_1}{y_2}\leq\frac{z_1}{z_2}$ なら，$\frac{x_1}{x_2}\leq\frac{z_1}{z_2}$ である。

証明　仮定で２つとも同値の記号が成り立つ場合は定理３から，その他の場合は定理15から。

定理17　$\frac{x_1}{x_2}$ が与えられたとき，$\frac{z_1}{z_2}>\frac{x_1}{x_2}$ なる $\frac{z_1}{z_2}$ が存在する。

証明　$(x_1+x_1)x_2=x_1x_2+x_1x_2>x_1x_2$

$$\frac{x_1+x_1}{x_2}>\frac{x_1}{x_2}$$

定理18　$\frac{x_1}{x_2}$ が与えられたとき，$\frac{z_1}{z_2}<\frac{x_1}{x_2}$ なる $\frac{z_1}{z_2}$ が存在する。

証明　$x_1x_2<x_1x_2+x_1x_2=x_1(x_2+x_2)$

$$\frac{x_1}{x_2+x_2}<\frac{x_1}{x_2}$$

定理19　$\frac{x_1}{x_2}<\frac{y_1}{y_2}$ のとき，$\frac{z_1}{z_2}$ が存在して，$\frac{x_1}{x_2}<\frac{z_1}{z_2}<\frac{y_1}{y_2}$ である。

証明　$x_1y_2<y_1x_2$ だから

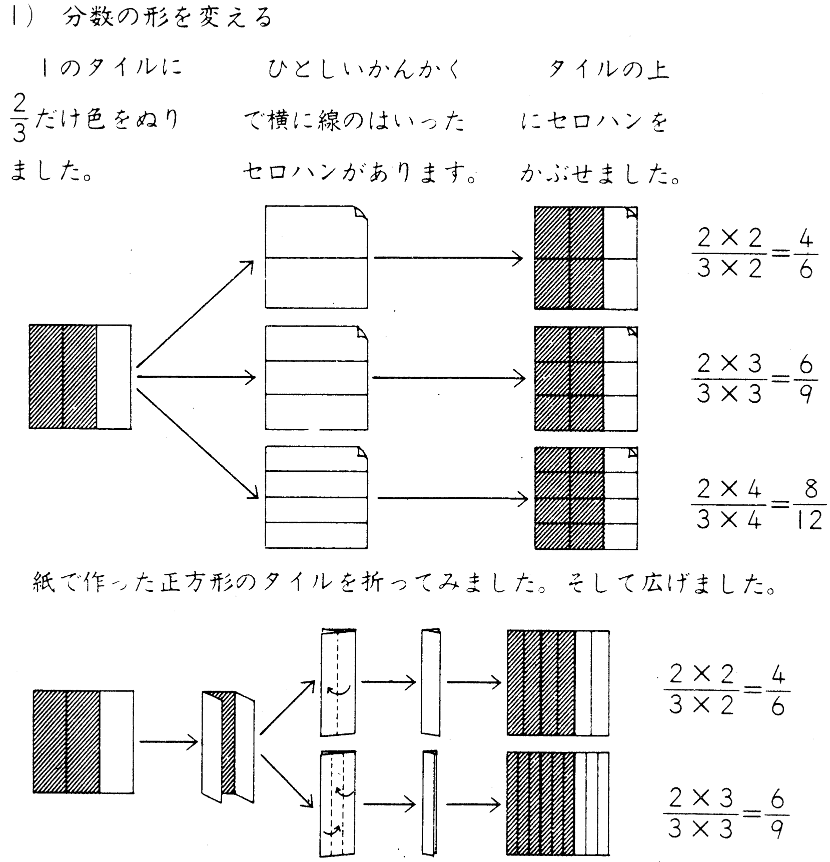
$$x_1x_2+x_1y_2<x_1x_2+y_1x_2$$
$$x_1y_2+y_1y_2<y_1x_2+y_1y_2$$
$$x_1(x_2+y_2)<(x_1+y_1)x_2$$
$$(x_1+y_1)y_2<y_1(x_2+y_2)$$

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{x_1+y_1}{x_2+y_2} < \frac{y_1}{y_2}$$

5．分数の同値と順序について

分数の同値については「わかるさんすう」5に「分数の形を変える」という項で扱われている。そこでは「分数の分母と分子に同じ数をかけても，分数の大きさは変わりません。分数の分母と分子に同じ数をかけて，分数の形を変えることを倍分といいます。」となっていて次の図が入っている。

「わかるさんすう」では分数の同値という言葉や前節定義2の同値の定義 $x_1y_2=y_1x_2$ という関係式は出ていない。同値にかわる概念として倍分・約分の定義にあらわれる「分数の大きさ」という概念を用いている。「分数の分母と分子に同じ数をかけても，分数の大きさは変わりません。分数の分母と分子に同じ数をかけて，分数の形を変えることを倍分といいます。」という倍分の定義の中にある「分数の大きさは変わりません」という言葉と「分数の形を変えることを」という言葉に注目したい。「わかるさんすう」の分数の定義は「はんぱの大きさは1を3等分した大



● 分数の分母と分子に同じ数をかけても，分数の大きさは変わりません。

● 分数の分母と分子に同じ数をかけて，分数の形を変えることを**倍分**といいます。

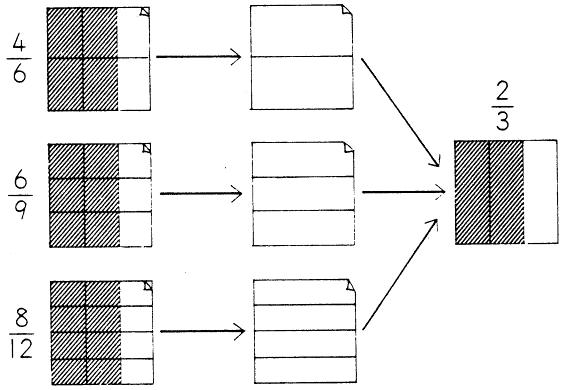
つづいて「分数の分子と分母を同じ数でわって，分数の形を変えることを約分といいます。」として，前の図の反対の矢印の図が入っている。

<約分>

タイルに、ひとしいかんかくで横に線のはいったセロハンがかぶせてあります。

セロハンをとりました。

タイルだけになりました。



分母と分子を2でわると

$$\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2}{3}$$

分母と分子を3でわると

$$\frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{2}{3}$$

分母と分子を4でわると

$$\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{3}} = \frac{2}{3}$$

● 分数の分子と分母を同じ数でわっても，分数の大きさは変わりません。

● 分数の分子と分母を同じ数でわって，分数の形を変えることを**約分**といいます。

きさです。この大きさを「3分の1」といい，$\frac{1}{3}$と書きます（図版1）」とあるように，分数を（はんぱの）大きさとして定義している。従って上の倍分の定義の中にある「分数の大きさは変わりません」という言葉は，分数が変わらないという意味である。つまり倍分によって分数は変わらないが分数の形は変わると述べている。倍分や約分を行った結果の分数は，行う前の分数とLandauの意味で同値となるのは明らかであるが，倍分や約分があることによって，「わかるさんすう」に分数の同値の概念があるということにはならない。同値の概念は何よりもまづ前節定理1，定理2，定理3が中心となる概念である。この同値律の意識（定理1，定理2，定理3）は

「わかるさんすう」には全然ふれられていない。

分数の順序について「わかるさんすう」では分数の大きさで順序を考えている。「わかるさんすう４」で同分母分数の大小,「わかるさんすう５」で異分母分数の大小比較を通分することによって，同分母分数の大小に直して考えさせている。前節定義３，定義４の関係式は意識されていない。それどころか前節に述べた分数の数学的理論のどの部分にも「わかるさんすう」はふれていない。初等数学と高等数学のこの顕著な乖離は分数にかぎったことではないのであるが。

６．分数と有理数

「わかるさんすう」の分数の記述は，数学的にみるといろいろ不足するところがある。その一つは集合としての「分数全体の集合」が「わかるさんすう」では確立していないことである。「わかるさんすう」の分数の定義は３節に述べたように，量の分割分数とも云うべき内容であるが,「はんぱの大きさ」の全体がどのような集合になるのかは，定かではない。考えている数学的概念が集合論的につかみがたいということは，数学教育としては欠陥と考えられる。次に「わかるさんすう」には同値の概念がない。これは集合論的な考えを考慮していないから必然的にそうなってしまうのである。N を自然数の全体の集合とすると，$N \times N$ という直積が分数の全体の集合，４節定義２の同値関係を ρ と表すと，$N \times N/\rho$ という商集合を考えることになる。同値という概念は $N \times N$ という集合を前提にしてはじめて考えられるのである。分数の全体という概念が集合論的に確立していないのでは，同値の扱いはむずかしくなる。このことは必然的に有理数の概念が無視されるという結果をうむ。有理数についての数学的定義は次の様になる。

定義７[11]　ある固定された分数に同値なすべての分数のつくる集合を，一つの有理数という。

斜体の大文字で有理数を表わすことにする。

定義８　２つの有理数 X，Y に対して，

$$X = Y$$

というのは，この２つの集合が同じ分数から構成されているときである。そうでないときは

$$X \neq Y$$

という。

このように有理数にとっては，集合と同値は本質的な概念になるのである。同値や同値類は小学校ではこれまでに扱われたことのない概念である。このような概念を小学校の生徒に数えることは可能なのであろうか。同値と同値類の実践報告は最近井出賀津雄によって試みられている[12]。

井手は小学校5年の授業で整数の剰余類とデザインの話を行っている。これをみると井手は剰余類間の演算まで行っているのである。同値と同値類の概念が小学校5年で可能なことが井手の実践によってわかったので，分数の同値と同値類のプランも道が開ける。分数と有理数の本質が，同値と同値類をその内容として含む以上これを教えることを避けるべきではない。Landauの定義1，定義2による分数と同値の定義を行い，その量的意味づけを別途行えばよいであろう。

7．結語――分数の教授プラン作製の為に

ここで考察する分数の新しい教授プランは考え方の骨組みとして次の特徴をもつ。第一に「わかるさんすう」などで使われている量分数の考え方を継承する。第二に分数の同値（とりわけ定義2の形）についてしっかり教える。第三に同値類と順序，同値類と演算について教える。第四に有理数の概念を導入する。

もうすこしくわしく云えば，分数の定義は4節定義1のように自然x_1，x_2のこの順序で対を$\frac{x_1}{x_2}$とする。これは形式的な定義であるが，分数の意味と大きさを「わかるさんすう」の分数の定義の形で与えることを別途行えばよい。すなわち分数は次の量の大きさを表すというような意味づけを行って，はんぱの量と対応させる。従って分数と分数の大きさを区別する。この方がやがて負の分数を扱うときにも合理的になる。同値についても，4節定義2で同値の定義を与えておき，同値の分数は同じ大きさをもつことを知らせる。倍分，約分は計算の為の現則（演算の為の）と位置づける。順序についても，4節定義3，定義4で順序を定義し，大きさと順序の関係を数える。順序と算法は同値関係と両立することを教える。これは例えば順序と同値関係の両立とは4節定理8の内容をさしている。

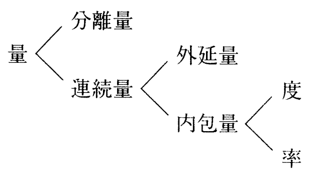
注

1）山口格，須田勝彦：「数学教育の観点から見たアルキメデスの公理」北海道大学教育学部紀要49（1987）

2）遠山啓：「量の分数」　数学教室（1959）3月，7月号，遠山啓著作集，数学教育論シリーズ　5，量とはなにかⅠ（1978）太郎次郎社

3）遠山啓：「数学教育における量の問題」，数学セミナー（1962）8月号，遠山啓著作集，数学教育論シリーズ，5，量とはなにかⅠ（1978）太郎次郎社

遠山は量を次の様に分類した。



外延量とは体積，重さ，長さ，時間のように加法性がなりたつものを指している。

4）F. Klein：「Elementarmathematik vom hören Standpunkte aus I」Berlin. Springer（1933）p. 31.

5）アレクサンドロフ：「数学とはどのような学問か」遠山啓編「数学の世界」大月書店（1974）

6）遠山啓：「集合と量および数」（1978）遠山啓著作集，数学教育論シリーズ5，太郎次郎社

7）遠山啓監修「わかるさんすう」むぎ書房（1987）
8）堀岡武　1987年合同教育全道集会報告
9）Edmund Landau　「Grundlagen der Analysis」（1930），Chelsea 版あり。
10）自然数については既知としている。
11）Landau の同上書§5より
12）井手賀津雄：数学教室409（1986）