ホスクルにおける数式解答評価システムの開発研究

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-03-04 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 倉重, 龍一郎, 棚田, 一郎 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/616

ホスクルにおける
数式解答評価システムの開発研究

倉重　龍一郎，　棚田　一郎

Development and Resarch of an answer estimation system of HOSCL.

Ryuichiro Kurashige, Ichiro Tanada.

Abstract

An answer estimation system is one of the most important systems in CAI. Soft-wares and course-wares of CAI are considerably influenced by the system. The system is able to analyze an answer-expression and indicates the wrong part when it is not correct and is able to get the result in real time.
This paper reports the principles, algorithms and applications of the system.
The CAI of the answer estimation system was developed originaly in Muroran Institute of Technology and is named HOSCL.

1．はじめに

「今までの40～50人の少人数の授業から100人規模の授業になったら，私語が多くて，教室が騒々しく，さっぱり授業にならない。」とか「CAIシステムをある教育機関で見せてもらって来たが，その取り扱う内容のレベルが低くて，我々教師による授業には及びもつかない。」とかの類いの話を耳にする。これらの二つの話は，お互いに全く関係が無いように見えるが，裏では大いに関係している。

前者の教師は，同じ程度の学力を有する多人数のクラスの授業にはすこぶる威力を発揮する。しかし，多様な学力のクラスに対しては何処かの学力レベルに焦点を合わせて授業を行なわざるを得ない。従って，その授業では，必然的により学力レベルの高い学生達は退屈し，より学力レベルの低い学生達は難し過ぎて理解出来ない。

言い換えると，教師は多人数の授業でも学生達が同程度の学力である限り別に困らないが，多様な学力レベルのクラスに対しては少人数でさえもその能力を発揮することが出来ない。

後者のCAIは個別学習を基本としているので，多様な学力の学生達を同時に扱う授業を得意とする。多様な学力の集まりのクラスに対してはCAIによる授業が威力を発揮する。

本学においても，多様な学力のクラスの授業を担当する機会が多い。本学が，教師とCAIのそれぞれの授業の特徴を活かして，多様な学生達に対しても効果の高い授業を行うことの出来る教育機関とする必要がある。

本論文は学習解答の誤答要因の基本的な概念とそのアルゴリズムに関する報告である。この誤答要因は，CAIシステムが学習解答評価とその理解の認識を出来る限り教師に近ずけて肌理の細かい学生の対応行うための核として位置ずけられている。

2．バーチャル教師による教授システム

授業中に教師が講義を行ったのち演習によって学生達の理解度を確認する場合を想定する。教師は演習問題を黒板に書いて，クラスの学生達に解答が出来たら手を上げるように言って教室を静かに廻る。いくらか時間が過ぎて学生が手を上げる。教師はその学生のノートの解答をチェックする。そして正答の時はその旨を伝え，誤答の時はそれに必要なコメントをつける。コメントは，もし頑張り屋でやる気十分の学生に対しては，多くの情報を与えず出来るだけ独力で解答させる。やっと解答した学生に対しては，「どこそこが違うよ」，「もう少しだから」とか言って，正答へ導くための適切なアドバイスと励ましを行う。

さらに，教師はその学生達の解答から授業の理解に対する情報を得て，次の単元に進むべきかあるいはこの単元をもう少し補うかを判断する。

CAIシステムで，上述の学習指導を実現するには次の三つの項目を満足することが必要である。

2．1．講義のプレゼンテーション

CAIのプレゼンテーションが教師のそれに出来る限り近ずけるためにはビデオオンデマンドによる動的メディアの利用と教材の階層化が必要である。

静止教材については通常のコンピュータのファイルを利用するが，動きを必要とする教材についてはビデオオンデマンドを利用する。

ビデオオンデマンドは動きのある教材，教師の顔の表情，教師の音声とキューの高いプレゼンテーションを構築することが可能である。

ビデオオンデマンドはデジタル方式とアナログ方式に分けられる。

デジタル方式はMPEG1を利用する方法で画像帯域が1.5 MHzである。10 MHzのLANでは4

回線しかとれないので，他人に迷惑をかけない本格的な利用には専用回線が必要となる。

アナログ方式は筆者等が開発した方式で，同一教材を複数で利用する場合には不便があるものの，画像帯域が通常のビデオ帯域(3.5 MHz)でMPEG1に較べて良好な画像が得られる。ローカルの利用にはアナログ方式も利用可能である。

教材の階層化とは学習コースとまとめコースを設けて，学習者が自分の理解の状況により，これらのコースを自由に行き来する方式で，学習者は分かりやすく効率の高い学習を行うことが出来る。

2．2．演習時の数式解答評価

CAIシステムで教師に匹敵する学習指導を実現するために，CAIシステムは学習解答の正誤のみならず，学生の指導に必要な情報を学習解答から得ることが必要である。以下に模範解答例とそれに対する学習解答例を示す。

学習者が解答する際，問題が良く分からない時はヒント（コマンド hint or hnt）を利用する。学習解答が誤答の場合に学習解答を修正する必要がある。原因が分からない時はコマンド wh?(what? or where?)を利用する。

ただし，あまり考えないでコマンド wh? を利用しようとすると，もう少し時間をかけて考えて下さいとの意味で，コマンド wh? の実行はシステムから拒否される。

ここでは，LR直列回路に複素電源 E * exp(j(ωt + θ))を印加して，t = 0 でスイッチを閉じる時に流れる電流を求める例をあげる。模範解答例を次に示す。

模範解答例: φ = atn(ω * L / R); E / sqr(R * R + ω * ω * L * L)
* exp(j *(ω * t + θ - φ))

学習者にLRの位相φを利用させる時は，この模範解答例のように，模範解答の中で定義する（この解答処理の間だけ有効なローカル変数φの定義）か，あるいは学習単元を開始する時に定義（学習単元の中ずっと有効なグローバル変数φの定義）する。変数 φ が定義されていると，学習者はこの変数を利用して解答することが出来る。さらに，学習者は自分で自由に変数や関数を定義してこれらを利用して解答することが出来る。

ただし，この変数又は関数の定義は，それを利用する前に行う。

模範解答は掛け算記号(＊)の省略は許されず，正確に入力する必要がある。しかし，学習解答は掛け算記号(*)を省略できる。

掛け算記号(*)の省略を学習解答例1で説明すると，模範解答の変数辞書で Eexp(を調べる。該当する関数がないので，次に Eex なる変数を調べる。これも又該当する変数が無いので，Ee，E を次々と調べる。その結果，E なる変数が定義されていることが分かる。その後に exp(なる関数を見つける。

学習解答例1：Eexp(j(ωt + θ - φ))/ sqr(RR + ωωLL)

ans ：「正解です！」

学習解答例2：E / sqr(RR + ωωLL)* exp(j(ωt + θ))

ans ：「不正解です！」

wh?：「L，Rの項がおかしい!」

学習解答例3：E / sqr(RR + ωωLL)* exp(j(ωt - θ - φ)

msg ：「カッコの対応が出来ていませんので式の終わりに")"を補充します。」

ans ：「不正解です！」

wh?：「expの中がおかしい!」

wh?：「θの符号を確認して下さい!」

学習解答例4：E /(R + jωL)* exp(j(ωt + θ))

ans ：「正解です！」

学習解答例5：E /(R - jωL)* exp(j(ωt + θ))

ans ：「不正解です！」

wh?：「ω，Lがおかしい!」

wh?：「ω，Lの符号を確認して下さい!」

学習解答例6：E /(R + jωL)* exp(jωt + θ)

ans ：「不正解です！」

wh?：「expの中がおかしい!」

wh?：「θを確認して下さい!」

学習解答例7：E /(R + jωL)* exp(ωt + θ)

ans ：「不正解です！」

wh?：「expの中がおかしい!」

wh?：「ωt，θを確認して下さい!」

学習解答例8：1 /(R + jωL)* exp(j(ωt + θ))

ans ：「不正解です！」

wh?：「Eを確認して下さい!」

これらの例で分かるように，CAIシステムは学習者に正解，不正解を知らせるばかりでなく，教師と同様に，誤答の箇所と要因を把握して必要な時にそれらを指摘していることが分かる。

言い換えると，本CAIシステムは誤答要因について，教師に準ずる認識を有する。さらに，それを利用した学習指導が可能なシステムであることが分かる。

2．3．学習制御

本CAIシステムの授業は，学習コースとまとめコースが用意されている。さらに，これらのコースの学習時に分からない事項について調べるための項目辞書が用意されている。

学習コースは初めての学習者を対象としたコースで，授業を分かりやすく，基礎から応用へ，ステップバイステップで理解させるコースである。まとめコースは既に学習コースを終えた人や，これらの知識を有する人が知識を整理する目的で履修するためのコースである。

まとめコースの重要な意味の一つに，技術者の目標とするレベルを学習者に知らせることである。

英会話に例えると，学習コースは初級者や中級者を対象とした通常の英会話のコースに相当し，まとめコースはネイティブスピーカによるナチュラルスピードの英会話に相当する。

学習コースとまとめコースはそれぞれの学習単元がお互いに同期しているので，現在履修している部分を行き来することが出来る。即ち，まとめコースを履修していて，その説明が早すぎたり，内容が難し過ぎる時は，何時でも学習コースへ移行することが出来る。又，学習コースを履修している時，その部分をまとめをしたいと思った時にいつでもこのまとめコースを利用することが出来る。

学習制御の目的は，学習順序の設定，学習者に理解の不足な箇所の指摘及びこの授業の終了時の指摘である。

前述の解答評価機能を利用して，CAIシステムは学習者がどの分野の知識が不足しているかが分かるので，これを学習者に知らせることにより，学習者は自分の学ぶべき箇所をしっかりと認識することが出来る。

クラスの中に，授業が完全に理解出来ないと先に進もうとしない性格の者や，反対になんとなくイメージが出来ればすぐに先に進みたがる性格の者がいる。それらの学習者に理解の程度を正しく認識させることは重要である。目標とする学力レベルに到達したら授業の切り上げ時を学生に知らせることにより，これらの性格の学生にも効果の高い学習を行うことが出来る。

学習者は自分の希望するコース，学習順序及び進行速度が選択出来る。

これらを実現出来るCAIシステムをバーチャル教師による教授システムと名ずける。

この論文はバーチャル教師による教授システムの要素の一つである演習時の数式解答評価についての報告であると云い換えることが出来る。

3．パターンマッチング法

学習解答評価法は二つの方式がある。その一つはここに述べるパターンマッチング法で，もう一つは筆者等の開発した代入法である。パターンマッチング法は模範解答と学習解答のストリングによる相互比較である。そのためにスペース，符号，カッコが一つ入っていたりあるいは抜けていると云った場合も，他の文字と同様に正しい解答と見なすことは出来ない。さらに，これら

の解答ストリングのほんの一部の順序が変わった等価な数式でも正答とは見なされない。

ここに，簡単な数式 $ax + b$ の模範解答例を示す。

$ax + b, xa + b, b + ax, b + xa,$

$ax - (-b), xa - (-b), -(-b) - ax, -(-b) - xa,$

$-(-ax - b), -(-xa - b), -(-b - ax), -(-b - xa),,,$

これらの組み合わせは，何重カッコ，ユニマイナス，乗算，除算，三角関数等の組み合わせによる等価な数式はいくらでも想定される。

パターンマッチング法の欠点は模範解答を数多く用意しても100%の認識が出来ず常に登録外の正解が生ずる不安を持っていることと，この数多い模範解答を教師又は教師の代理の者が入力する必要があることである。

誤答要因の解析は原理的に極めて困難である。

4．代入法の基本的な考え方

代入法の基本的な考え方を述べる。模範解答と学習者が数式エディタを利用して解答した学習解答を数式コンパイラーによって命令セットに変える。次にエクスキュータによって解答微分ベクトルを求める。

模範解答ベクトルと学習解答ベクトルのそれぞれの要素を比較して，全て一致しているかどうかによって正答か誤答かを判断する。

例えば，模範解答が$f_m(x)= x^2+ ax + b + 3$，学習解答が$f_s(x)= x(x + a) + b + 3$について述べる。

数式コンパイラーは，$x_1= x$，$x_2= a$，$x_3= b$と定義して，

$f_m(x_1, x_2, x_3)=x_1^2 + x_1 x_2 + x_3 + 3$

$f_s(x_1, x_2, x_3)=x_1(x_1 + x_2)+ x_3 + 3$

として，次の命令セットを作る。

load/x_1, mult/x_1, store/work, load/x_1, mult/x_2, add/work, add/x_3, add/3, store/mans

load/x_1, add/x_2, mult/x_1, add/x_3, add/3, store/sans

エキスキュータではこの命令セットから解答微分ベクトルを求める。

模範解答微分ベクトル$(mans, \partial mans/\partial x_1, \partial mans/\partial x_2, \partial mans/\partial x_3, \partial^2 mans/\partial x_1^2, \partial^2 mans/\partial x_1 \partial x_2, \partial^2 mans/\partial x_1 \partial x_3, \partial^2 mans/\partial x_2^2, \partial^2 mans/\partial x_2 \partial x_3, \partial^2 mans/\partial x_3^2)$

$=(3, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$

学習解答微分ベクトル$(sans, \partial sans/\partial x_1, \partial sans/\partial x_2, \partial sans/\partial x_3, \partial^2 sans/\partial x_1^2, \partial^2 sans/\partial x_1 \partial x_2, \partial^2 sans/\partial x_1 \partial x_3, \partial^2 sans/\partial x_2^2, \partial^2 sans/\partial x_2 \partial x_3, \partial^2 sans/\partial x_3^2)$

$=(3, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$

模範解答ベクトルと学習解答ベクトルのそれぞれの要素が等しいかどうかによって正答か誤答かを判断する。この例では全ての要素が等しいので正答である。

通常のプログラムはコンパイル&リンクしてオブジェクトコードを作ることと，それを実行することは全く別の処理となる。代入法は自分のプログラムの実行に，学習者が入力した学習解答をコンパイルしてオブジェクトコードを作り，直ちにこのオブジェクトコードを実行する。

言い換えると汽車が自分で線路を敷設しながら走るのに相当する。この場合線路を走ることがプログラムの実行で，線路の敷設することがコンパイルを意味する。

5．誤答要因

5．1．関数の収束性と級数展開

収束円の内部における任意の点 x_0 に関して，一様収束する関数 $f(x)$を考える。

べき級数も当然この関数の中に含まれる。

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で i 次の因数を持つとすると，$f(x)=(x - x_0)^i g(x)$

$g(x)$を Taylor 展開する。

$g(x)= d_0 + d_1(x - x_0)+ d_2(x - x_0)^2 +...+ d_n(x - x_0)^n + R_n$

ただし，$d_0= g(x_0)$，$d_1=\partial g/ \partial x$，$d_2= 1/2!\ \partial^2 g/ \partial^2 x$,,, $d_n= 1/n!\ \partial^n g/ \partial x^n$,

$R_n= d_{(n-1)}(x - x_0)^{(n-1)}+ ...$

ここで、$x - x_0$をあらためて x とおく。

$g(x)= d_0+ d_1 x + d_2 x^2+...+ d_n x^n+ R_n$

ただし，$d_0= g(x_0)$，$d_1=\partial g/ \partial x$，$d_2= 1/2!\ \partial^2 g/ \partial x^2$,,, $d_n= 1/n!\ \partial^n g/ \partial x^n$,

$R_n= d_{(n-1)}(x - x_0)^{(n-1)}+ ...$

関数 $g(x)$の剰余 R_nは、関数の一様収束性により，ある ε，N があって，N < n なる限り，x に関係なく $R_n < \varepsilon$ が成り立つ N が存在する。

即ち，ε をいくらでも小さくすることが出来るので，これを打ち切り精度以下にすると，$R_n < \varepsilon$ の関係から

$g(x)= d_0+ d_1 x + d_2 x^2+...+ d_N x^N$

とおくことができる。

ただし，$d_0= g(x_0)$，$d_1=\partial g/ \partial x$，$d_2= 1/2!\ \partial^2 g/ \partial x^2$,,, $d_n= 1/n!\ \partial^n g/ \partial x^n$,

$R_n= d_{(n-1)}(x - x_0)^{(n-1)}+ ...$

さらに，この概念を多次元化した複素数関数に拡張することが出来る。

5．2．関数の独立性と不活性定数

下に示す関数 $f(x)$について関数の独立性を考える。

$f(t)=(at^2+bt+c)/(R+j\omega L)*E*\exp(j(\omega t+\theta))$

ここで、$f_p(t)=at^2+bt+c$　$f_z(t)=1/(R+j\omega L)$　$f_e(t)=E*\exp(j(\omega L+\theta))$ とすると

$f(t)=f_p(t)*f_z(t)*f_e(t)$となる。

今，$f_p(t)=at^2+bt+c$ について，$a=0$，$b=0$，$c=1$ なる定数を設定した時，変数 t の値にかかわらず，$f_p(t)=1$ となる。この $a=0$，$b=0$，$c=1$を不活性定数と定義し，$NAC_p(t\,|\,a,\ b,\ c)=(t\,|\,0,\ 0,\ 1)$と表記する。

同様に，$f_z(t)=1/(R+j\omega L)$について，$NAC_z(t,\ \omega\,|\,R,\ L)=(t,\ \omega\,|\,1,\ 0)$及び
$f_e(t)=E*\exp(j(\omega t+\theta))$について，$NAC_e(t\,|\,E,\ \omega,\ \theta)=(t\,|\,1,\ 0,\ 0)$ と表記する。

模範解答及び学習解答が基本関数($f_p(t)$，$f_z(t)$，$f_e(t)$)に分離可能であるとは限らないが，上式の様に模範解答が基本関数に分離することか可能な時には，学習解答を基本関数に分離するための情報を与える。

数式コンパイラで求められた命令セット，関数の独立性，不活性定数，多項式，有理式，指数それぞれの特性抽出等を利用して，学習解答の誤答要因分析を行う。

上式の様に解答が基本関数に分離出来る時は，同時に処理する次元数を小さくすることが出来るので誤答解析が容易になる。

5．3．誤答要因分析

ここではある収束半径のもとで一様収束して級数として表される関数を対象とする。

定数 E，(at^2+bt+c)，$1/(R+j\omega L)$，$\exp(j(\omega t+\theta))$等はいずれもベキ級数に展開することが出来る。ベキ級数はある収束半径のもとで一様収束する。これらの関数を掛け合わせた関数もまたベキ級数になる。

関数を Taylor 級数に展開すると各項は一意的に定まる。

$$f(x_{10}+\delta x_1,\ x_{20}+\delta x_2,,,\ x_{n0}+\delta x_n)=f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})+df(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})$$
$$+1/2!*d^2 f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})+\ldots$$

$$df(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})=\partial f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})/\partial x_1*\delta x_1+\partial f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})/\partial x_2*\delta x_2$$
$$+\ldots+\partial f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})/\partial x_n*\delta x_n$$

$$d^2f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})=\partial^2 f/\partial x_1^2*(\delta x_1)^2+2\partial^2 f/\partial x_1\partial x_2*(\delta x_1\ \delta x_2)$$
$$+2\partial^2 f/\partial x_1\partial x_3*(\delta x_1\ \delta x_3)+\ldots+2\partial^2 f/\partial x_1\partial x_n*(\delta x_1\ \delta x_n)$$
$$+\partial^2 f/\partial x_2^2*(\delta x_2)^2+\ldots+\partial^2 f/\partial x_n^2*(\delta x_n)^2$$

それ故，各項と同じ要素を持つ微分ベクトル $\Delta(f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0}),\partial f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})/\partial x_1,\partial f(x_{10},\ x_{20},,,\ x_{n0})/\partial x_2,,,\partial^2 f/\partial x_n^2,,,)$もまた一意的に定まる。

a, b, c が文字定数，t が変数とする関数 $f(t)= at^2 + bt + c$ は，
$x_1= t$, $x_2= a$, $x_3= b$, $x_4= c$ とおき四次元関数 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)= x_4 + x_1x_3 + x_1^2 x_2$ とする必要がある。

階数は関数に依存する。$f(t)= at^2+ bt + c$ の場合は，$\partial^3f/\partial x_1^2\partial x_2= 2, \partial^4f/\partial x_1^4 = 0, \partial^4f/\partial x_1^3\partial x_2= 0,,, \partial^4f/\partial x_4^4 = 0$ により，3階が必要かつ十分条件である。

さらに，$(0\leqq i \leqq j \leqq n)$ と定義すると，$\partial^2f/\partial x_i\partial x_j= \partial^2f/\partial x_j\partial x_i$ であるので $\partial^2f/\partial x_j\partial x_i$ を使用せず，$\partial^2f/\partial x_j\partial x_i$ の項を $\partial^2f/\partial x_i\partial x_j$ の項にまとめる。

微分ベクトル Δ の要素の配列順序は次のようにする。

n次元の表示は添え字をn個並べる。ここでは便宜上 $n = 5$ として表示する。

$(1, 2,,, n)^0 \rightarrow (0)$ $[d_{00000}]$

$(1, 2,,, n)^1 \rightarrow (1, 2,,, n)$ $[d_{10000}, d_{01000},,, d_{00001}]$

$(1, 2,,, n)^2 \rightarrow (11, 12, 13,,, 1n, 22, 23,,, 2n,,,, nn)$ $[d_{20000}, d_{11000},,, d_{00002}]$

$(1, 2,,, n)^3 \rightarrow (111, 112, 113, 11n, 122, 123,,, 12n,,, 1nn, 222, 223, 224,,, 22n, 333, 334, 344, 444)$
$[d_{30000}, d_{21000},,, d_{10002}, d_{03000},,, d_{00003}]$

とする。

ここに3次元2階の微分ベクトルの例を示す。

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_{000} \\ d_{100} \\ d_{010} \\ d_{001} \\ d_{200} \\ d_{110} \\ d_{101} \\ d_{020} \\ d_{011} \\ d_{002} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_{10}, x_{20}, x_{30}) \\ \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \partial f/\partial x_3 \\ \partial^2 f/\partial x_1^2 \\ \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2 \\ \partial^2 f/\partial x_1\partial x_3 \\ \partial^2 f/\partial x_2^2 \\ \partial^2 f/\partial x_2\partial x_3 \\ \partial^2 f/\partial x_3^2 \end{bmatrix}$$

もし模範解答 $f_m(x_1, x_2, x_3, x_4)$ と学習解答 $f_s(x_1, x_2, x_3, x_4)$ が等しければ，それらの関数に対して一意的に定まる模範解答微分ベクトル Δ_m と学習解答微分ベクトル Δ_s も等しくなる。

$$\Delta_m = \begin{bmatrix} d_{m0000} \\ d_{m1000} \\ d_{m0100} \\ \\ d_{m000n} \end{bmatrix} \qquad \Delta_s = \begin{bmatrix} d_{s0000} \\ d_{s1000} \\ d_{s0100} \\ \\ d_{s000n} \end{bmatrix}$$

$f_m(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = f_s(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ のとき　$\Delta_m = \Delta_s$

$f_m(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \fallingdotseq f_s(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ のとき　$\Delta_m \fallingdotseq \Delta_s$

模範解答微分ベクトルと較べて，学習解答の微分ベクトルのどこかに相異なる要素が存在すれば学習解答は誤答である。

誤答原因を詳しく調べるために，不活性定数を利用して基本関数に分離出来るかどうかの議論と分離出来た場合の基本関数の特徴抽出の概念が必要となる。

基本関数に分離出来るかどうかは一般的には微分ベクトルの要素の中で，x_i と x_j の独立性を調べる。$\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$，$\partial^3 f/\partial x_i^2 \partial x_j$，$\partial^3 f/\partial x_i \partial x_j^2$，$\partial^4 f/\partial x_i^2 \partial x_j^2$，,，等がゼロかどうかを調べる。

さらに，不活性定数NACが定義されている時は，模範解答は基本関数に分離することが出来る。しかし，学習解答は分離出来るとは限らない。誤答要因が1個のときは基本関数に分離出来る可能性が非常に高くなる。

6．多項式分析

一般的には，模範解答の微分ベクトル Δ_m と学習解答の微分ベクトル Δ_s の比較で正答誤答を判断する。

多項式に関しては，さらに微分ベクトルに分項マトリックスを掛けて項ベクトルを求める。

模範解答と学習解答のそれぞれの項ベクトルの比較により誤答要因を指摘する。

ここで三次元2階の多項式の例で説明する。

三次元2階の多項式の一般形は次式で示される。

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3) = a_{000} + a_{100}x_1 + a_{010}x_2 + a_{001}x_3 + a_{200}x_1^2 + a_{110}x_1x_2 + a_{101}x_1x_3 + a_{020}x_2^2 + a_{011}x_2x_3 + a_{002}x_3^2$$

微分ベクトル　Δ　及び項ベクトル　Λ　を次の様に定義する。

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_{000} \\ d_{100} \\ d_{010} \\ d_{001} \\ d_{200} \\ d_{110} \\ d_{101} \\ d_{020} \\ d_{011} \\ d_{002} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_{10},\ x_{20},\ x_{30}) \\ \partial f/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 \\ \partial f/\partial x_3 \\ \partial^2 f/\partial x_1^2 \\ \partial^2 f/\partial x_1\ \partial x_2 \\ \partial^2 f/\partial x_1\ \partial x_3 \\ \partial^2 f/\partial x_2^2 \\ \partial^2 f/\partial x_2\ \partial x_3 \\ \partial^2 f/\partial x_3^2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} a_{000} \\ a_{100} \\ a_{010} \\ a_{001} \\ a_{200} \\ a_{110} \\ a_{101} \\ a_{020} \\ a_{011} \\ a_{002} \end{bmatrix}$$

関数 $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$を Taylor 展開する。

$$f(x_{10} + \delta x_1,\ x_{20} + \delta x_2,\ x_{30} + \delta x_3) = f(x_{10},\ x_{20},\ x_{30}) + df(x_{10},\ x_{20},\ x_{30}) + 1/2! * d^2f(x_{10},\ x_{20},\ x_{30})$$

与式の微係数の関係から次式が求まる。

$$f(x_{10},\ x_{20},\ x_{30}) = a_{000} + a_{100}x_{10} + a_{010}x_{20} + a_{001}x_{30} + a_{200}x_{10}^2 + a_{110}x_{10}x_{20} + a_{101}x_{10}x_{30} + a_{020}x_{20}^2 + a_{011}x_{20}x_{30} + a_{002}x_{30}^2$$

$$\partial f/\partial x_1 = a_{100} + 2\ a_{200}x_{10} + a_{110}x_{20} + a_{101}x_{30}$$

$$\partial f/\partial x_2 = a_{010} + a_{110}x_{10} + 2\ a_{020}x_{20} + a_{011}x_{30}$$

$$\partial f/\partial x_3 = a_{001} + a_{001}x_{10} + a_{011}x_{20} + 2\ a_{002}x_{30}$$

$$\partial^2 f/\partial x_1^2 = 2!\,a_{200},\ \partial^2 f/\partial x_1\partial x_2 = 2\ a_{110},\ \partial^2 f/\partial x_1\partial x_3 = 2\ a_{101}$$

$$\partial^2 f/\partial x_2^2 = 2!\,a_{020},\ \partial^2 f/\partial x_2\partial x_3 = 2\ a_{011},\ \partial^2 f/\partial x_3^2 = 2!\ a_{002}$$

この式を整理して分項マトリックス Ψ が求まる。

求められた項ベクトル，分項マトリックス及び微分ベクトルの関係式を次に示す。

項ベクトル　分項マトリックス　微分ベクトル

$$\begin{bmatrix} a_{000} \\ a_{100} \\ a_{010} \\ a_{001} \\ a_{200} \\ a_{110} \\ a_{101} \\ a_{020} \\ a_{011} \\ a_{002} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_{10} & -x_{20} & -x_{30} & x_{1}^{2}/2! & x_{10}x_{20} & x_{10}x_{30} & x_{10}^{2}/2! & x_{20}x_{30} & x_{30}^{2}/2! \\ & 1 & & & -x_{10} & -x_{20} & -x_{30} & & & \\ & & 1 & & & -x_{10} & & -x_{20} & -x_{30} & \\ & & & 1 & & & -x_{10} & & -x_{20} & -x_{30} \\ & & & & 1/2! & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1/2! & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1/2! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{000} \\ d_{100} \\ d_{010} \\ d_{001} \\ d_{200} \\ d_{110} \\ d_{101} \\ d_{020} \\ d_{011} \\ d_{002} \end{bmatrix}$$

$x_{10} = x_{20} = x_{30} = x_{40} = 0$の時，分項マトリックスは対角マトリックスとなる。

$x_{10} = 0$，$x_{20} = 0$，$x_{30} = 0$，$x_{40} = 0$ の時の項ベクトル，分項マトリックス及び微分ベクトルの関係式を次に示す。

項ベクトル　分項マトリックス　微分ベクトル

$$\begin{bmatrix} a_{000} \\ a_{100} \\ a_{010} \\ a_{001} \\ a_{200} \\ a_{110} \\ a_{101} \\ a_{020} \\ a_{011} \\ a_{002} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1/2! & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1/2! & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & 1/2! \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{000} \\ d_{100} \\ d_{010} \\ d_{001} \\ d_{200} \\ d_{110} \\ d_{101} \\ d_{020} \\ d_{011} \\ d_{002} \end{bmatrix}$$

この分項マトリックスを分項対角マトリックスまたは分項係数と名ずける。

次に四次元3階の例をあげる。

模範解答$f_m(x) = ax^2 + bx + c$ 学習解答$f_s(x) = 2x^2 + (4 + a)x + 2a + c$とする。

ここで，$x_1 = x$，$x_2 = a$，$x_3 = b$，$x_4 = c$と定義すると，

$f_m(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 + x_1 x_3 + x_1^2 x_2$

$f_s(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + 2x_2 + x_4 + 2x_1^2 + x_1 x_2$

$x_{10} = 0$，$x_{20} = 0$，$x_{30} = 0$，$x_{40} = 0$の時の微分ベクトル及び項ベクトルが下のように求められる。

微分 ベクトル	模範 解答	学習 解答	項 ベクトル	模範 解答	学習 解答
$d_{0000}=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	= 0	0	$a_{0000}=1/0! * d_{0000}$	= 0	0
$d_{1000}=\partial f/\partial x_1$	= 0	4	$a_{1000}=1/1! * d_{1000}$	= 0	4
$d_{0100}=\partial f/\partial x_2$	= 0	2	$a_{0100}=1/1! * d_{0100}$	= 0	2
$d_{0010}=\partial f/\partial x_3$	= 0	0	$a_{0010}=1/1! * d_{0010}$	= 0	0
$d_{0001}=\partial f/\partial x_4$	= 1	1	$a_{0001}=1/1! * d_{0001}$	= 1	1
$d_{2000}=\partial^2 f/\partial x_1^2$	= 0	4	$a_{2000}=1/2! * d_{2000}$	= 0	2
$d_{1100}=\partial^2 f/\partial x_1\partial x_2$	= 0	1	$a_{1100}=1/1! * d_{1100}$	= 0	1
$d_{1010}=\partial^2 f/\partial x_1\partial x_3$	= 1	0	$a_{1010}=1/1! * d_{1010}$	= 1	0
$d_{2100}=\partial^3 f/\partial x_1^2\partial x_2$	= 2!	0	$a_{2100}=1/2! * d_{2100}$	= 1	0

これにより，模範解答の項ベクトル Λ_m と学習解答の項ベクトル Λ_s を比較して，

$4x_1+2x_2+2x_1^2+x_1\ x_2$ から学習解答の $4x+2a+2x^2+ax$

が誤答となる。

7．指数関数

指数関数の基本的な性質を調べるため単純な関数から検討する。

7．1．指数部一次元1階の指数関数

$f(x_1)=\exp(a_0+a_1\ x_1)$ について考える。(a_0, a_1: const)

この関数の微分ベクトルは

$$\Delta=\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(a_0+a_1x_{10}) \\ a_1\ \exp(a_0+a_1x_{10}) \\ a_1^2\ \exp(a_0+a_1x_{10}) \\ \\ a_1^N\ \exp(a_0+a_1x_{10}) \end{bmatrix}$$

となり，初項 $f(x_{10})=d_0$，等比 a_1 の級数となる。漸化式は $d_N=a_1d_{N-1}$ (a_1: const)

7．2．指数部二次元1階の指数関数

$f(x_1, x_2)=\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2)$ について考える。(a_{00}, a_{10}, a_{01}: const)

この関数の微分ベクトルは

$$\Delta=\begin{bmatrix} d_{00} \\ d_{10} \\ d_{01} \\ d_{20} \\ d_{11} \\ d_{02} \\ d_{30} \\ d_{21} \\ \\ d_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{10})\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{01})\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{10})^2\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ a_{10}a_{01}\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{01})^2\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{10})^3\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ a_{10}^2 a_{01}\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ \\ (a_{10}a_{01})^N\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \end{bmatrix}$$

この微分ベクトル Δ のうち，x_1成分Δ_1 及び x_2 成分 Δ_2を取り出す。

$$\Delta_1=\begin{bmatrix} d_{00} \\ d_{10} \\ d_{20} \\ \\ d_{N0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{10})\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{10})^2\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ \\ (a_{10})^N\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{bmatrix} d_{N0} \\ d_{01} \\ d_{02} \\ \\ d_{0N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{01})\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ (a_{01})^2\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \\ \\ (a_{01})^N\exp(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2) \end{bmatrix}$$

ここで Δ_1 は初項が d_{00}，等比 a_{10} の級数となる。Δ_2は初項が d_{00}，等比 a_{01} の級数となる。

漸化式は$d_{N0} = a_{10}\ d_{(N-1)0}$ （a_{10}: const）　$d_{0N} = a_{01}\ d_{0(N-1)}$ （a_{01}: const）となる。

7．3．指数部二次元２階の指数関数

$f(t)= \exp(j\omega t)$　（ω，t: 変数）

$x_1 = t$，$x_2 = \omega$，$a_{12} = j$　とする。

$f(t) = \exp(a_{11}x_1x_2)$について微分ベクトル Δ を求める。

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_{00} \\ d_{10} \\ d_{01} \\ d_{20} \\ d_{11} \\ d_{02} \\ d_{21} \\ \\ d_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ (a_{11} x_{20}) \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ (a_{11} x_{10}) \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ (a_{11} x_{20})^2 \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ a_{11} \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ (a_{11} x_{10})^2 \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ a_{11}^2 x_{20} \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ \\ (a_{11} x_{20})^N \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \end{bmatrix}$$

この微分ベクトル Δ のうち，x_1 成分 Δ_1，x_2 成分 及び x_1 x_2 成分 Δ_{11} を取り出す。

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} d_{00} \\ d_{10} \\ d_{20} \\ \\ d_{N0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ (a_{11} x_{10}) \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ (a_{11} x_{10})^2 \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ \\ (a_{11} x_{10})^N \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} d_{00} \\ d_{01} \\ d_{02} \\ \\ d_{0N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ (a_{11} x_{10}) \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ (a_{11} x_{10})^2 \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ \\ (a_{11} x_{10})^N \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{11} = \begin{bmatrix} d_{00} \\ d_{11} \\ d_{22} \\ \\ d_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ a_{11} \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ a_{11}^2 \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \\ \\ a_{11}^N \exp(a_{11} x_{10} x_{20}) \end{bmatrix}$$

ここで $x_{10} = x_{20} = 0$ とおくと，$\Delta_1 = 0$，$\Delta_2 = 0$，Δ_{11} は初項が 1，等比 a_{11} の級数となる。
漸化式は $d_{ii} \neq 0$ なので，$d_{NN} = a_{11} \; d_{(N-1)(N-1)}$ (a_{11} : const)となる。

7．4．特徴抽出

$f(t)=\exp(a_{ij\cdots k}\ x^i\ x^j\ \ldots\ x^k)$に対して微分ベクトルを考える。

$$\Delta_{ij\cdots k}=\begin{bmatrix}(a_{ij\cdots k})\,d_{ij\cdots k}\\(a_{ij\cdots k})^2\,d_{i^2j^2\cdots k^2}\\(a_{ij\cdots k})^3\,d_{i^3j^3\cdots k^3}\\ \\(a_{ij\cdots k})^N\,d_{i^Nj^N\cdots k^N}\end{bmatrix}$$

となり，等比 a...の級数になる。

漸化式は $d_{NN\cdots N}=(a_{ij\cdots k})\,d_{(N-1)(N-1)\cdots(N-1)}$ $(a_{ij\cdots k}:\mathrm{const})$

7．5．基本関数

指数部一次元1階の指数関数 $f(x_1)=\exp(j(a_0+a_1x_1))$

指数部二次元1階の指数関数 $f(x_1,\ x_2)=\exp(j(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2))$

指数部二次元2階の指数関数 $f(x_1,\ x_2)=\exp(j(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2+a_{20}x_1^2+a_{11}x_1x_2+a_{02}x_2^2))$

これらの関数の自然対数をとったあとその虚数部($I_m\ \log(f(x))$)を考えると

a_0+a_1x 、$a_{00}+a_{10}x+a_{01}x_2$ 、$a_{00}+a_{10}x+a_{01}x_2+a_{20}x_1^2+a_{11}x_1x_2+a_{02}x_2^2$

となるので，多項式の手法を利用する。さらに，

$f(x_1,\ x_2)=(b_{00}+b_{10}x_1+b_{01}x_2+b_{20}x_1^2+b_{11}x_1x_2+b_{02}x_2^2)$

$*\ \exp(j(a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2+a_{20}x_1^2+a_{11}x_1x_2+a_{02}x_2^2))$

の場合について，b_{00}，b_{10},,, b_{02}，a_{00}，a_{10},,, a_{02} が全て実数の時，($I_m\ \log(f(x_1,\ x_2))$) の処理で実数部と虚数部が分けられる。

$b_{00}+b_{10}x_1+b_{01}x_2+b_{20}x_1^2+b_{11}x_1x_2+b_{02}x_2^2$

及び $a_{00}+a_{10}x_1+a_{01}x_2+a_{20}x_1^2+a_{11}x_1x_2+a_{02}x_2^2$

に分けて多項式の手法を利用する。

b_{ij} が複素数を含んで変数 x_1 ，x_2 が共有する時は一般的な取り扱いが必要である。

8．有理関数

ここでは有理関数の分母について検討する。分母と分子が分離されるときは，分子に関しては多項式の手法を用いる。分離されないときは一般解法を用いる。

8．1．基本的な考えかた

有理関数の特徴を抽出するために最も基本的な関数 $f(x)=1/(1-x)$について検討する。

$f(x) = 1/(1-x)$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$f(x_0 + \delta x) = f(x_0) + df(x0) + 1/2!\ df(x_0) + \ldots$

微分ベクトル Δ は

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \partial f/\partial x \\ \partial^2 f/\partial x^2 \\ \\ \partial^N f/\partial x^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0! \\ 1! \\ 2! \\ \\ N! \end{bmatrix}$$

漸化式は d=Nd となる。このNが有理式の特徴である。

次に別の関数 $f(x) = 1/(1+jax)$ (j, a : const)を考える。

$f(x) = 1/(1+jax)(j,\ a : \mathrm{const})$

$= 1 - (jax) + (jax)^2 - (jax)^3 + \ldots$

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \partial f/\partial x \\ \partial^2 f/\partial x^2 \\ \\ \partial^N f/\partial x^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0! \\ 1!(-1)(ja) \\ 2!(-1)^2(ja)^2 \\ \\ N^N!(-1)^N(ja)^N \end{bmatrix}$$

漸化式 $d_N = (-1)(ja)d_{N-1}$ となり，やはりNが特徴となっている。

さらに，別の問題 $f(x) = 1/(R + j\omega L)$ について考える。

$f(x) = 1/(R + j\omega L)$ (変数 R, ω, L)

$x_1 = R$, $x_2 = \omega$, $x_3 = L$ とおき，

$f(x_1, x_2, x_3) = 1/(x_1 + jx_2 x_3)$ を $x_{10} = 1$, $x_{20} = x_{30} = 0$ で Taylor 展開する式は,

$f(x_1, x_2, x_3) = 1/(1 + x_1 + jx_2 x_3)$ を $x_{10} = x_{20} = x_{30} = 0$ で Taylor 展開する式と等価になる。

この関数について微分ベクトルを求める。

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_{000} \\ d_{100} \\ d_{200} \\ d_{011} \\ d_{300} \\ d_{022} \\ d_{0NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (-1) \\ 2!\ (-1)^2 \\ (-j) \\ 3!\ (-1)^3 \\ 2!\ (-j)^2 \\ N!(-j)^N \end{bmatrix} \qquad \Delta_{11} = \begin{bmatrix} d_{000} \\ d_{011} \\ d_{022} \\ \\ d_{0NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1!(-j) \\ 2!(-j)^2 \\ \\ N!(-j)^N \end{bmatrix}$$

$$\Delta_2 = \Delta_3 = 0$$

これにより x_1 の係数は 1、$x_2 x_3$ の係数は j であることが分かる。

$f(x_1, x_2, x_3) = 1/(1+x_1+jx_2x_3)$ と求められる。

ここで，$x_{10}=1$，$x_{20}=x_{30}=0$ であることを考慮すると，上の式は

$f(x_1, x_2, x_3) = 1/(x_1+jx_2x_3)$ と求められる。

8．2．$1/(1+jx) = \exp(-j\mathrm{atn}(x))/\mathrm{sqr}(1+x^2)$ の級数による展開

$1/(1+jx)$ の形に $\exp(-j\mathrm{atn}(x))/\mathrm{sqr}(1+x^2)$ なる別の形があるが，級数によって両式が等価であることを示す。

$$1/(1+jx) = 1-(jx)+(jx)^2-(jx)^3+ \ldots$$

両式を x で積分して -j を掛ける。

$$-\log(1+jx) = (-jx)+(-jx)^2/2+(-jx)^3/3+(-jx)^4/4+ \ldots$$

$$\log(1/(1+jx)) = -1/2 * [x^2-x^4/2+x^6/3-x^8/4+ \ldots] - j[x-x^3/3+x^5/5-x^7/7+ \ldots]$$

$\log(1+jx)$，$\tan^{-1}x$ の定義から

$$\log(1/(1+jx)) = -1/2\log(1+x^2) - j\tan^{-1}x = \log(\exp(-j\tan^{-1}x)/\mathrm{sqr}(1+x^2))$$

故に、$1/(1+jx) = \exp(-j\tan^{-1}x)/\mathrm{sqr}(1+x^2)$ となる。

8．3．基本関数

n 次元 1 階の有理関数について述べる。

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1/(1+b_{10000}x_1+b_{01000}x_2+ \ldots +b_{00001}x_n)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} d_{00000} \\ d_{10000} \\ d_{01000} \\ d_{00001} \\ d_{20000} \\ d_{11000} \\ \\ d_{00002} \\ d_{30000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ (-1)\,b_{10000} \\ (-1)\,b_{01000} \\ (-1)\,b_{00001} \\ 2!(-1)^2 b_{10000}^{\ 2} \\ (-1)^2 b_{10000} b_{01000} \\ \\ 2!(-1)^2 b_{00001}^{\ 2} \\ 3!(-1)^3 b_{10000}^{\ 3} \end{bmatrix}$$

$$d_{N0000} = N!(-1)^N b_{10000}^{\ N},,, \ d_{0000N} = N!(-1)^N b_{00001}^{\ N}$$

$$d_{(N-1)10000} = N!(-1)^N b_{10000}^{\ (N-1)} b_{01000}$$

漸化式は次式となる。

$d_{N0000} = N(-1)\, b_{10000} d_{(N-1)\,0000}$,,, $d_{0000N} = N(-1)\, b_{00001} d_{0000\,(N-1)}$

8．4．特徴抽出

n次元1階の有理式またはこれに置き換えることの出来る関数$f(x)= 1/(R+j\omega L)$等に対して$d_N = N * \mathrm{const}\ d_{(N-1)}$の特徴が得られる。しかし，n次元2階以上の有理式になると特徴は単純に求められない。一般的な解析は関数$g(x)=1/f(x)$とおいて，$g(x)$に対して多項式の手法を適用する。

9．誤答要因の一般解析

ここでは，不活性定数を利用しても関数が分離出来ない場合について述べる。

誤答要因が1個の場合は必ず分離することができるのでここに述べる議論は必要としない。

しかし，複数の誤答要因の場合には，関数が分離出来ない場合も考えられる。その際はここに述べる一般的な方法を適用する。

基本的に微分ベクトルΔの利用を標準とする。

微分ベクトルの各変数間の関連性についてしらべる。

この微分ベクトルや$\mathrm{Im}[\log(x)]$によるベクトル、逆関数微分ベクトルによる相互の関係から種々の誤答要因を推測する。

$$
\begin{aligned}
f(x)=k\,&(1+a_{10000}x_1+a_{01000}x_2+,,,+a_{00001}x_n+a_{20000}x_1^{\,2}+a_{11000}x_1x_2+,,,\\
&+a_{00002}x_n^{\,2}+...+a_{N0000}x_1^{\,N}+a_{(N-1)\,1000}x_1^{\,(N-1)}x_2+,,,+a_{0000N}x_n^{\,N})\\
&/(x_1^{\,t1}x_2^{\,t2}...\ x_N^{\,tN}(1+b_{10000}x_1+b_{01000}x_2+,,,+b_{0001}x_n+b_{20000}x_1^{\,2}\\
&+b_{11000}x_1x_2+,,,+b_{00002}x_n^{\,2}+...+b_{N0000}x_1^{\,N}+b_{(N-1)\,1000}x_1^{\,(N-1)}x_2\\
&+,,,+b_{0000N}x_n^{\,N}))*\exp(e_{10000}x_1+e_{01000}x_2+,,,+e_{00001}x_n+e_{20000}x_1^{\,2}\\
&+e_{11000}x_1x_2+,,,+e_{00002}x_n^{\,2}+...+e_{N0000}x_1^{\,N}+e_{(N-1)\,1000}x_1^{(N-1)}x_2\\
&+,,,+e_{0000N}x_n^{\,N})
\end{aligned}
$$

次の様に定義する。

$A_1 = a_{10000}x_1 + a_{01000}x_2 +,,, + a_{00001}x_n$

$A_2 = a_{20000}x_1^{\,2} + a_{11000}x_1x_2 +,,, + a_{00002}x_n^{\,2}$

$A_3 = a_{30000}x_1^{\,3} + a_{21000}x_1^{\,2}x_2 +,,, + a_{00003}x_n^{\,3}$

$A_N = a_{N0000}x_1^{\,N} + a_{(N-1)\,1000}x_1^{\,(N-1)}x_2 +,,, + a_{0000N}x_n^{\,N}$

$B_1 = b_{10000}x_1 + b_{01000}x_2 +,,, + b_{00001}x_n$

$B_2 = b_{20000}x_1^{\,2} + b_{11000}x_1x_2 +,,, + b_{00002}x_n^{\,2}$

$B_3 = b_{30000}\, x_1^{\,3} + b_{21000} x_1^{\,2} x_2 +,,, + b_{00003} x_n^{\,3}$

$B_N = b_{N0000} x_1^{\,N} + b_{(N-1)\,1000} x_1^{\,(N-1)} x_2 +,,, + b_{0000} x_n^{\,N}$

$E_1 = e_{10000} x_1 + e_{01000} x_2 +,,, + e_{00001} x_n$

$E_2 = e_{20000} x_1^{\,2} + e_{11000} x_1 x_2 +,,, + e_{00002} x_n^{\,2}$

$E_3 = e_{30000} x_1^{\,3} + e_{21000} x_1^{\,2} x_2 +,,, + e_{00003} x_n^{\,3}$

$E_N = e_{N0000} x_1^{\,N} + e_{(N-1)\,1000} x_1^{\,(N-1)} x_2 +,,, + e_{0000N} x_n^{\,N}$

与式は$f(x) = k(1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_N)/(x_1^{\,l_1}\ x_1^{\,l_2} \ldots x_N^{\,l_N}(1 + B_1 + B_2 + \ldots + B_N)) *\ \exp(E_0 + E_1 + \ldots + E_N)$

$\beta_1 = -B_1$, $\beta_2 = -B_2 + B_1^{\,2}$, $\beta_3 = -B_3 + 2B_1B_2 - B_1^{\,3}$, $\beta_4 = -B_4 + B_2^{\,2} - 3B_1^{\,2}B_2 + B_1^{\,4}$

与式は

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\ x_2,,,\ x_N) &= K(x_1^{\,-l_1}\ x_2^{\,-l_2} \ldots x_N^{\,-l_N})(1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_N)/(1 + B_1 + B_2 \\
&\qquad + \ldots + B_N) *\ \exp(E_0 + E_1 + E_2 + \ldots + E_N) \\
&= K(x_1^{\,-l_1}\ x_2^{\,-l_2} \ldots x_N^{\,-l_N})(1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_N)(1 + \beta_1 + \beta_2 + \ldots \\
&\qquad + \beta_N) *\ \exp(E_0 + E_1 + E_2 + \ldots + E_N) \\
&= K(x_1^{\,-l_1}\ x_2^{\,-l_2} \ldots x_N^{\,-l_N})[1 + (A_1 + \beta_1 + E_1) \\
&\qquad + (A_2 + 2A_1\beta_1 + 2A_1E_1 + \beta_2 + 2\beta_1E_1 + E_2) \\
&\qquad + (A_3 + 2A_2^{\,2}\beta_1 + 2A_1^{\,2}E_1 + 2A_2\beta_1^{\,2} + 2A_1E_1^{\,2} + \beta_3 + 2\beta_1^{\,2}E_1 + 2\beta_1E_1^{\,2} \\
&\qquad + E_3) + \ldots\ ]
\end{aligned}
$$

となる。これより，関数$f(x_1,\ x_2,,,\ x_N)$の微分ベクトルが得られる。その際，未知数の数の独立変数を求めるために，$x_i = x_{i0}$, $x_i = x_{i'0}$,,, $x_i = x_{i''0}$(${}_{i0} \fallingdotseq {}_{i'0}$, ${}_{i'0} \fallingdotseq {}_{i''0}$,,, ${}_{i0} \fallingdotseq {}_{i''0}$)を必要な数だけ設定することにより，必要な数の独立方程式を得る。

これらの方程式を解いて定数(a_{10000}, a_{20000},,, a_{0000N}, b_{10000}, b_{20000},,, b_{0000N}, e_{00000}, e_{10000},,, e_{0000N})を求めることが出来る。

10. 考察

(1) 誤答要因分析は級数を利用する。その際文字定数は変数として扱い多次元化する。

多項式の誤答要因分析は，微分ベクトルと分項マトリックスを掛けて項ベクトルを求める。模範解答及び学習解答の項ベクトルを比較して行う。

指数関数の誤答要因分析は，指数部が多次元1階もしくは1階に準ずるとき，漸化式 $d_N = \mathrm{const} * d_{(N-1)}$ により特徴の抽出を行う。2階以上のときは，自然対数をとった後虚数部をとった関数の微分ベクトルを求めて，これに多項式の手法を適用する。

有理式の誤答要因分析は，多次元1階もしくは1階に準ずるのとき，漸化式 $d_N = N * \text{const}\ d_{(N-1)}$ により特徴を抽出を行う。2階以上のときは，逆関数 $g(x)=1/f(x)$ の微分ベクトルを求めて，これに多項式の手法を適用する。

(2)　$\partial^N f/\partial x^N$ を求めるには，第N階差を利用する。$\partial^N f/\partial x^N$ で必要な有効桁数を確保するために，N*有効桁数の高精度で計算を行う必要がある。

(3)　CAIシステムは，誤答要因分析，管理システム，数式コンパイラー，動的メディア，教材及び教材作成法等が有機的に関連した構成となっている。数式コンパイラーやその他については別の機会に報告する。

(4)　誤答要因分析法は級数を利用しているので微分及び積分も可能である。またこれを要素とするベクトル及びマトリックスについても同様に利用可能となる。

11. おわりに

我々の目標とするバーチャル教師による教授システムの核に位置ずけされている誤答要因分析のアルゴリズムが基本関数や簡単な構造の数式について，級数を使ってまとめることが出来た。しかし，級数が利用出来ても構造が複雑な数式や級数に展開出来ない数式の場合等まだまだ多くの課題が残っている。

目標とする教授システムの開発のもとを造って戴いた本学の歴代の学生部長先生，教育方法検討改善委員会の関係の先生及び職員の方々に心より厚く感謝を申し上げます。

参 考 文 献

(1)　倉重，棚田：「ホスクルの開発」
電子情報通信学会教育工学研究会（ET87-2）1987年

(2)　倉重，棚田：「ホスクルにおける誤答解析システムの開発」
日本教育工学会第3回大会講演論文集1987年

(3)　倉重，棚田：「ホスクル／Gの開発」
教育工学関連学協会連合大会第2回全国大会講演論文集1988年

(4)　倉重，棚田：「ホスクル／Gの数式評価システムの改良」
第14回CAI学会研究発表大会論文集1989年

(5)　倉重，棚田：「階層学習形CAIシステム用誤答要因指摘システムの開発」
工業教育協会，教育工学関係シンポジュム1994年