# フッサールの数理哲学(2)：
# 拡張不可能性と決定可能性との同値

室工大紀要第49号(1999)121～128

# フッサールの数理哲学(2)
# ―拡張不可能性と決定可能性との同値―

二宮公太郎*

# Husserl's Philosophy of Mathematics (2)
# —Equivalence of the Inextensibility and the Decidability—

Kohtaroh NINOMIYA

(原稿受付日　平成11年５月10日　　論文受理日　平成11年８月31日)

Abstract

This treatise follows my preceding one in this "Memoirs" on Husserl's theory of the 'definite multiplicity'. We would be thinking over the equivalence of the inextensibility and the decidability of an axiom-system. This equivalence can in general be easily shown. But Husserl conciders, at every field of the objects, the decidability and the inextensibility of the axiom-system which bounds the field in question. This is the character of Husserl's way of thinking. Husserl's main interest lies in the question : 'Would a proposition which is deduced in the extended axiom-system have a meaning and be decidable or not in the original smaller field ?' And this point causes a certain problem when we, on extending the field to that of complex numbers, try to extend the axiom-system.

Key words : axiom-system, extension, definite multiplicity, phenomenology

## １．はじめに

拙稿は、本『紀要』前号掲載の拙論に続いている。

フッサールの「多様体」論において、R・シュミットによれば、「確定的」には三つの意味が在った。

Ｄ１： 拡張不可能性

Ｄ２： 決定可能性

Ｄ３： 意味論的完全性

である。 シュミットは、これら三者をフッサールが「同値」とする、と考える。

先の拙論は、フッサールにＤ３「意味論的完全性」の概念が存すること自体を否定し、これを〈決定可能性〉の概念へ還元した。 それゆえにまた、「意味論的完全性」と〈決定可能性〉との「同値」は単なる外観に過ぎない、と先の拙論は主張した。

他方、Ｄ１〈拡張不可能性〉とＤ２〈決定可能性〉との同値は、フッサール自身が随所で明言していることである。 いま拙稿では、そのことの意味を考察し

* 共通講座

たい。

## 2．一般的考察

### 2.1.〈拡張〉という概念

まず、公理系の拡張ということの一般的な意味を、フッサールの記述の内に見ておこう。

「古い諸公理は、一般的な諸操作と〈操作によって形成された一定の特殊な諸々のもの〉に対して、或る規定された意味を与える。 定義されていないもの、それは、この狭い方の領域において、排除されている。 新しい諸公理は、これら全ての諸公理を保持しているが、しかしまた〈操作によって形成されるが、これまでは定義されていず、これまでは開かれたままであった、特殊な諸々のもの〉に対して、或る意味を与える。 このことは、追加的な諸公理を要求する。 広い方の領域は、拡張された諸公理を有している……。」(傍点筆者)

[Husserliana,Bd.XII,S.444,Z.12-Z.19]

公理系のこのような〈拡張〉を、公理系に矛盾を惹き起こすことなく為すことができない、ということが、公理系の〈拡張不可能性〉である。

これに対して、公理系の〈決定可能性〉———当該公理系において理解され得る全ゆる命題ないし式が、当該公理系において証明ないし反駁される、ということ——— については、先の拙論のテーマでもあり、更めてフッサールから引用するには及ばないであろう。

### 2.2．同値に関するフッサールの諸表現

さて、これら拡張不可能性と決定可能性との〈同値〉ということに関して、フッサール自身の表現を幾つか見ておこう。

「確定的とは？ それは、———私が、諸公理……に、矛盾を引き起こすことなしには、如何なる新しい公理をも付け加えることができず、如何なる新しい実質的な諸公理や意味設定をも付け加えることができない———ということである。 或いは、——— …………純粋に論理的な諸概念と当の領域を定義する諸概念とから構成される、そういう何れの命題も、当の領域において真であるか或いは偽である———ということである。」(傍点筆者) [Husserliana,Bd.XII,S.446,Z.12-Z.21]

この引用の内で、フッサールは、前半では「確定的」という概念を拡張不可能性の面から表現し、後半では同じことを決定可能性 ——— フッサールにおいては、「真」の概念が「証明される」ことに還元され、「偽」の概念が「反駁される」ことに還元される、ということが、まさに先の拙論の主旨であった。——— の面から表現している。 ここでは確かに、フッサールは「同値」という語を用いてはいない。 しかし、‘別の言い方をすれば’の意で用いられている「或いは(oder)」の語に、容易に「同値」を読み取ることができる。

*「……形式的な客観領域を次のような具合いに限界づけている……ひとつの公理系は、確定的である。 すなわち、…………純粋に既に定義された諸概念から形成されるような如何なる独立の公理も付け加えられ得ない…………と、このような具合いにである。 ところでまた、私は次のようにも言うことができる。 私は或る公理系を定義するが、それは、或る客観領域を次のような具合いに定義する公理系である。 すなわち、…………諸々の公理によって有意味な全ゆる命題が、…………それら諸公理から帰結するか、それらに矛盾するか、いずれか一方である、という具合いにである。」(傍点筆者)

[Husserliana,Bd.XII,S.454,Z.1-Z.15]

前半は拡張不可能性の、後半は決定可能性の、それぞれ記述である。 ここでは、両者が、「……ようにも言うことができる(...kann...auch sagen)」という、明確に言い換えを意味する言葉によって、結び付けられている。 両者の同値を読み取り得ることは、再び容易である。

もっと明確に「同値」という語をフッサールが用いている記述を、引用しよう。

**「………… 或る領域を境界づける一つの公理系は、次の場合に〈確定的である〉という。 それは、その公理系に基づいて理解し得る全ゆる命題が、……〈諸公理に基づいて真である〉か、または〈諸公理に基づいて偽である〉か、何れか一方である、という場合である。 或いは他の表現をすれば、その命題が、〈諸公理から帰結する〉か、或いは〈諸公理に矛盾する〉か、ただ二様のことのみが可能である、という場合である。」(傍点筆者) [Husserliana,Bd.XII,S.457,Z.12-Z.20]

ここでは、「確定的」という概念が、決定可能性の面から規定されている。 少し置いて、フッサールは続

ける。

「次の規定は、先のものと同値である。 或る領域を有つ公理系は、その公理系が、この領域に関係づけられーその公理系によって有意味であるような-如何なる問題をも、開かれた(offen)ままにしておかず、決定されない(unentschieden)ままにしておかない、そのような場合、確定的である。」

(傍点筆者)[Husserliana,Bd.XII,S.457,Z.25-Z.28]

ここでフッサールが言及している「あらゆる問題の解決可能性」は、決定可能性と実質的に同じことであるから、場面はやはり決定可能性の圏域内に在る。 しかし、フッサールは、更に続けてこう言う。

***「次の重要な規定も、先のものと再び同値である。或る公理系は、それが一つの客観領域を境界づけ、しかも、この領域にとっては如何なる新しい(当の公理系から演繹的に独立な)公理も可能ではないという仕方でそうする、という場合、確定的である。」

(傍点筆者)[Husserliana,Bd.XII,S.457,Z.29-Z.33]

ここで明確に「同値」とされる規定こそ、まさに公理系の拡張不可能性に関わるものである。

## 2.3. 同値の「証明」

この〈同値〉に関して、フッサールは、シュミットも言う通り(Roger Schmit, Husserls Philosophie der Mathematik, 1981)、確かに証明らしい証明は為していない。 しかし、それはむしろ、ことがらの性格が然らしむるところに過ぎない。 この〈同値〉は、更まった証明の必要も無いほど明白であり、いきおいフッサールにも証明に類する言及は殆ど見られない、ということになる。 しかし我々は独自に、この〈同値〉の状況に少し立ち入ってみよう。

先の拙論では、意味論的完全性――真なる命題ないし式が全て証明されるということ――と決定可能性との同値の外観がなぜ生ずるのか、が問題であった。意味論的完全性は、「真」が公理系の「外」から定まるということを前提する。 この外観を生む構造を見るために、公理系が決定可能でない場合を、我々は考察したのである。

公理系Aが決定可能でない場合、Aにおいて有意味な式(x)のうち、Aにおいて証明され($B_A$)も反駁され($B_A\neg$)もしない式が存在する。 証明されること=真、反駁されること=偽 という フッサールの基本的なコンセプトからすれば、この式は、Aにおいて真($W_A$)でも偽($F_A$)でもない。 しかし、真・偽は何れかに定まらなければならない。 しかも、フッサール固有の「真」「偽」概念に従って、である。 拡張された公理系A'は、このために ―― すなわち、そのような式を、A'において証明される($B_{A'}$)か反駁($B_{A'}\neg$)されるかするものとし、これを、A'において真($W_{A'}$)か偽($F_{A'}$)の何れかとするために――必要であった。 先の拙論では、"拡張"という事態は、決定可能性の場面に、このようにして関わったのである。(図1)

これに対して、公理系Aが決定可能である場合は、全ての有意味な式xが、Aにおいて証明ないし反駁され、フッサール的な意味で、それぞれ、Aにおいて「真」か「偽」かである。(図2)

図1

$$B_A x \longrightarrow W_A x$$

$$\neg B_A x \wedge \neg B_A \neg x \longrightarrow \neg W_A x \wedge \neg F_A x$$

$$B_{A'} x \longrightarrow W_{A'} x$$

$$B_{A'} \neg x \longrightarrow F_{A'} x$$

$$B_A \neg x \longrightarrow F_A x$$

図2

$$B_A x \longrightarrow W_A x$$

$$B_A \neg x \longrightarrow F_A x$$

先の拙論では、ここから、決定可能性と「意味論的完全性」との「同値」の問題へと進んだ。 いま拙稿では、ここから、決定可能性と拡張不可能性との関係へ進む。 今度は、純粋に統辞論的な場面にのみ我々は関わるから、「真」「偽」の概念に関する配慮を全て省略しても構わないことになる。

我々は、一般に公理系について、拡張不可能ならば決定可能であること、決定可能ならば拡張不可能であること、を確認すればよい。 前者は、決定可能でな

いならば拡張可能である、ということだから、我々は、公理系の〈決定可能〉に関する先の拙論の場合分けを、踏襲することができる。

### 2.3.1. 公理系が決定可能でない場合

公理系Aが決定可能ではない場合、Aにおいて有意味な式のうち、Aにおいては証明も反駁もされない式が存在する。　これを証明ないし反駁するためにする公理系 A’ への拡張は、一般的にはむしろ要請されることである。（図1’）

図1’

$B_A x$

$\neg B_A x \wedge \neg B_A \neg x$ — $B_{A'} x$ / $B_{A'} \neg x$

$B_A \neg x$

そして、付け加えられる公理がもとの公理系と矛盾しない限り、拡張は、一般的には恒に可能である。ここには、拡張が必然的に矛盾を惹き起こすという事情は、なんら存在しない。　このことは当然過ぎることであり、フッサールが更めてこれに言及することは、基本的には無い。　ただ 彼は、「完結公理」との関連においてだが、次のように記している。

> 「…………、当の命題が、諸公理（完結公理は除外して）の如何なる帰結でもないならば、それは、新しい公理に基づいてのみ、妥当し得るのだが、しかし、そのことは、[完結公理によって]まさに排除されている。」（傍点筆者）
>
> [Husserliana,Bd.XII,S.442,Z.32-Z.34]

「完結公理(Schließungsaxiom)」は ここでの主題ではないのだが、一言しよう。　これをフッサールは、〈或る公理系に対して、それの拡張を禁ずるという主旨で付加される公理〉として、把握しているようである。　このように把握された限りでの「完結公理」は、ヒルベルトの「完全性の公理」とは別のものである。フッサールも、これを特にヒルベルトに結び付けてはいない。　ヒルベルトとの関係については後に触れるが、いずれにせよ詳細は別稿に任ねたい。

さて、公理系は、決定可能でないならば、拡張され得る。　このことの対偶 ───

或る公理系が拡張され得ないとすれば、
その公理系が決定可能の場合である。

─── は、同値のための一方の含意関係である。

### 2.3.2. 公理系が決定可能である場合

公理系Aが決定可能である場合、Aにおいて有意味な式の全てが、証明されるか反駁されるかの何れかである。（図2’）

図2’

$B_A x$

$B_A \neg x$

さてここで、或る式 $x_1$ が 証明されるものであるとしよう ─── 反駁されるものであるとしても、$\neg x_1$ が証明されるのだから、話は同様である ───。そして試みに、新しい公理 $\alpha_1$ を付け加えて公理系Aを拡張し、新しい公理系 A’ と為そうとしてみよう。$\alpha_1$ は、$x_1$ が、証明されるように付け加えられるか反駁されるように付け加えられるか、何れかである。$x_1$ が証明されるように付け加えられるならば、$\alpha_1$ は、独立ではないか、少なくとも必要でない。　不必要な公理を含むならば、A’ は、新しい公理系を形成し得ない。　他方、$x_1$ が反駁されるように $\alpha_1$ が付け加えられれば、公理系 A’ は矛盾を含む。

従って、───

或る公理系が決定可能である場合、
その公理系にとって拡張は在り得ない。

───これは直ちに、同値のための他方の含意関係である。

このような事情に関して、フッサールは、こう記している。

> 「拡張された公理系という概念の内には、次のことが、当然に存している。　それは、新たに付け加わる諸公理が、自らの内で矛盾的ではなく、しかもまた、古い諸公理の単なる諸帰結ではなくて、それ故にまた〈より狭い諸公理によっては開かれたままに留まり、それでも他面また古い諸公理と調和しもする、そういう諸主張〉を提出・立言する、ということである。　そこで今度は、新しい諸公理が同一の諸操作に関係するとすれば…………、次のことは明らかである。　それは、古い公理系が、諸操作に関して、全てを述語づけるというのではなくて、諸公理という形で付け加えられて現れるまさに多くのものを、開かれたままにしておく、ということである。」（傍点筆者）
>
> [Husserliana,Bd.XII,S.453,Z.29-Z.38]

拡張という概念の内には、〈狭い方の公理系によっ

ては開かれたままに留まる諸主張を立言する〉ということが、含まれている。

すなわち、まさに――

「拡張可能である」ことは、

「決定可能ではない」ことを〈含意〉する。

―― フッサールによるこの規定は、先のものの対偶である。

### 3．領域と公理系

#### 3.1．領域の限定

決定可能性と拡張不可能性との同値は、一般的に見れば、このようにして容易に示すことができる。 しかし、問題はもっと先に在る。

例えば、フッサールは、こんなことを記す。

「或る公理系が確定的である場合、それは、その公理系の一つの内的な性格である――そう私は言った。 さてところが、或る公理系は、一般に、更に拡張されることのできるものである。」(傍点筆者) [Husserliana,Bd.XII,S.455,Z.38 −S.456,Z.1]

「一般に」とは、決定可能であっても、ということを意味する。 このことは、同値――その一方の含意関係は「決定可能ならば拡張し得ない」である――ということと矛盾しないのか？ 同値ということを、実は、公理系が定義する〈領域〉の限定ということが、媒介している。 この間に矛盾は何ら存在しないのである。

先の〈同値〉に関する引用の内では、簡略さのために、〈領域〉ということに関する詳細な記述を、私は故意に省略した。 重要な箇所を補いながら、幾つかの引用を更めて見て行こう。

先の＊印の付された引用のうち、前半の拡張不可能性に関わる部分である。

「もう還元できず また形式的な客観領域を 次のような具合いに限界づけている(存在するものとして基礎づけている)一つの公理系は、確定的である。 すなわち、この領域にとっては、言い換えると、その公理系の同一性が確保されるということの下で、そして、如何なる新しい客観も、定義されたり、またこのことによって存在するものとして想定されたりすることは無い、という前提の下で、純粋に既に定義された諸概念から形成されるような如何なる独立の公理も、付け加えられ得ない…………と、このような具合いにである。」(傍点筆者) [Husserliana,Bd.XII,S.454,Z.1-Z.9]

ここでは、〈拡張不可能性が、一定の領域にとってであるということ、あくまでも領域が一定のものに固定されるという条件の下でであるということ〉が、明確にされている。

＊＊＊印の付された引用も、拡張不可能性に関わるものであった。 主旨は同様である。

「…………。 或る公理系は、それが一つの客観領域を境界づけ、しかも、この領域にとっては如何なる新しい(当の公理系から演繹的に独立な)公理も可能ではないという仕方でそうする、という場合、確定的である。 この〈領域〉にとって というのは、―――― 私が当の公理系を確保し、私が新しい存在設定を付け加えたりせず、私が当の領域を拡張しない、そのような場合、演繹的に新しい如何なる公理も、矛盾無しには付け加えられ得ない、―――― ということである。」(傍点筆者) [Husserliana,Bd.XII,S.457,Z.29-Z.36]

ここでも、拡張不可能ということが一定の領域にとってであるということが同様に述べられ、同時に、このことが、領域そのものを〈拡張〉しない場合のこととして明確にされている。

目を転じて、確定的という概念が決定可能性の面から規定されている場面について、見てみよう。 先の＊＊印の付された引用が、それであった。

「公理系の領域。 我々は、一つの領域を有つ諸公理系に、話を限定する。 (何故に、ただ直ちに「公理系を満足する諸客観の総体」、というのではないのか。) 我々は、次のように定義する。 或る領域を境界づける一つの公理系は、次の場合に〈確定的である〉という。 それは、その公理系に基づいて理解し得る全ゆる命題が、すなわち、その領域に関して把握される全ゆる命題が、〈諸公理に基づいて真である〉か、または〈諸公理に基づいて偽である〉か、何れか一方である、という場合である。 或いは他の表現をすれば、その命題が、〈諸公理から帰結する〉か、或いは〈諸公理に矛盾する〉か、ただ二様のことのみが可能である、という場合である。」(傍点筆者) [Husserliana,Bd.XII,S.457,Z.12-Z.20]

ここでは、公理系の決定可能性ということが、あくま

でも〈一定の領域を定義する限りでの公理系〉という規定に従うべきであることが述べられ、また、或る命題の有意味性が、当の〈領域〉における有意味性として把え返されている。

公理系は、領域と恒に相関的である。 我々がフッサールに即して決定可能性と拡張不可能性との同値を考える際には、このことにいつも注意していなければならない。 この〈同値〉は、或る特定の領域に視野を限定した場合に、〈その領域を画する公理系の、決定可能性と拡張不可能性との同値〉なのである。

## 3.2. 数領域の拡張

ところで、〈恒に我々が公理系を、一定の領域を限界づけるという限りで把握する〉ということを、今度は領域の方を主体として見れば、〈領域を一定のものに限定するということが、翻って公理系の拡張を許さない〉という仕方で、我々が拡張不可能性を規定することもできる、という関係が現われてくる。 新しく引用しよう。

> 「或る公理系が確定的である限りは、その公理系は、一定の範囲の操作諸客観を、――これら操作諸客観が、これまでの諸公理から演繹的に区別される如何なる諸公理をも、許容しない、という仕方で――、完全に規定する。 [例えば]偶数に関する算術の客観領域は、当領域の諸操作を通して、完全に規定されている。 いま私が[話を]、これらの[偶]数に限定すれば、言い換えると、偶数の諸公理を通して限界づけられた現実存在の範囲…………に限定すれば、私は、この範囲を、如何なる新しい諸公理にも、もはや服させることはできない。」(傍点筆者)
>
> [Husserliana,Bd.XII,S.456,Z.1-Z.10]

具体的に言えば、こういうことである。 例えば、我々が偶数の公理系の公理の一つに $Sx=x+2$ を採用したとしよう。 ここに整数一般に妥当すべき $Sx=x+1$ を付加することは、公理系に矛盾を惹き起こす。 偶数の公理系をこのような仕方で既に始めたならば、領域を偶数から整数へ拡張するためには、公理系を「変更」――拡張ではなく――しなければならない。 このような事態は、数領域の拡張一般という場面に、我々の関心を導く。

フッサールの言う“想像的なるもの”は、広い意味を有っている。 虚数に限らず、無理数も、分数も、負の数さえ、彼によれば、算術における“想像的なるもの”である。 我々はここで、数領域の拡張に即して、公理系の決定可能性と拡張不可能性を考えてみよう。

フッサールは、算術の公理系を貫く基本的な諸形式を、関係(Beziehung)と連結(Verknüpfung)に大別する。これに従って、関係については、相等・より大・より小 の諸公理を、また連結については、加法・減法・剰方・除法 の諸公理を、一般に受け容れられる公理系の諸要素として、彼もまた認める。

フッサールが公理系の拡張を語るとき、それは、数領域の拡張ということと恒に関係している。

数領域を〈整数〉に限定する場合、公理系は、相等・大小 の関係諸形式と、加法・減法・剰法 の連結諸形式とに、限定される。 〈有理数〉への領域の拡張には、除法連結に関わる公理を付加することによる公理系の拡張が対応する。 更に、無理数を含む〈実数〉への領域の拡張には、これらに‘アルキメデスの公理’を付加することによる公理系の拡張が、やはり対応する。

ここまでは一般に認められることである。

数領域は更に、複素数へと拡張され得るが、このことと公理系の拡張との関係は、後に述べるように一つの問題である。

## 3.3. 拡張の必要条件としての決定可能性

公理系の拡張ということが、もとの公理系に対して必要な前提として要求することは、まず当然に、もとの公理系が無矛盾であることだが、これに加えてフッサールは、もとの公理系が決定可能であることを、拡張のための必要条件として考えている。

> 「より狭い体系の諸命題を発見するために、より広い体系を用いることは、次の場合にのみ許され得る。 それは、〈より狭い領域における全ゆる命題が、…………その領域の内で決定されていて、それゆえまた、その領域[を画する体系]の帰結であるか矛盾であるかでなければならない〉ということを、それに則って我々が認識するところの或る何らかの特性を、我々が手にしている、こういう場合である。」(傍点筆者)
>
> [Husserliana,Bd.XII,S.456,Z.36－S.457,Z.2]

この決定可能性の根拠に関して、フッサールは次のような考え方を有っている。

「このこと[算術の公理系の決定可能性]を、私は何処から知るのか？　何れの直接の操作連結も、それが如何に何度も各々の操作を含んでいようとも、一つの数(numerus) に等しい。　このことは、証明される。　従って当然に、二つの代数的な一般に完結された(geschlossen) 表現を等しいものとして主張する そういう何れの命題も、同様にまた、代数的かつ数的な諸記号からつくり上げられている-混合した-何れの等式も、諸公理に基づいて必然的に、真であるか偽であるかでなければならないであろう。　なぜならば ――――― 私が、………諸々の数のグループを一つの定式へ投入する場合、それが如何なるものであっても恒に、等式の何れの側にも、一つの規定された数が存在する。　しかも、諸公理に基づいてである。　その数が、全ゆる可能的な諸数の諸結合 (Zahlen-kombinationen) にとって等しいのであれば、その定式は成立する。　そうでなければ、成立しない。 ――――― からである。……………… 以上から、〈二つの表現は、恒に同一の数を提示するか、或いは異なった二数をも提示するか、何れかである〉ということは、明らかである。」(傍点筆者)

[Husserliana,Bd.XII,S.446,Z.22-Z.35]

要するにこういうことである。　算術の命題は、一つの等式に還元される ――― フッサールの別の箇所 (Husserliana,Bd.XII,S.440,Z.33-Z.36) によれば、大小関係 例えば $a>b$ は、$a=u+b$ ($u$は正) として表現され得る ―――。　その両辺に現われるのは、諸操作の帰結としての二つの数である。　それら二数が恒に等しいか否かは、諸公理によって規定されている。 …………と。

このようなフッサールの論理が、そのままでゲーデルに対抗し得るか否かは、一つの問題である。　しかし、このあまりにも大きな問題に関しては、筆者の能力が許す限りでではあるが、当然に別稿で論ずべきことがらである。

### 3.4. フッサールの関心――広狭両公理系の関係

さて、もとの公理系についてこの決定可能性を前提した上で、フッサールは、もとの公理系と拡張された公理系との間の関係について、次のような関心を示す。二箇所を続けて引用しよう。

「いま問題となっている事柄は、純粋に[もとの公理系]A の諸客観へと関係する一つの主張を、我々が[拡張された公理系]Awから導いてくる、ということである。　このことは、我々が、その主張に次のことを見て取り、或いは次のことを何時でも証明し得る、ということを前提する。　それは、〈その主張が、純粋に、より狭い領域の諸客観にとって或る意味を有つ〉ということである……。」(傍点筆者)[Husserliana,Bd.XII,S.453,Z.14-Z.18]

「しかし、いまなお問題なのは 、〈はたして、広い方の領域の導出された諸命題が、この［決定可能という］意味で、狭い方の領域に当てはまる、のかどうか〉ということである。　そのことが予め規定されていないならば、我々は全く何も言うことができない。」(傍点筆者)

[Husserliana,Bd.XII,S.441,Z.28-Z.31]

このように、拡張された公理系のうちで導出された命題ないし式が、もとの狭い方の公理系で、意味を有ち・また決定可能であるということ。　拡張の条件としてこの観点を有つことは、極めて重要なことである。

### 3.5. 複素数領域の問題

フッサールも記すように(Husserliana,Bd.XII,S.446,Z.36-Z.42)、方程式は、当該の領域で解を有するか否か、決定されている。　例えば、方程式

$x^2-2x+3=0$

は、実数の領域で解を有たない。　この意味では、実数の領域を画する公理系は決定可能である。　しかし、

$x^2-2x+3=0$ の解は

$x=1\pm\sqrt{-2}$ である。

という命題となると、今度は、実数の領域では「開かれたまま」の ――― と言っても、決定不可能の以前に むしろ「意味を有たない」――― ものとして、把え返されることになるであろう。　複素数へと領域が拡張されて初めて、この命題は、意味を有ち得て、また決定可能となり得る。

問題は、$i^2=-1$ を伴った複素数の公理系と・もとの実数の公理系との間の関係である。

虚数単位$i$を含む数は、従って複素数の公理系の内で導出される多くの式は、実数の公理系の重要な関係形式である大小関係の公理――これはアルキメデスの公理の基礎を成してもいる――には服さない。
しかし、複素数の公理系の内で導出される式は、全て、実数の公理系のその他の諸形式 ――― 相等関係、加法・減法・剰法・除法 の操作諸形式 およびそれらの複合諸形式 ――― には服する。

そうすると、問題はこうなる。　このような関係に在る二つの公理系について、一方（複素数の公理系）を他方（実数の公理系）の「拡張」として扱ってよいか否か、ということである。

次のようなフッサールの記述は、一つのヒントになるだろう。

「例えば、定義された何れの命題もが理念的な諸客観との間の相等性・或いは〈大ないし小〉（das ><）へ還元され得る、そういうところなら何処でも、当の公理系は定義されていることになる。ここで、更に諸区別を為すこともできるであろう。例えば、一定の形式の諸命題だけがこのような特性を有つという場合には、当の公理系を、〈この形式の諸命題に関して定義されている〉というふうに呼ぶこともできるだろう。　想像的なるものを通る路は、従って、確定性という条件に結び付けられている。　しかも、この〈部分的に確定的なもの〉で充分である。」（傍点筆者）

[Husserliana,Bd.XII,S.443,Z.29-Z.37]

ここから推測すれば、フッサールは、実数から複素数への領域の拡張に対しても、公理系の拡張によって対応するのかも知れない。　しかし、これについては、いまはペンディングにしておこう。

### 3.6．ヒルベルトとの比較

他方、ヒルベルトは、拡張ではなく「変更」と見るのかも知れない。

まず、S・バシュラールに従って、ヒルベルトによる「拡張」の扱い方を、一般的な意味においてではあるが見ておこう。

「公理Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ,Ⅳの集合を A で表示し、完全性の公理を S で表示しよう。　有理諸数は、公理系Aのための一モデルを形成する。　諸実数（言い換えると有理諸数と無理諸数）は、この体系Aのためのもう一つ別のモデルを形成する。　しかし、有理諸数は、体系A＋Sを充足し得ない。なぜならば、無理諸数をそれらに付け加えることができ、これは公理Sが禁ずることである、からである。　反対に、諸実数の群(group)は、拡張され得ない。………………　諸実数の群のみが、体系A＋Sの一つの可能なモデルである。　公理Sに依拠して、ヒルベルトは、実[数]モデルのみを維持するために、有理[数]モデルを排除した。こうして、このヒルベルト的な意味で〈諸実数の公理系は“完全”である〉ということは、〈この体系のモデルで、拡張を容れる、全てのモデル〉は排除される、ということ……を表示する。」（傍点筆者）[Suzanne BACHELARD, A Study of Husserl's Formal and Transcendental Logic, 1968, P.61]

さて、フッサールは、公理系の変様の諸形態を分類する際に、ヒルベルト的な形式を引いて、次のように記している。

「領域の拡張が、公理系の一つの変更を通してのみ可能である、という場合、ということはすなわち、外的な諸公理の単なる併置を通しては生じ得ない、という場合、[この公理系は] 完全な(vollständig)公理系（ヒルベルト）[である]。」（傍点筆者）　[Husserliana,Bd.XII,S.495,Z.13-Z.16]

ヒルベルトについては、フッサールは、公刊された諸著作においてのみならず、数理哲学の草稿の内で、随所に言及している。

フッサールは、拡張不可能性に関して、ヒルベルトのそれを「本質的」と呼び、自分のそれを「本質外的(außerwesentlich)」と呼ぶ。　このことは、公理系ないし領域の拡張ということへのアプローチの仕方の違い ―― ヒルベルトは、或る一つの公理系について、〈モデルという形を採った客観領域〉の拡張を考える。これに対してフッサールは、客観領域の拡張と共に、言わばその都度、公理の付加を伴った公理系の拡張を考える ―― に関係しているように思われる。

しかし、フッサールの考え方は、彼も『イデーン』等の内で明言している通り、ヒルベルトのそれと無関係だという訳ではない。　ヒルベルトが、一つの公理系について、或るモデルが「完全性の公理を満たす」と言うとき、そこには、フッサールが或る公理系について「拡張不可能である」と言うときと、実質的に同じ思考が働いている、とも言い得る可能性が在る。

これらの事情に関しては、稿を改めて論じたい。

（にのみや　こうたろう・哲学）