



フレキシブルビームの曲げ振動に及ぼす内部と外部減衰の分離評価

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-03-27 キーワード (Ja): キーワード (En): Flexible beam, Free vibration, Internal damping coefficient, External damping coefficient 作成者: 齋當, 建一, 西田, 公至, 渡邊, 久晃 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/2867

フレキシブルビームの曲げ振動に及ぼす 内部と外部減衰の分離評価

齊当 建一*¹, 西田 公至*², 渡邊 久晃*³

Separate Estimation of External and Internal Damping Coefficients on Bending Vibration of Flexible Beams

Ken-ichi SAITO, Kohshi NISHIDA and Hisa-aki WATANABE

(原稿受付日 平成14年5月7日 論文受理日 平成14年8月30日)

Abstract

This paper deals with the estimation method of internal and external damping coefficients of flexible beams made of stainless steel and phosphor bronze. In the equation of motion of the beam, it is assumed that the internal damping force is proportional to the strain rate in bending vibration of the beam and that the external damping force is proportional to the velocity of bending displacement and the area of the surface rectangular to the velocity of the beam. The internal and external damping coefficients are calculated by use of the solution of the equation of motion for transverse free vibration of the beam in consideration of above two damping effects and the wave-form of damped vibration obtained experimentally. The approximation by the method of least squares is applied in order to determine precisely the envelope of damped vibration. As a result, the effectiveness of this method is confirmed.

Keywords : Flexible beam, Free vibration, Internal damping coefficient, External damping coefficient

1 緒言

近年、産業界において振動対策が課題となっており、その中でも構造材自体の制振効果を高める研究が進められている。材料の制振特性を評価する方法は日本工業規格(以下JIS)⁽¹⁾で規定されており、この規格では、両端支持梁及び片持ち梁の

曲げ振動に対する振動減衰特性の試験法を規定している。しかし、材料の減衰特性を評価する場合、試験片のみの減衰特性を評価しなければならないが、実際には空気等の外部流体による減衰も加わるため、材料自体の正確な評価が困難である。JISでは外部流体の影響については一切規定されておらず、振動減衰に及ぼす外部流体の制振効果がどの程度寄与しているのかを評価することが困難である。

例えば、宇宙環境では、外部流体が存在しないため、流体による減衰効果を期待することができない。従って、振動が発生した場合、地球上より

*¹ 機械システム工学科

*² 室蘭工業大学名誉教授

*³ 博士前期課程機械システム工学専攻2年

も持続時間が長くなる。そのような環境の中で活動するロボットアーム等は正確な位置決め制御が困難になり、作業に支障をきたす恐れがある。

そこで本研究では、片持ち梁を自由振動させ、振動波形より対数減衰率を算出し、材料固有の減衰（内部減衰）と外部流体による減衰（外部減衰）を分離して評価する方法を検討する。

2 理論解析

2.1 片持ち梁の曲げ振動の運動方程式

Fig.1 に長さ l の片持ち梁について、固定端から x の位置における微小要素の力の釣り合いを示す。ここで、幅 b 、厚さ h 、時刻 t 、縦弾性係数 E 、断面二次モーメント I 、断面積 A 、密度 ρ 、外部減衰係数 c_1 、内部減衰係数 c_2 とする。振動は梁の長さ方向に直交な y 方向に発生し、曲げ剛性 EI は梁の任意の断面について一様であり、梁には外力が作用していないと仮定する。梁の曲げに対する弾性と内部減衰にはフォークトモデルを適用する⁽²⁾。ベルヌーイ・オイラーの仮定に基づき、外部・内部減衰を考慮した曲げ振動の運動方程式は以下のように導かれる。

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c_1 \frac{\partial y}{\partial t} + c_2 I \frac{\partial^5 y}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

ここで、境界条件は一端固定、他端自由の片持ち梁とし、初期条件は自由端において、時刻 $t=0$ で変位 $y=y_0$ 、速度 $\partial y / \partial t=0$ とする。このときの式 (1) の一般解は次式となる。

$$y(x,t) = 6y_0 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi(x,\beta_i)}{(\beta_i l)^4} \frac{\sqrt{\omega_i^2 - \frac{c_1 c_2}{\rho A E} \omega_i^2}}{\sqrt{\omega_i^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{c_1}{\rho A} + \frac{c_2}{E} \omega_i^2 \right)}} \times \exp(-\lambda_i t) \sin\left(\sqrt{\omega_i^2 - \lambda_i^2} t + \phi_i\right) \quad (2)$$

ここで、

$$\xi(x,\beta_i) = \frac{\zeta(x,\beta_i)}{\sinh \beta_i l \cdot \cos \beta_i l - \cosh \beta_i l \cdot \sin \beta_i l} \quad (3)$$

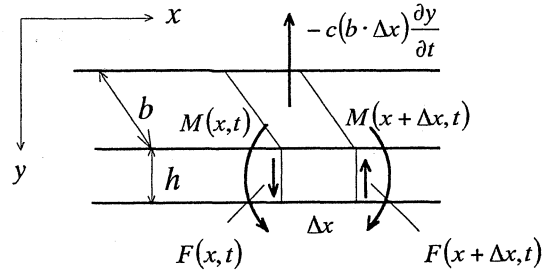


Fig.1 Forces acting on a beam element

$$\zeta(x,\beta_i) = (\cosh \beta_i l + \cos \beta_i l)(\sinh \beta_i x - \sin \beta_i x) - (\sinh \beta_i l + \sin \beta_i l)(\cosh \beta_i x - \cos \beta_i x) \quad (4)$$

$$\tan \phi_i = \frac{\sqrt{\omega_i^2 - \lambda_i^2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{\rho A} - \frac{c_2}{E} \omega_i^2 \right)} \quad (5)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{\rho A} + \frac{c_2}{E} \omega_i^2 \right) \quad (6)$$

式(2)において ω_i は i 次の固有角振動数であり、

$$\omega_i = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \beta_i^2 \quad (7)$$

ここで、 β_i は片持ち梁の振動数方程式 (8) の根である式 (9) の $\beta_i l$ から得られる⁽³⁾。

$$1 + \cosh \beta_i l \cdot \cos \beta_i l = 0 \quad (8)$$

$$\beta_i l = 1.875, 4.694, 7.855, \dots \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (9)$$

式 (2) の各次数における振幅を比較すれば 2 次の場合でも 1 次モードの振幅に比べ約 1/200 となるので 2 次以降のモードを無視し、1 次モードのみの式で近似すると次式を得る。

$$y(x,t) = Y_1 e^{-\lambda_1 t} \sin\left(\sqrt{\omega_1^2 - \lambda_1^2} t + \phi_1\right) \quad (10)$$

ここで、 Y_1 は次式で表される。

$$Y_1 = 6y_0 \frac{1}{(\beta_1 l)^4} \xi(X, \beta_1) \frac{\sqrt{\omega_1^2 - \frac{c_1 c_2}{\rho A E} \omega_1^2}}{\sqrt{\omega_1^2 - \lambda_1^2}} \quad (11)$$

2.2 減衰係数の導出方法

対数減衰率 δ は Fig.2 に示すような減衰曲線において、 k 番目と $k+1$ 番目の 2 つの振動振幅の極大値 y_k と y_{k+1} を用いて次式で定義される。

$$\delta = \ln \frac{y_k}{y_{k+1}} \quad (12)$$

また、 k 番目の極大値における時刻を $t=t_k$ 、周期 T_d とすると、以下のような関係が得られる。

$$y_k(x, t_k) = Y_1 \exp(-\lambda_1 t_k) \quad (13)$$

$$y_{k+1}(x, t_{k+1}) = Y_1 \exp\{-\lambda_1(t_k + T_d)\} \quad (14)$$

これらを式 (12) に代入し整理すると、

$$\delta = \lambda_1 T_d \quad (15)$$

式 (15) に式 (6) を代入すると、

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{\rho A} + \frac{c_2}{E} \omega_1^2 \right) T_d \quad (16)$$

式 (16) に式 (7), (9) を代入すると、

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{c_1}{\rho A} + \left(\frac{1.875}{l} \right)^4 \frac{c_2 I}{\rho A} \right) T_d \quad (17)$$

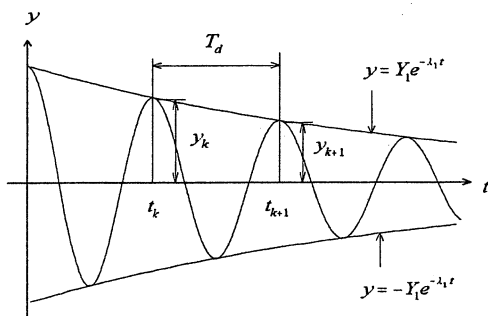


Fig.2 Damped vibration and envelope of peak values of the amplitude

式 (17) より外部減衰係数 c_1 、内部減衰係数 c_2 を算出するには、未知数が 2 つであるから梁の長さを l_1, l_2 と変化させ、連立方程式を c_1, c_2 について解けば、次の 2 式を得る。

$$c_1 = \frac{2\rho A}{l_1^4 - l_2^4} \left(\frac{\delta_1}{T_{d1}} l_1^4 - \frac{\delta_2}{T_{d2}} l_2^4 \right) \quad (18)$$

$$c_2 = \frac{2}{1.875^4} \frac{\rho A}{I} \frac{l_1^4 l_2^4}{l_2^4 - l_1^4} \left(\frac{\delta_1}{T_{d1}} - \frac{\delta_2}{T_{d2}} \right) \quad (19)$$

2.3 実測値の減衰能

実測された振動波形から対数減衰率 δ を求める場合、測定誤差や外乱等によりばらつきを生じる。さらに、実在する材料の対数減衰率 δ は時間経過と共に変動がある。そこで、波形全体の特性を反映した値とするために、実測した極大値の包絡線を以下のような式で近似する。

$$y(x, t) = Y_1 \exp(-\lambda_1 t) \quad (20)$$

ここで、実測した振動波形の極大値を最も良く近似する λ_1 の決定には最小自乗法を適用する。

近似式から減衰に関する指数 λ_1 を得ることによって、式 (15), (18), (19) の関係から外部減衰係数 c_1 、内部減衰係数 c_2 を次のように求めることができる。

$$c_1 = \frac{2\rho A}{l_1^4 - l_2^4} (\lambda_{11} l_1^4 - \lambda_{12} l_2^4) \quad (21)$$

$$c_2 = \frac{2}{1.875^4} \frac{\rho A}{I} \frac{l_1^4 l_2^4}{l_2^4 - l_1^4} (\lambda_{11} - \lambda_{12}) \quad (22)$$

3 実験装置及び実験方法

Fig.3 に実験装置の概略を示す。本装置では、試験片の一端を梁の幅及び厚さの溝をつけた金属ブロックで挟み、ボルトで固定して片持ち梁とする。梁の自由端にマイクロメータヘッドと連動したストップで初期変位を与え、電磁石で固定する。電磁力を開放することでストップが外れ、試験片を自由振動させる。振動振幅はレーザ変位計を用い

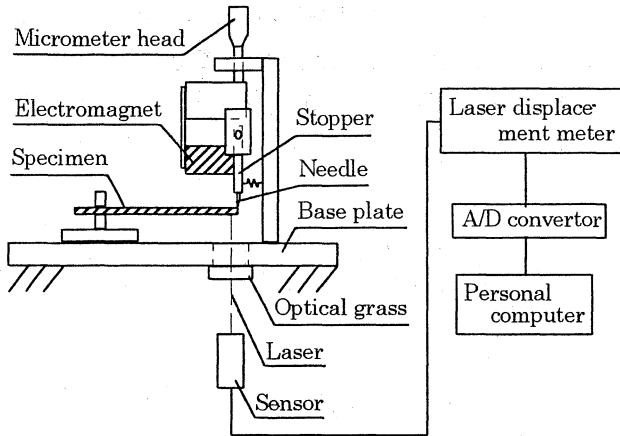


Fig.3 Experimental setup

Table.1 Dimensions and values of physical properties of beams

Material	Stainless steel		Phosphor bronze		
Length l (mm)	130	140	150	160	170
Width b (mm)	10		15	20	
Thickness h (mm)	1				
Density ρ (kg/m ³)	7930		8800		
Young's modulus E (GPa)	197		98		

て非接触で測定する。

Table.1 に実験で使用する梁の寸法及び物性値を示す。実験で使用する梁の材質には、ステンレス鋼と燐青銅を用いる。また、梁の厚さ $h=1\text{mm}$ 、幅 $b=10, 15, 20\text{mm}$ の3種類を使用する。

内部及び外部減衰係数を算出するため、各幅の梁について梁の長さ l を 130, 140, 150, 160, 170mm と変化させて減衰自由振動を測定し、互いに異なる長さの全ての組み合わせから減衰係数を算出し、それらの平均値を求める。ここで、梁の初期変位は梁材料の弾性域を確実にするため、1mm とする。

4 実験結果及び考察

Fig.4 に実測例として、ステンレス鋼 ($l=130\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $h=1.0\text{mm}$) の振動波形を示す。また、Fig.5 には振動波形の極大値を最小自乗法により式 (20) で近似した包絡線を示す。図中には近似した包絡線の Y_1 , λ と相関係数 $|r|$ を示す。

この近似では $y>0$ の極大値と $y<0$ の極小値の2通りを示しているが、いずれも十分な近似を得ている。このようにして得られた λ を用いて計算し

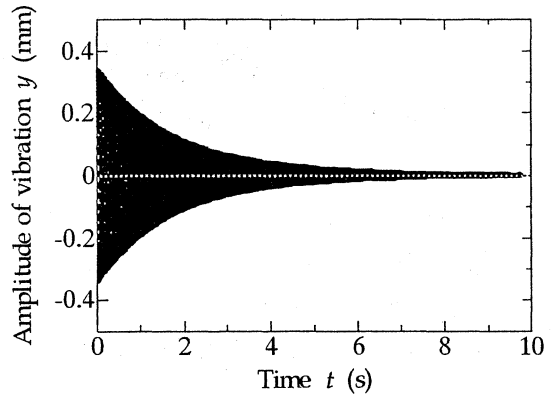


Fig.4 Experimental example of damped vibration (Stainless steel: $l=130\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $h=1\text{mm}$)

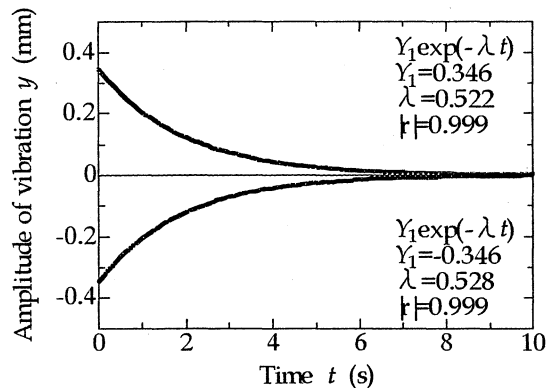


Fig.5 Envelope obtained by approximation of damped vibration (Stainless steel: $l=130\text{mm}$, $b=10\text{mm}$, $h=1\text{mm}$)

た外部減衰係数 c_1 と内部減衰係数 c_2 をそれぞれ Fig.6 と Fig.7 に示す。

Fig.6 より、いずれの材料も外部減衰係数 c_1 は梁の幅 b が大きくなると共に増加する傾向を示している。しかし、材料によって c_1 の増加傾向には違いが見られる。これは材料の縦弾性係数 E と密度 ρ の差異によって固有角振動数が異なるため、振動速度に違いが生じ、その結果、仮定している速度比例型の外部減衰が厳密には成立しないことによるものと考えられる。

Fig.7 より、内部減衰係数 c_2 は梁の幅による違いは見られないが、燐青銅の方が大きな値を示す。

ここで減衰に寄与する外部減衰と内部減衰の大小関係について検討する。減衰に関与する指数 λ_1 は式 (17) より外部減衰に関わる指数 λ_a と内部減衰に関わる λ_b の和として次式で表される。

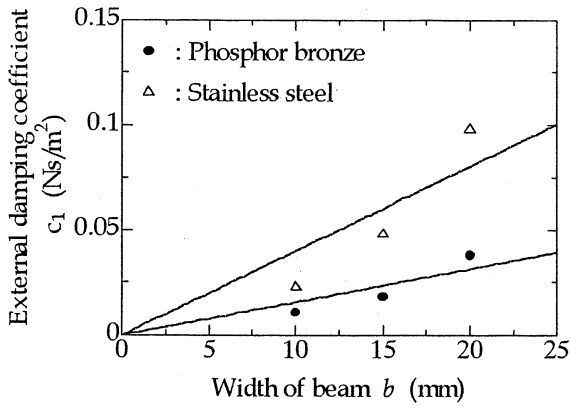


Fig. 6 External damping coefficient

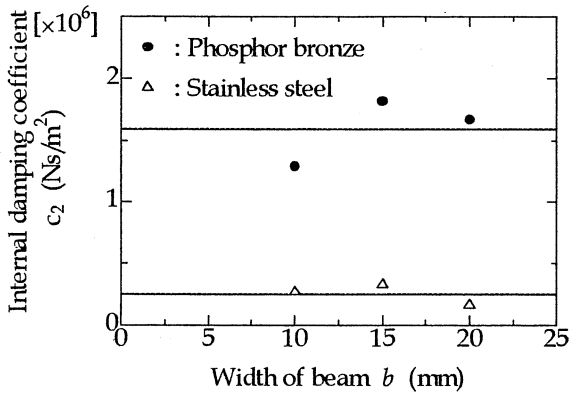


Fig. 7 Internal damping coefficient

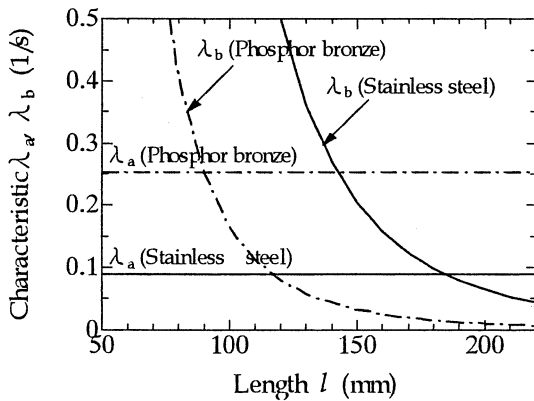


Fig. 8 Comparison between external and internal damping effect

$$\lambda_1 = \lambda_a + \lambda_b \quad (23)$$

ここで,

$$\lambda_a = \frac{c_1}{2\rho A}, \quad \lambda_b = \frac{c_2 I}{2\rho A} \left(\frac{1.875}{l} \right)^4 \quad (24)$$

式 (24) から分かるように λ_b は梁の長さ l に依存する。そこで、Fig.8に λ_a と λ_b の効果に及ぼす梁の長さ l の影響を示す。いずれの材料による梁も、梁の長さ l が大きくなると内部減衰の効果は急速に減少する。さらに、減衰に占める外部減衰と内部減衰の効果は材料によって異なることが分かる。

5 結 言

梁の曲げ振動における内部減衰と外部減衰の分離評価の方法を提案し、2種類の金属材料にこの方法を適用して検討を行った結果、以下のことが明らかにされた。

- (1) 外部減衰係数 c_1 は梁の幅が大きくなると共に比例的に増加する傾向を示す。
- (2) 内部減衰係数 c_2 は梁の幅によらず、材料による差異が大きい。
- (3) 梁の長さが長くなると共に内部減衰の効果は急速に減少する。

参考文献

- (1) 日本工業規格 JIS G 0602 制振鋼板の振動減衰特性試験方法, (1993), p1-22.
- (2) 妹澤克惟, 久保慧, 棒の屈曲振動による固体粘性の測定, 応用物理, 第3号, (1932), p1-8.
- (3) 亘理厚, 機械振動, (1980), p58-61.