フッサールの数理哲学（７）：「虚数」の問題

室工大紀要第52号(2002)81〜92

フッサールの数理哲学(7)
—「虚数」の問題—

二宮　公太郎*[1]

Husserls Philosophie der Mathematik 7
—Frage des "Imaginären"—

Kohtaroh NINOMIYA

(原稿受付日　平成14年5月7日　　論文受理日　平成14年8月30日)

Kurtzfassung

Wir erweitern den Gebiet der Realen Zahlen zu dem der Komplexen Zahlen. Können wir dann das Axiomensystem der Komplexen Zahlen als die Erweiterung von dem der Realen Zahlen ansehen? Es handelt sich um wie wir den Ausschluß der Ordnugsbeziehung denken. Die komplexe Zahlen sind entweder auf Hamiltonische Weise oder mit der imaginären Einheit 'i' ausgedrückt. Im lezteren Falle, nach Husserls Theorie der Erweiterung, können wir die Frage bejahen.

Schlüsselworte : komplexe Zahlen, Erweiterung des Gegietes, Erweiterung des Axiomensystems, das Imaginäre, Phämomenologie

---

1．はじめに

本『紀要』第50号載録の拙論 (1) において、筆者は、公理系の拡張に関するフッサールの理論を、ヒルベルトとの関係において扱った。その際に、「複素数」への領域拡張に際して、公理系の拡張に対する態度が、フッサールとヒルベルトとでは異なっている可能性が在る、ということが触れられ、同時にそれの解明は、筆者にとって「別稿」の課題とされていた (2)。本稿は、それに応えることを意図している。

問題の中心は、実数から複素数への数領域の拡張に伴って、新しい公理系が、順序(大小)関係を定義しないという大きな変様を受ける、ということに在る。この変様が、公理系の「拡張」として把握し得るか否か、が問題なのである。

ヒルベルトは、これを否定する。実数の公理系に関するヒルベルトの「完全性公理」は、このことを示している。この場合には、実数の公理系から複素数の公理系への変様は、単なる拡張ではなく、「変更」ないし「置き換え」として、把握されることになる。この考え方は、自然であり、一般に数学者にも受け容れられ易いものである。

しかし、<新旧両領域の諸要素と、それらに関わる公理系中の諸法則との、対応関係>について、その構造をフッサールの仕方によって理解する場合には、この変様を公理系の「拡張」として把握し得る可能性も現れてくる。その際に、複素数の構成を、<虚数単位 i >を導入することによって為す場合と、<二つの実数の順序対>として為す場合とでは、様

*1 共通講座・哲学

相を異にするであろうことが、おのずと推測される。『数理哲学草稿』(3) 第VII草稿 (4) 中には、我々が、新旧両領域と諸法則との対応構造に関するフッサールの理解を知る上で、極めて重要な議論が展開されている。 これを我々は、いま仮に「部分の理論」と名付け、まず初めに詳細に考察しよう。 次いで、＜二実数の順序対＞とするタイプと、＜虚数単位ｉ＞を導入するタイプとについて、この順で、複素数の公理系が実数の公理系の「拡張」として把握し得るか否かを、検討しよう。

2．「部分の理論」

この草稿は、三つの研究から成る。 フッサールは、公理系の決定可能性を多様体の拡張との関係において論じた「第二研究」の内で、正の偶数の系列から整数一般の系列———この場合これで充分である———への拡張と、後者から＜複素数＞の２次元系列への拡張とについて、それらを全く並列させて、新旧公理系の関係に関して、こういう言い方をしている。 すなわち———

正の偶数の系列は、二方向に無限な数系列の一つの部分である。 この後者は再び、複素数から成る２次元多様体の一つの部分である。 正の偶数の体系は、一定の要素的な諸関係を通して定義されている。 これら諸関係においては、数系列の拡張を通して、[もとの系列に関して] 何ものも変ぜられない。 如何なる新しい要素的な諸関係も付加されず、ただ、新しいもの [体系] と古いもの [体系] との間に、新しい諸要素と諸関係が、付加されるだけである。 拡張された領域の諸法則は、狭い方の領域の諸法則を包摂する。 ただしそれでも、古い領域のためには、如何なる新しい諸法則も設定されない、という仕方ででである。 古い領域においては、まず諸要素・諸々の数が、そして次に、諸数の諸相関が、[また] 諸数の諸関係と諸連結とのための諸法則が、定義されており、新しい領域においては、新しい諸相関が、新しい諸要素と同様、定義されてもいよう。 さらには、新しい領域においては、古い諸要素と古い諸相関とを包含するような、同様にまた [古い体系と新しい体系との] 両方の諸要素と諸相関とを包含するような、そういった考え得る諸々の関係が、存在するであろう。(5)

というふうにである。

ここで、ふた通りの領域の拡張において、＜新旧の公理系が有する諸法則と、新旧の諸要素との、構造関係＞に関して、両者を全く区別せず、一様に事を考えている、ということに注意したい。

この記述の前には、領域の拡張と新旧公理系との関係を「部分」という概念を用いて説明した議論が在り、いま引用した記述は、この議論を結論的にまとめたものである。 この議論は、「＜拡張された多様体の公理系は、古い諸客観に何ら新しい諸性質を付与し得ない＞ということは、はたして自明のことなのであろうか？」(6) という文脈の内で論じられるものだが、その内容の上で、冒頭に提示された問題に、極めて深い関係を有している。

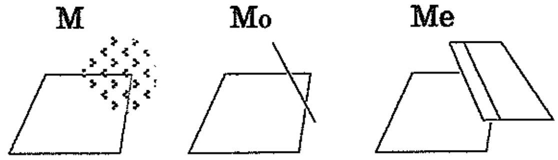
これを仮に「部分の理論」と呼び、しばらく考えてみよう。

a．領域の拡張

まず、フッサールは、一つの例を挙げる。

或る多様体Ｍを考えてみよう。 その多様体は、＜一つの２次元ユークリッド多様体＞と＜他の諸要素の一総体＞とから成り立っている、というふうに。 そうすると、或る多様体———それは、Mo と名付けられよう———が、＜一つの２次元ユークリッド多様体＞と＜孤立した [先の上にはない] 一本の直線＞とから成り立っている、という場合は、一つの特種な場合である。 そこで我々は、拡張ということを、次のように実行することができる。 ＜先のものの他にも更にまた、＜件んの「他の諸要素」———或いはいまの場合、件んの直線———を自らの内に含み込む一つの２次元多様体＞が、それ [拡張された多様体 Me] に属する＞という具合に、それもまさに、＜拡張する諸規定が、当該の平面から除外された諸要素を、或る一本の直線に属するものとして、現われさせる＞という具合に、である。 (Mo⊆Me)。 そうすると、拡張ということの内には、＜除外された多様体の‘点’で、或る直線的な延長の上に存しないという‘点’は、一つも存在しない＞という命題が、妥当することになる。 しかし、Ｍ においては、この命題は妥当しない。 そこにおいては、＜除外された諸要素が、一本の直線の上に存するのか、或いは一般に、当該領域の内で既に定義された或る図形の上に存するのか＞は、無規定である。(7)

というものである。 理解のために図を付する。



フッサールの言いたいことは、Me は、Mo から

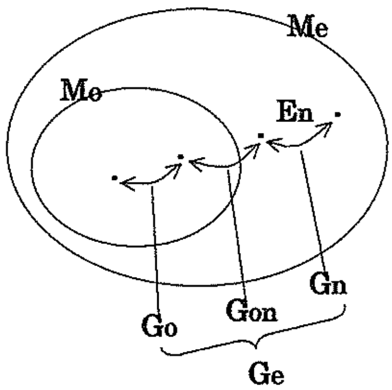
の拡張ではあっても、Mからの拡張ではあり得ない、ということである。 フッサールが後に述べることだが、Moは、既にMに対して「特種」な規定を付け加えたものであり、これを拡張したMeは、Mの拡張であるための資格を初めから欠いているのである。

b. 諸法則

ところが、MoからMeへの拡張は、単に＜領域＞の拡張である。 今度は、それらを規定する＜公理系＞の問題が論じられなければならない。 フッサールはこう記す。

> Meは、Moの［Mの、ではなく］拡張であるということになる。　それ故、Meは、Moの諸要素と他の諸要素とから、成り立っている。 これに留まっては、充分でない。　諸々のMoは、Meの一つの部分である、ということになる。Meは、Moという概念に該たる一つの部分を有つ。　しかし、これもまた、充分ではない。　Meへの拡張は、Moを、それが在るがままのものとして、紊乱 **stören** することが在ってはならず、とりわけ、それを特種化する **spezialisieren** といったことは在ってはならない。　言い換えると、Meのための定義的な諸規定は、Moのそれらにとっては、一つの単なる拡張である、ということでなければならない。　それ故、我々がMoにとっての諸法則を考え、それらをGoとし、また、新たに付加される諸要素がEnであるとするならば、これら諸要素［En］にとって、それらの専らの相互間の関係においては、諸々のGnが妥当するということになり、それからまた、我々が、両方の種類の諸要素を、それらの相互への関係において考えるならば、今度の諸法則は、諸々のGonとされるだろう。　そこで、このようにして、Ge=Go+Gn+Gonということでなければならない。(8)

というわけである。 今度も図を付する。



容易に分かるように、先の例に当てはめて＜領域＞を具体的に理解すれば、Moとは＜一つの２次元多様体と一本の直線＞のことであり、Enとは＜先の一本の直線を含む平面(この直線そのものを除く)＞のことであり、Meとは＜これらを合わせた全体＞のことである。

重要なのは、＜法則＞の方である。 ここに、領域の拡張と公理系の拡張とに関する構造についての、フッサールの基本的な考え方が現われている。 新しい公理系の諸法則Geは、要するに三つの部分から成る。 すなわち、もとの領域Mo内部の諸要素には、それらを規定する諸法則Goが対応し、Meへの領域の拡張に伴って新たに付け加えられた諸要素Enには、それらを規定する諸法則Gnが対応し、そして、これら両種の諸要素には、両種に跨ってそれらを規定する諸法則Gonが対応する、ということである。

このことでフッサールが言いたいことを、続けて彼は――――

> これら諸法則は、この形式において記述できるのでなければならない。 このことで我々が思い做しているのは、次のことである。 すなわち、――――――＜当該の［拡張された］多様体［Me］が、部分多様体Moへと還元され、或いは、新しい多様体が、Moに属する諸要素へ制限される＞という想定 **Annahme** は、＜GeはGoへと還元され、その際、このことに伴ってMoのための更なる規定が帰結することはない＞ということを、自ずと条件付けることになる。――――――と、こういうことである。(9)

と、まとめる。 ＜拡張された領域全体を規定する、公理系＞Geは、それが特に部分としてのもとの領域Moに限定されて適用された場合、それを規定する諸法則が、＜Moを当初から規定していた、Moに固有の公理系＞Goを越えることが在ってはならない、という訳である。

ここまでのフッサールの記述は、領域拡張と諸法則との対応構造を素描したに過ぎず、それの言わば理念型を示したに過ぎない。 現実には、もとの多様体Moは、領域拡張によって「部分」となった場合、「全体」の方から何らかの規定―――それが「特種化」であってはならないにせよ―――を受ける。 フッサールによる以下の記述は、このことを含めた上で、より詳細な説明に充てられる。

c. 「形成」された諸規定

そこで、フッサールは新たな例を挙げて、

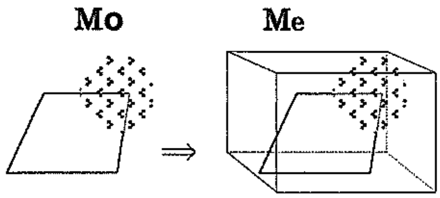
> ……… 例えば、＜一つの２次元の一様な［滑らかな］ebene 多様体＞と＜更なる諸要素の一総体＞

とから成り立っている或る多様体から、私は出発するとしよう。(10)

とする。この例は、先の例では M と呼ばれ、それの拡張が成立しないとされていたものである。フッサールは続けて、今度はこちらを拡張する。そして、そこに現われる一定の変化に言及して、――――

そして私が、「この多様体は、或る＜3次元の一様な［滑らかな］多様体＞の部分たるべし」と言明することによって、拡張を為すならば、その場合、その拡張された多様体にとって、＜3次元の多様体が、一般にそれを通して定義されるところの、諸法則の述語＞が妥当する。部分多様体にとっては、＜一つの 2 次元多様体＞プラス＜諸要素の総体＞という概念から現われてくるものが帰結するが、単にそれだけではなく、また、部分多様体のために、＜一つの2次元多様体＞プラス＜この一様な［滑らかな］多様体そのものが属するのと同様に、一つの3次元ユークリッド空間に属する、そういう諸要素の、一総体＞という内容豊かな規定を、我々は受け取りもする。(11)

とする。理解の便宜のために、これも図を付する。



この図を含めて、これ以降、諸法則 Go, Ge との対応を保つために、我々は、拡張される前の多様体を Mo と表示し、拡張された後の多様体を Me と表示することにしよう。そして、En や Gn,Gon という他の表示も、フッサールが諸法則について論じた先の記述に対応させることにしよう。

この「拡張」を通して、もとの多様体――――＜一つの2次元の一様な多様体＞と＜更なる諸要素の一総体＞――――は、3次元空間の部分であるという性格を明確にすることになる。このことによって、元の多様体は「内容豊かな規定」を「受け取る」という訳である。

少し後に、フッサールは、この「内容豊かな規定」について具体的に――――――

………拡張された多様体の内で増された［新たに付加された］諸要素を捨象することは、＜最初の多様体の諸要素のための或る規定で、以前には言明されていなかったもの＞を、あとに残す［………を捨象しても、………が尚お残る］。すなわち、――――＜それら諸要素は、或るユークリッド多様体の諸要素である＞ということ、＜それ故に、以前には全く無規定であった諸要素のうち、各々二つのものが、或る一定の隔たりを有っている＞ということ、＜このような諸々の隔たりの二つのものは、相互に比較され得るものである＞ということ、＜このような幾つかの隔たりは、最初の2次元多様体の諸要素と＜更なる諸要素＞との間にもまた成立している＞ということ、同様にその他のことごと――――である。(12)

と記している。

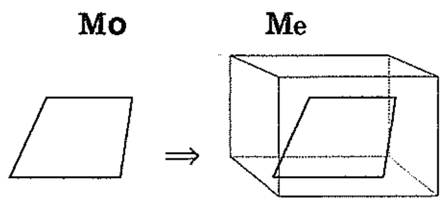
これらの規定は、初めの多様体が、3次元空間へと拡張されると同時に、それの部分として新たに性格付けられることによって獲得するものである。そしてこれらこそ、フッサールが後に「形成された」諸規定と呼ぶものである。ところが、これらの規定は、最初の多様体を「特種化」するものではなく、実は最初の多様体が初めから有っていたものに他ならない、というのが、フッサールの言いたいことなのである。

d. 高次元化と特殊化との相違

この引用の直前に、フッサールは、いまの例と対比する意味で、もう一つ別の・もっと単純な例を挙げている。彼は――――

仮に、最初の多様体が、単に＜或る2次元の一様な［滑らかな］多様体＞から成り立っている、といったような場合には、それの諸要素への制限は、そのような種類の諸多様体にとっての諸原則へと、到り着くであろう。この［2次元の一様な］多様体の無規定性の故に、そして、外的な――――すなわち、新たに付け加わった諸要素への――――諸関係を捨象することが求められるが故に、一つの2次元多様体一般という概念から帰結しないような何ものも、結果として生じることは無いであろう。(13)

と記す。これにも図を付す。



初めの多様体が単なる 2 次元である場合には、3次元に拡張した後に、その際に付加された諸要素を捨象すれば、後に残るのは、単にもとの 2 次元多様体である。このことは明らかである。しかし、この例には奇妙な疑念が含まれている。

この例においても、諸々の点の間に、「一定の隔たりを有つ」とか「それら隔たりは相互に比較し得る」とかといった、前の例と似た規定は、実は成立していると言える。 この2次元多様体は、<3次元の中に置かれた2次元>としての規定を、実は受け取っているのである。 最初の2次元多様体———平面として幾何学的に考えよう———の上に直交座標をとれば、諸要素は、(x_1, y_1), (x_2, y_2), ……… として表現される。 3次元———空間———に拡張された際には、もとの平面に直交するもう一つの座標軸を加えれば、もとの2次元多様体の諸要素は、今度は、$(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$, ……… として表現されることになる。<拡張された多様体の内で、もとの多様体が「形成」される>とは、このことである。

ところが、このような言わば<高次元化>は、領域拡張の欠格条件である「特種化」ではない。 もとの多様体は、高次元化されるとしても、実質的にはもとの2次元平面の性格を保存している。 これら高次元された座標は、もとの平面の外部に在る諸点を示す訳ではない。 また、もとの平面が例えば球面へと「歪め」られたりする訳でもない。 ましてや、もとの平面上の諸点が一つの直線上に在るような仕方で還元を受ける訳でもない。 最初の例において領域の拡張であることを否定されたものを想起しよう。 そこでは、もとの多様体は<2次元多様体と、それの外に在る諸要素>であった。 しかし、これが「拡張」されたものであるか否かが問題とされる多様体は、<2次元多様体と、もう一つの2次元多様体>になっていた。 ここでは、単なる「諸要素」だったものが、一つの平面へと、形を変えられている。 このような言わば領域の<変形>が、領域拡張には禁ぜられる「特種化」なのである。(14)

e. もとの諸法則を越えない

さて、主題となっていた例に戻ろう。 <2次元多様体と、その外部の諸要素>から成る多様体が、<3次元空間>へと拡張される、という事例であった。拡張された領域の内で、もとの領域は、先の通り具体的に挙げられた「豊かな諸規定」を受け取った。そこには、2次元平面上の二点の間の、或いは、この平面の上に在る一点とその外に在る一点との間の、隔たりに関わる諸規定等が、3次元空間中の諸規定として現われてくる。 しかし、それらは、もともと単なる2次元平面を越える言わば<ふくらみ>を含んでいた多様体が、初めから潜在的に有っていた諸規定に他ならず、それらを顕在化させただけのものに過ぎない。 そこには、もとの多様体に「変形」を加えるような「特殊化」は、存在しない。 こうして、フッサールは————

> それゆえ、Ge とは、<部分多様体[の諸法則]Go への制限が生じて、[部分多様体 Mo への関係において]これ[Go]を越えない nicht mehr>という性格のものである、ということでなければならない。 別の言葉で言えば、<Mo の内的な諸関係に対して、Mo への Ge の単純な適用を通して、形成されたもの Gebilde として Me の内で生じる、そういう諸原則>は、まさに、<当初から Mo を絶対的に支配していた諸法則>であるのでなければならない。 それゆえ、拡張ということの定義とは、次のような類いのものである。 すなわち、それは、<拡張の、制限された領域にとっての、直接的な・また同時に完全な結果>は、我々が外的な[拡張に際して付加された]諸要素を度外視するならば、まさにこの領域の最初の定義である、ということである。(15)

と断ずる。 先に具体的に示された「豊かな諸規定」は、<拡張された領域全体を規定する諸法則 Ge が、特にもとの領域 Mo に制限されて適用された場合、そこに「形成された」諸規定>である。 このような諸規定は、「以前には言明されていなかった」だけであって、「当初から Mo を絶対的に支配していた」諸規定に他ならない、すなわち、この形成された諸法則が、実は当初の諸法則 Go を越えるものではない、という訳である。

そして、逆に、領域の拡張とは、こういう場合を言うのだと、フッサールは説く。

> 逆に言えば、私に一つの多様体が Mo として与えられているとして、M は、次の場合に[限って]、Mo の一つの拡張である。 それは、Mo が、M の内部で、如何なる“特種化”Spezialisierung をも、もはや被らない、という場合、言い換えると、より詳細な規定———それからならば、M にとっての新たな諸命題とか M に含まれている諸要素や諸々の被形成者[形成された諸々のもの]Gebilde とかが生じてくることが在り得たであろうような、そういう規定———の如何なるものも、もはや被らない、という場合である。 私が、或る Mo を、M へと拡張する場合、その Mo は、M の内に存し、その際、形成されたものとして、やはり一つの Mo である。 これによって事情は種的 spezifisch に異なる、というものではない。(16)

というふうに………。 もとの領域を紊乱すれば、それは、拡張ではないのだ、ということである。

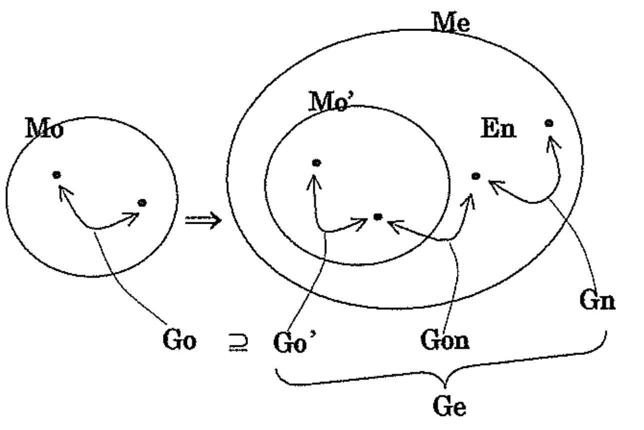
f. 部分の理論と公理系の理論との関係

「部分の理論」は、直接には、領域拡張―――その条件―――の理論である。 領域が拡張されるということは、公理系が拡張されるということを、直ちに意味する訳ではない。 公理系が同一に保たれたまま領域が拡張されるという場合は、もちろん在る。 さらに、公理系の「置き換え」と呼ぶべきものが領域の拡張を媒介するという、重要な場合がある。 詳しくは本『紀要』本号別稿[17]で扱われていることだが、フッサールは、一般的な注として―――

> ………しかし、公理系が拡張されるべきでないという場合には、領域は、古い公理系を演繹的に自らに含む公理系を介して［拡張される］ということに、おそらくなるだろう。 このような仕方で、確実に、如何なる領域も拡張され得ることになる。 例えば、２次元のユークリッド多様体は、ｎ次元の多様体へと……。[18]

と記している。 古い公理系を「演繹的に自らに含む」とは、理解しにくい表現だが、別の箇所[19]でフッサールは、古い公理系を「論理的に包摂する」という言い方もしている。 何れにせよ、挙げられている例から見て、＜次元を高次化するような公理系の変様＞を意味すると、考えてよいだろう。

このことを考慮しつつ、また、以下の記述を視野にいれながら、これまで見てきた「部分」の理論を、まとめておこう。 厳密を期するため、「形成」という観点を、顕在的に導入する。 例によって、理解のために図を付そう。



もとの多様体 Mo から、それに新しい諸要素 En を付加して、新しい多様体 Me へと、領域を拡張することを考える。 Mo は、それ自体において、当初の諸法則 Go によって規定されている。 新しい多様体を規定する諸法則が、特にもとの領域に制限されて適用された場合に、それを規定する諸法則が Go' として「形成」され、これとともに、新しい多様体の内にもとの領域が Mo' として「形成」される。 Mo から Me への領域拡張が正当なものとして成立するためには、形成された諸法則 Go' がもとの諸法則 Go を越えないこと、従ってまた、形成された領域 Mo' が、もとの領域 Mo それ自体を「特種化」したものではないこと、が必要である。 その上で、新しい諸要素 En を規定する諸法則を Gn とし、En と形成された Mo' の諸要素との間を規定する諸法則を Gon とすれば、拡張された新しい領域を規定する諸法則全体 Ge は、形成された諸法則 Go' に加えて Gon と Gn という、三種の諸法則から合成される。

新旧二つの公理系の間の関係は、もとの諸法則 Go と拡張された領域の諸法則全体 Ge との間の関係である。 後に詳述することを先取りしておこう。 新しく加えられた諸法則―――Gon か Gn―――の内に、もとの諸法則 Go には無かった―――従って形成された諸法則 Go' にも無い―――諸公理が付加されている場合には、新しい公理系は、もとの公理系の拡張である。 形成された諸法則 Go' がもとの諸法則 Go を高次元化―――特種化ではない―――したものである場合には、拡張された領域の諸法則 Ge は、もとの諸法則 Go を論理的に包摂する別の公理系である。 なお、Go, Go', Gon, Gn が全て同一の諸法則である場合には、二つの公理系は同一である。

３．複素数の公理系

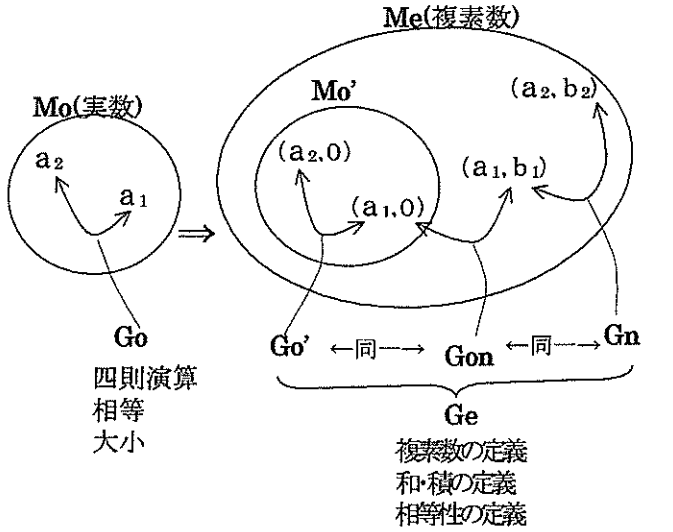
以上、詳し過ぎるくらいに、「部分の理論」を見てきた。 これを基礎に、実数から複素数への領域拡張に伴う新旧両公理系の関係を、考えていこう。 問題は、それを、＜公理系の拡張＞として把握することができるか、或いは、＜公理系の置き換え＞として把握せざるを得ないのか、ということである。 複素数を表現する二様の仕方に従って、別々に見ていこう。 結論が異なるはずである。

３．１．ハミルトン型
―――置き換えとして

まず、＜二実数の順序対＞として表現されるハミルトン型の複素数について考える。

各領域の諸要素、およびそれらを規定する諸法則を、予め図に示そう (次頁)。

複素数がハミルトン的に表現されれば、「虚数」という概念は、実は必要無い。 そこでは、諸要素は、全て、二つの実数の順序対（ａ，ｂ）として構成される。 もとの領域の諸要素は、ｂが０の場合として、すなわち $(a_1, 0)$, $(a_2, 0)$, ……… として、表現さ



れる。 2次元化されたこの形式は、もとの Mo における形式 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ とは、明らかに別のものである。 このことこそ、<拡張された領域を規定する諸法則 Ge が、元の領域 Mo に制限されて適用されるときに、拡張された領域の内で新たな規定を被った領域 Mo' が「形成」される>、とフッサールが言うところの事態である。

この形成された Mo' は、2次元へと高次化されて表現されてはいるが、Mo の「特種化」なのではない。 先の「部分の理論」の内には、2次元の多様体が3次元の多様体へと拡張される、という例が在った。 これと、事情は全く同様である。

a. 複素数の公理系 Ge

さて、拡張された領域 Me の内には、$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots\cdots$ が存在する。 これらのうち、$b \neq 0$ である諸々の順序対が、新しく付け加わる諸要素 En である。

その上で、Mo' と En とは、各々その内部においても、両者に跨っても、諸要素は全く同じ諸法則によって支配される。 すなわち、Go', Gon, Gn は、同一である。 これら諸法則は何れも、よく知られた 和・積・相等性 の新たな定義 ――――

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) \ \overline{\overline{\text{def.}}}\ (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \ \overline{\overline{\text{def.}}}\ (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$[\ (a_1, b_1) = (a_2, b_2)\ ] \ \overline{\overline{\text{def.}}}\ [\ a_1 = a_2\ ,\ b_1 = b_2\ ]$$

を含む。 減法・除法の計算規則は、先の二定義から派生する。 順序(大小)関係は、定義されない。

b. 形成された実数の諸法則 Go' と、もとの実数の公理系 Go

ところで、Go' は、Mo' と同様、Ge の内で「形成」された諸法則である。 それが実質的には諸実数を支配しながら、それの内では、一般的には大小関係が定義されていない。 格別に定義されない限り、我々は通常―――

$$(a_1, 0) > (a_2, 0)$$

といった式はつくらない。

この Go' と、もとの領域 Mo を規定していた実数の公理系 Go―――それの内では大小関係が定義されている―――とは、如何なる関係に立つのだろう。 公理系の拡張のための条件という観点からは後に見ることとして、ここでは、領域の拡張そのものの条件という観点から考えてみよう。フッサールによれば、形成された領域 Mo' を規定する 形成された諸法則 Go' は [すべて]、「当初から Mo を絶対的に支配していた諸法則」でなければならない。

Go' における複素数の四則演算と相等関係は、第二順位の実数 b が 0 の場合、Go における実数の四則演算と相等関係に対して、同値に帰する。 Go は、さらに大小関係を含む。 我々は、全称命題の主語と述語に注意しなければならない。「等しい」という語を、「同値」を含むように緩く取れば、「Go' の諸法則は、全て Go の諸法則に等しい」という全称命題は、この場合にも真である。 だから、フッサールの考え方を正確に表現すれば、「Go' は、Go に等しく、しかも Go を越えない」ということなのである。 Go' が、Go よりも「小さい」ことは、領域拡張の条件に関する限り、一向に構わない。

そこで、問題はこうなる。 すなわち、我々が実数に関して、もとの公理系 Go に従い、大小関係を含めて命題(式)の真偽を決定する、という場合、我々の思考の内に如何なる転換が起こっているのか、ということである。

$(a_1, 0), (a_2, 0), \cdots\cdots$ から、$a_1, a_2, \cdots\cdots$ を引き出し、諸実数を言わば<はだか>にするために、我々は、写像―――この場合明らかに一対一対応である―――を通して、Mo' から Mo へと、領域を移さなければならない。 同時に我々は、形成された公理系 Go' から、もとの公理系 Go―――それは、大小関係が定義されている分だけ、Go' に比して むしろ「特種」的である―――へと、<還帰>することになる。

このことを表現したものとして、こういう記述が在る。 すなわち、フッサールは――――

> 領域の拡張が許容されるとしても、端的に、[領域が公理系によって] 完全 perfekt に定義されている [という場合]。: [公理系の] 拡張は、まさに、もはや可能ではない。 更に再度、二つの場合 [が

在る]。(20)

として、それの一つの場合について———

公理系が、ただ古い領域のためにのみ保持される[という場合]。ところが[この場合]、新しい諸客観が定義され、また一つの公理系が構成されて、<この[構成された]同じ dasselbe 公理系は、古い領域への制限に伴って、古い公理系へと移行する>というふうになる。しかし、<このような[領域の]拡張が可能であるべきではない>という意味での完全化 Perfektion は、要求されるべきではない。(21)

とする。この記述は、ハミルトン型の複素数に、そっくり当て嵌まる。二実数の順序対として「新しい諸客観[Me]が定義され」、和・積・相等の新しい定義を含む「一つの公理系[Ge]が構成され」る。このGeが、「古い領域」Moに「制限」されて適用される際に、「古い公理系」Goへと「移行する」、ということになる。この「古い公理系へと移行する」ということこそ、さっき筆者が「還帰する」と言ったことの、フッサール的な表現なのである。

c．公理系の「置き換え」としての把握

いま引用した先の方の記述の内で、この場合をフッサールが、「領域の拡張が許容されるとしても」「[公理系の]拡張は………もはや可能ではない」場合としていることに、我々は注意しなければならない。

領域の拡張が成立するためには、Go' が Go を越えなければよい。複素数領域をハミルトン的表現を通して構成することは、Go' が Go を「特種化」するものではないから、<領域の拡張>を媒介することは可能である。

しかし、その際の公理系変様が公理系の「拡張」として把握され得るためには、もとの領域の諸要素は、新しい公理系の内でも、もとの公理系 Go と同一の諸法則によって規定されること、すなわち、Go における諸法則のすべてが Go' の内に保存されていること、が必要である。しかし、いまの場合、新しい複素数の公理系 Ge においては、実質的にはもとの領域における諸実数を規定する Go' を含めて、大小関係が一般的に排除されている。公理系の拡張と言えるための言わば<核>が失われているのである。

また、複素数領域内の実質的な諸実数を、直接に

$(a_1, 0) > (a_2, 0)$

という関係の内へ置き得ないのは、それら諸数が二次元化され、従って、複素数の新しい公理系 Ge が、実質的実数を規定する Go' を含めて、もとの実数の公理系 Go に対して「高次元化」された公理系である、ということにも関連している。この変様は、それだけでも、公理系の拡張として把握されるためには、致命的に異質な変様である。たとえ、それが領域の拡張を媒介することの妨げとなるものではないにしても、である。

こうして、この形式を取った複素数の公理系の構成は、一般的には、実数の公理系からの<変更>ないし<置き換え>として、より正確には、それが高次元化を伴うという意味で、<論理的に-より包括的な別個の公理系>の構成として、見做されなければならないのである。

3．2．虚数単位 i 型 ———拡張として

複素数の公理系をハミルトン型で考えるとき、それが実数の公理系からの単なる拡張としては扱い得ないであろうことは、初めから或る程度は予想の付くことである。このことは、虚数単位 i 型においても同様であるとするのが、一般に受け容れやすい考え方である。

ヒルベルトも、そう考える。彼によれば、実数の領域対して新しい客観を導入し、しかも、もとと同じ四則演算と順序(大小)関係を維持した公理系を構成することはできない。実数の公理系に関するこの「完全性公理」を、フッサールはさらに、公理系拡張の限界として把握した上で———

………領域の拡張が、公理系の一つの変更を通してのみ可能である、という場合、ということはすなわち、外的な諸公理の単なる併置を通しては生じ得ない、という場合、[この公理系は]<完全なvollständig公理系>(ヒルベルト)[である]。(22)

と記している。

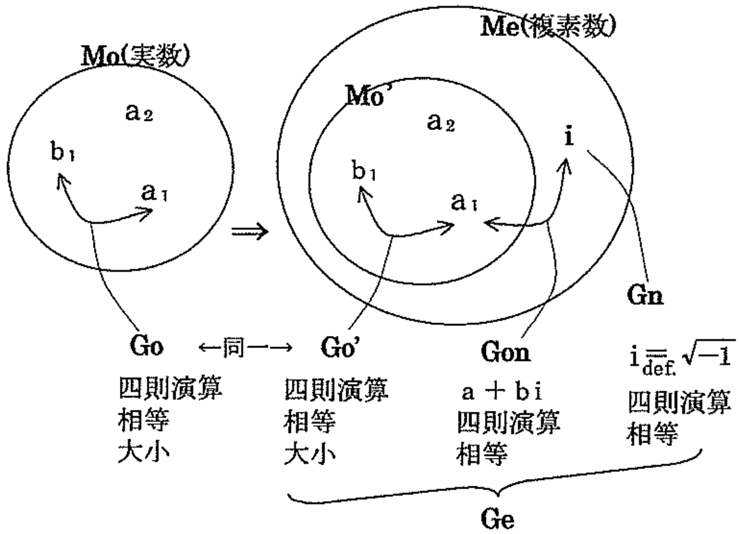
ヒルベルトの言うことは、一般的にはその通りだが、しかしそこには、もとの領域の諸要素と、新たに付加された諸要素とについて、それらが同一の諸法則によって規定されなければならない、とする前提が在る。ここでは、複素数の公理系における順序関係の排除が、実質的実数にも貫徹されることとなり、順序関係を含めて諸実数を規定することは、もとの実数の公理系へ還帰しない限り不可能となる。

しかし、フッサールは、既に我々が「部分の理論」の内で見たように、諸法則を分割して考え、もとの領域の諸要素と、新たに付加された諸要素とについて、それらの各々に諸法則を対応させ、それらが各々に固有の諸法則によって規定されることを許容する。ここでは、ヒルベルトのように複素数の全領域を単

一の公理系で規定する、という必要はない。フッサールの考える領域拡張と公理系との関係構造においては、虚数単位 i の導入によって構成される複素数の公理系を、実数の公理系からの拡張として扱い得る可能性が生じてくるのである。

先の「部分の理論」を、虚数単位 i を含んだ複素数に当てはめて考えてみよう。

我々は、実数の領域（Mo）から、複素数の領域（Me）へと領域を拡張する。以下に述べる諸法則をも併せて、図を付する。



a．虚数単位 i に関する諸法則 Gn

① i の定義

領域の拡張に伴って、存在を主張する命題（存在命題）によって導入される新しい客観 En は、ただ一つだけ在る。虚数単位 i である。これの定義

$$i \underset{\mathrm{def.}}{=} \sqrt{-1}$$

は、En に対する諸法則 Gn の一つである。

② i に関する通常の四則演算・相等関係

$$i^2 = -1$$

が、i の定義から、導出される。これ以外、i は、

$$i + i = 2i, \quad i \times i = i^2 \quad \text{等々}$$

通常の四則演算・相等関係に従う。「通常の」と言うのは、これらが実数の四則演算・実数の相等関係と同一のものだからである。

大小関係は、Gn の内に定義されない。このことは Gon においても同様であり、その箇所でまとめて触れよう。

b．虚数単位 i と実数とに関わる諸法則 Gon

① 複素数の構成

諸々の複素数は、拡張された領域における諸客観である。しかし、それらは諸客観としては奇妙な性格を有っている。それらは、存在が宣言された諸客観ではなく、「構成」された諸客観である。

「a ＋ b i なる数が存在する。」

という存在命題は、顕在的に主張される必要はない。複素数は、＜実数と虚数単位の実数倍との和＞として定義される。存在命題であるべきものが、一つの＜操作＞の形式を有っている。ここには、

「操作の結果は、一つの数である。」

という最も普遍的な原則の一つが機能している。

要するに、複素数領域において、付加される新しい要素 En は虚数単位 i だけであって、諸々の複素数そのものは、実数領域 Mo の諸要素と付加された虚数単位 En とを関係させる法則―――すなわちフッサールの言う Gon―――によって「構成」されるのである。

② 複素数に関する通常の四則演算・相等関係

二つの複素数 $a_1+b_1 i$ と $a_2+b_2 i$ との間の操作・関係は、通常の四則演算と通常の相等関係である。「通常の」と言うのは、ここでも、これらが実数の四則演算・実数の相等関係と実は同一のものに他ならないからである。

一般には、複素数において加法と乗法および相等性が新たに「定義」される、という説明がなされることが在る。しかし、このことは、正確には、複素数のハミルトン的表現に関して当て嵌まることであり、虚数単位 i を導入した複素数の表現に当て嵌まることではない。加法と乗法に関する二つの恒等式

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

$$(a_1+b_1i)\times(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

は、実際には、和と積の「定義」ではない。これらは、計算の便宜のために、$i^2=-1$ を加えた上で、実数の演算規則に従って導出された、「公式」に類するものに過ぎない。これらから導出される減法・除法に関する恒等式については、言わずもがなである。虚数単位 i の導入によって表現された複素数は、徹頭徹尾、実数の四則演算と、それの言わば特則としての $i^2=-1$ とによって、操作されるのである。

相等性に関しても同様である。$a_1+b_1 i=a_2+b_2 i$ は、$a_1=a_2$ かつ $b_1=b_2$ として「定義」される必要はない。両者は単なる＜同値＞であり、このことは、通常の四則演算（および a_1 等や i に関する条件）を通して導出される＜定理＞であるに過ぎない。

最後に、大小関係は、Gn におけると同様、Gon の内に定義されない。大小関係は、「除外」される

のではない。「除外」というのは、Gn や Gon を実数の公理系 Go と比較したときに初めて現われてくる、ネガティヴな規定である。 しかし、Gn や Gon は、諸法則に関する一つの範域を成しており、Go に対して相対的に独立した公理群である。 ここでは我々は、ポジティヴにのみ、諸法則を考えなければならない。 Gn や Gon においては、四則演算と相等関係とが定義されているのであり、大小関係は、単に<定義されていない>というだけのことである。

c．複素数の公理系の内で b＝0 の場合として形成される諸法則 Go'（実数の公理系 Go に等しい）

複素数が含む実質的実数に対して、複素数の公理系が関わる仕方は、i 型においては、ハミルトン型におけるのとは全く事情が異なる。（a，0）という形式は、a という形式とは、全く異なった形式である。（a_1，0）と（a_2，0）とは、直接に大小関係に従うと考えることはできない。 しかし、i 型においては、a という形式が、<はだか>で現われる。 単なる a と、a＋0 i とは、何の区別も付かない。 虚部が 0 である複素数 a＋0 i は、直接に実数 a として見なされて、何の不都合も無い。 それは、通常の四則演算によって、Gon の諸法則そのものから帰結する。 我々は、ハミルトン型におけるような迂路を経る必要は無い。 我々は、大小関係をも含めて、単純にもとの公理系 Go に従えばよい。 形成された Go' は、それ自体における Go と、全く同一の諸法則なのである。

d．公理系の拡張としての把握

虚数単位 i の導入による複素数の公理系が、フッサール的な領域拡張と公理系との関係構造から見れば、もとの実数の公理系からの拡張として把握し得るということを、ここでまとめておこう。

ここでの公理系の変様は、もとの実数の公理系 Go と新しい複素数の公理系 Ge との関係である。この関係が公理系の拡張として把握され得るための条件とは、如何なるものであろうか？

公理系の拡張とは、フッサールの「部分の理論」に照らせば、一般に、もとの領域をもとの公理系が規定し、領域の拡張に伴って付加された新しい諸要素に関わって、もとの公理系には無かった新しい諸法則が付け加えられる、ということである。 そこでいまの場合――

領域拡張の一般的条件から、複素数の公理系 Ge の内で実質的な実数に対して適用される諸公理 Go' においては、もとの公理系 Go に対する付加は無い。 しかしまた、公理系の置き換えではなく、公理系の拡張であると言えるためには、第一に、Go' における諸公理は、Go における諸公理から、何ものをも減じたものであってはならない。 その上で第二に、新たな客観の導入に伴って、それに関わる諸法則 Gon＋Gn の内に、もとの公理系 Go には無かった新しい公理的規定が含まれていなければならない。 これら二つのことが、この場合の公理系拡張ということのメルクマールとなるのである。

第二の点に、殆ど問題は無い。 新たに虚数単位 i が導入されるに伴って、$i^2＝－1$ なる演算規則が導入され、a＋b i を客観として把握することが為される。 これらは、実数の四則演算諸公理に対して、それらの下位に、純粋に付加される諸法則である。

問題は、第一の点にある。 ことは、具体的には、大小関係の「除外」ということに掛かっている。 これを我々は、どう考えればよいだろう。

一般に、もとの公理系 Go よりも、新しい公理系 Ge の内でもとの領域に対して形成された諸公理 Go' が「小さい」こと、このことは、領域拡張の条件としては許される。 しかし、公理系拡張の条件としては許されない。 同じ実数に、もとは大小関係が規定されていたのに対して、新しい複素数の公理系で大小関係が一般的に排除されれば、複素数領域中の実質的な実数に対しても、大小関係が排除される。 それは、もとの実数の領域に関して、公理系を「変更」したことになる。 公理系の拡張ということが成立するためには、実質的実数の領域に対しては、全ての諸公理が保存されなければならない。

公理系の拡張は、公理系の特種化でもある。 それは、新旧の両公理系を貫く普遍的な「核」を必要とする。 <新しい公理系の内に、もとの領域のために保存された、もとの公理系>、これが「核」となる。 その上で、新しい公理系には、新しい諸公理が付け加えられていること、これが公理系の特種化――公理系の拡張――なのである。

ハミルトン型においては、先に触れたように、この公理系拡張の「核」が失われる。 そこでは、もとの実数領域 Mo に定義されていた大小関係が、複素数領域が含む実質的実数の領域 Mo' には適用されない。 ハミルトン型では、ひとたび（a_1, b_1）と（a_2, b_2）という形式を取った以上は、$b_1＝0$，$b_2＝0$ の場合であっても、それらが直接に大小関係の内へ置かれることはない。 ここでは、大小関係は<一般的に除外されている>のである。

虚数単位 i を導入する型も、これと同じであろうか？ そうではない。 i 型複素数においては、大小

関係は<一般的に除外されている>のではない。

i型複素数の公理系は、一般にa＋biという形式の諸客観を扱う。 このとき、複素数の領域中でb＝0となった場合の領域Mo' は、既に見た通り、もとの実数の領域 Mo と、全く同じ形式を有った諸要素から成り立っている。 従ってまた、Mo' には実数の公理系が直接に適用されて構わないから、これを規定する諸公理 Go' は、もとの実数の公理系 Go に等しい。 ここでは、Go 中に定義されていた大小関係が、Go' 中に、しっかりと保存されている。 公理系拡張のための「核」が、新旧の両公理系を貫いているのである。

大小関係が定義されないのは、虚数単位iに実質的に―――b≠0の場合に―――関わる諸法則 Gn と Gon に限られる。 ことがらを素直に見れば、i型複素数においては、大小関係は、むしろ一般的には保存されており、ただ、新しい客観iが関わる限りで、制限されている―――と言うよりも、言わば停止されている―――に過ぎないのである。

それは、複素数の公理系の内で、大小関係の定義に対して、それに付された下位レベルの法則の問題である。 すなわち、i型複素数の公理系には、一般的な大小関係に関して、それに付随する下位規則―――「b≠0の場合、大小関係は適用されない」或いは、同じことだが、「大小関係は、b＝0の場合に限って適用される」―――が存在すると、我々は見るべきであろう。 大小関係は、除外されるのではなく、それが保存された上で、却って、それに関する新しい下位規則が付加されているのである。

4．おわりに

我々は、「部分」の理論として、領域の拡張に伴う諸法則の対応関係に関して、フッサールが把えた構造を見た。 そして、これを基に我々は、ハミルトン型と虚数単位型とに区別して、ヒルベルトならば何れも公理系の置き換えと見るであろう複素数の公理系について、フッサールはどう見るであろうかを検討してきた。 前者は、フッサールから見ても公理系の拡張とは解し得ず、公理系の置き換えと見なければならなかった。 しかし、後者は、公理系の拡張として、充分に解し得るものであった。

さらに進めて、ハミルトンが導入した四元数についてはどうだろうか。 フッサールが把握する諸要素と諸法則との対応構造からは、同様に公理系の「拡張」として把握し得る可能性が在る。 四元数も、それが<四実数の順序組み>という形式を取らない限り、i型複素数と同様、実は1次元の数である。 ここでは、i型複素数の領域 Mo―――諸実数を含む―――と、それを規定する公理系 Go とが、もとのものとなる。 これに対して、付加されるのは、第一に、新しい虚数単位j,kという二要素 En と、それらに固有の諸法則 Gn―――iに関するのと同様のもの―――、また第二に、それら新しい虚数単位j,kともとの複素数領域中の諸要素とに跨る諸法則 Gon―――四元数を構成するための法則や通常の四則演算・相等関係を規定する諸法則に加えて、重要な一法則 ij＝－ji＝k ―――である。 新しい公理系 Ge は、これら二種の諸法則に加えて、Ge の内でj,kの係数が0の場合として「形成」される Go' とによって、合成される。 乗法の交換法則が犠牲になるのは Gon に限ってである。形成される諸法則 Go' は、もとのi型複素数の公理系 Go と同一であり、その内では乗法の交換法則は温存されている。 このような新旧両公理系の関係は、実数からi型複素数への拡張の場合に、正確にアナロガスである。 しかも、フッサールにおいては、このような構造が許されるのである。

もっとも、フッサール自身がこのような進み方をするとは、実は考えにくいことである。 ここには、ヒルベルトに代表される数学者との間に、戦略上の相違とでも言うべきものが在る。 フッサールは、実数の領域においてすら、その全ての諸要素を「構成」し終わってはいない。 複素数へまで領域と公理系を拡張したと言っても、フッサールによる算術の基礎付けは、<代数的数>の範囲内に留まる。 カントール風に、或いはデデキント風に、連続体としての「全ての実数」を一機に把握するという行き方を、フッサールはしない。 フッサールの多様体は、「構成し得る」多様体―――数学的多様体とも、彼は呼ぶ―――、すなわち、それの全ゆる要素が諸操作の結果として現実に規定されるような多様体、でなければならない。 フッサールの数理哲学は、数論の基礎付けの範囲において見ても、まだまだ途上に在る。 <超越数>を含めた「全ての実数」という概念は、「虚数」という概念よりも、フッサールにとって、遥かに遠いのである。 <超越数>の基礎付けへと進むためには、まず「極限」概念の哲学的基礎付けを経なければならない。 しかし、『数理哲学草稿』の内には、それすらも見出せない。 そこへ進む前に、フッサールは、<論理>の基礎付けへと、さらには<認識>の哲学的解明へと、向かうことになるのである。

注

1　フッサールの数理哲学（3）—— 拡張不可能性：ヒルベルトとの比較 ——，『室蘭工業大学紀要』第５０号，２０００年

2　同論文１０８頁

3　フッサーリアナ第 XII 巻に収録されている 数論の基礎を探求した１０編の草稿を、こう呼ぶことにしよう。

4　「確定性と公理系の拡張とについての三つの研究」

5　Husserliana,Bd.XII,S.462,Z.22-Z.37.

引用に在るフッサールの術語について：「連結」と訳した Verknüpfung は、操作 Operation と同義、演算のことであり、「関係」Beziehung は、相等および大小のことである。「相関」と訳した Relation は、これら両者を含む上位概念である。

引用中に［ ］で囲って示したものは、筆者による補充である。これには、二様の目的が在る。テクストが草稿であることから、フッサール自身の記述には多くの省略ないし欠落がある。また、フッサールの記述自体が、その言い廻しを含めて、極めて難解である。これらの事情から、一方で、フッサールの記述そのものを補う必要が在り、他方で、記述の理解のために、適当な言い換えを含めて、内容を補う必要が在る。以下も、同様。

6　Husserliana,Bd.XII,S.458,Z.32-Z.34.

7　Husserliana,Bd.XII,S.459,Z.13－Z.28.

8　ibid.,S.459,Z.29-S.460,Z.2.

フッサールが用いている符号の由来は、推測するに、次のようなものであろう。

Mo : Mannigfaltigkeit-originale
Me : Mannigfaltigkeit-erweiterte
Go : Gesetze-originale
En : Elemente-neue
Gn : Gesetze-neue
Gon : Gesetze-originale-neue
Ge : Gesetze-erweiterte

9　Husserliana,Bd.XII,S.460,Z.3-Z.8.

10　ibid.,Z.8-Z.10.

11　ibid.,Z.10-Z.18.

12　ibid.,S.460,Z.31-S.461,Z.1.

13　ibid.,S.460,Z.23-Z.30.

14　「特種化」という語には、注意を要する。筆者が参照を薦める本『紀要』本号別稿（注17）は、公理系の「特種化」を扱っている。これは、本稿が問題としている場面に引き直して言えば、領域拡張と共に付加された諸要素に関わる諸法則 Gn ないし Gon の内に、もとの公理系 Go には無かった諸公理が含まれる、という事態である。これに対して、本稿の引用中にフッサールが「特種化」と言うのは、拡張された領域の公理系 Ge の内で、もとの領域に関して形成される諸法則 Go’ の内に、もとの領域の公理系 Go には無かった諸法則が含まれる、という意味である。

15　Husserliana,Bd.XII,S.461,Z.2-Z.11.

16　ibid.,Z.19-Z.25.

17　フッサールの数学哲学（6）——公理系の「特種化」——

18　Husserliana,Bd.XII,S.455,Z.24-Z.29.

19　Husserliana,Bd.XII,S.456,Z.30

20　Husserliana,Bd.XII,S.474,Z.5-Z.7.

21　ibid.,Z.9-Z.13.

22　Husserliana,Bd.XII,S.495,Z.13-Z.16

Husserl's Philosophy of Mathematics 7 —— Question of the 'Imaginary' ——

Kohtaroh NINOMIYA*

We extend the domain of real numbers to that of complex numbers. Can we think then the axiom-system of complex numbers as an extension from that of real numbers? It depends on how we think about the exclusion of the order-relation. Complex numbers are expressed either in Hamilton's manner or with the imaginary unit 'i'. In the latter case, according to Husserl's theory of the extension, we can give an affirmative answer to the question.

Keywords : complex numbers, extension of a domain, extension of an axiom-system, the imaginary, phenomenology

* Common Subject Division
