



室蘭工業大学

学術資源アーカイブ

Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive



流体運動と電磁場のアナロジーを用いて理解促進を
目指した学生実験：
湧き出し・吸い込みと二重湧き出し

メタデータ	言語: jpn 出版者: 室蘭工業大学 公開日: 2014-03-26 キーワード (Ja): キーワード (En): Source-sink, Doublet, Analogy, Electromagnetism 作成者: 高木, 正平 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/2840

流体運動と電磁場のアナロジーを用いて理解促進を目指した学生実験 湧き出し・吸い込みと二重湧き出し

高木 正平*¹

A Simple Laboratory Experiment Exploiting the Analogy between Potential Flow and Electromagnetism for Use as a Heuristic Aid Source-Sink and Doublet

Shohei TAKAGI*¹

(原稿受付日 平成 25 年 6 月 28 日 論文受理日 平成 26 年 1 月 24 日)

Abstract

It is well known that both electromagnetic fields and irrotational fluid flows are governed by Laplace's potential equation, and in two dimensional cases, solutions for a wide variety of boundary conditions are readily obtainable through use of a complex potential function. This paper describes a simple electric experiment that was developed for instructional purposes in a fluid mechanics laboratory, which exploits the analogy between source-sink (doublet) flows and the electromagnetic field created by two point charges in a conducting medium. The apparatus consists of two electrodes (which correspond to the source and the sink) separated by some distance on a conductive paper, onto which a prescribed DC voltage difference is imposed. In the resulting electric field, lines of equal voltage represent equi-velocity potential lines in source-sink flows. The electric current lines correspond to streamlines in the flow field and are visualized with the aid of iron filings and round magnets. This method is also useful to enhance appropriate understanding of the doublet flow in the infinite limit when the distance between source and sink approaches zero.

Keywords : Source-sink, Doublet, Analogy, Electromagnetism

1 はじめに

室蘭工業大学機械創造系航空宇宙システム工学コースの必修科目である航空宇宙工学実験は、新カリキュラムとして平成 22 年度に開始された。この実験は 3 年生を対象としてその前期に実施され、「円柱周りの風洞実験と流体と電磁気のアナロジー実験」、「ロケットノズルの性能計測」、及び「ペ

ーパークラフト飛行機の飛行力学実験とシミュレーション」の三項目で構成されている。開始から 3 年が終了し、第一項目の流体力学実験では、この間に実験内容に関する追加や改善を幾度か実施し、ようやく狙い通りの実験が実施できるようになった。

円柱周りの流れを記述する複素速度ポテンシャル理論と実在流体（気体）を対比させて、両面から補完することでより深い理解促進を狙っている。具体的には、風洞実験では円柱表面の圧力分布を

*1 室蘭工業大学 もの創造系領域

計測し、ポテンシャル理論との比較を通して、理論との一致や適用限界を学ぶ。また、円柱後方に形成されるカルマン渦列の周波数計測や周波数と主流速度の関係、最後には煙を用いた渦列の可視化を行う。そこから得られる渦列構造と Karman が渦糸近似から求めた渦列の安定解との比較も行う。

一方、ポテンシャル理論は流体力学の基礎として重要である。ポテンシャル理論は電磁気とのアナロジーを使うと理解促進に有効である。そこで本実験では、このアナロジー実験を2段構成としている。すなわち、ポテンシャル理論によれば、一様な流れを表す関数と二重湧き出し（あるいは二重吹き出し、doublet）関数を重ねることで円柱周りの流れを作ることができる。二重湧き出し関数は湧き出し（あるいは吹き出し、source）と吸い込み(sink)を限りなく近づけた場合、ある数学的仮定のもとで求めた極限関数である。二重湧き出しは流量が0であることから、これを一様な流れの中においた場合、これを取り巻く流線は閉曲線で円となる。そこで、円柱周りの流れの理解を深めるためにアナロジー実験を通して、湧き出し・吸い込みと二重湧き出しについて学ぶ。もう一つのアナロジー実験は、円柱周りの流線は電気学における等電位線に対応できることから、円柱近傍の流線の間隔は密となり、流れは加速されていることを実感できる。また、揚力発生の基本となる循環は電極から流れ出す電流に対応付けができることから、循環を持つ円柱周りの流線を容易に描くことができる。また、電流調整から、淀み点を円柱上あるいは円柱外に自由に設定することができる。さらには円柱周りの流れをジューコフスキー変換することで得られる翼周りの流線に加えて、翼後縁にクッタ(Kutta)の条件を課した流線を描き、揚力係数を求めることもできる。

循環を持たない場合や持つ場合の円柱やジューコフスキー翼周りの流線に関する電気実験は別報⁽¹⁾に譲り、本小論は副題（湧き出し・吸い込みと二重湧き出し）を中心に工夫や改善した内容の報告、さらには実験の実施内容や課題についても触れる。末尾には、狙い通りの実験ができていないか、アンケート結果についてもまとめた。

2 ポテンシャル理論

2.1 湧き出しと吸い込み

円柱周りの流れを対象としていることから、二次元の湧き出しや吸い込み関数を取り扱う。複素

座標 $z(=x+iy)$ の原点におかれた湧き出しの複素速度ポテンシャル W_1 は k を正の定数とすると、

$$W_1 = k \ln z \cdots \cdots \cdots (1)$$

と記述される。ここで、 \ln は自然対数である。湧き出し量は湧き出し速度を求め、湧き出しを中心とする一周積分から求まる。結果は、 $2\pi k$ である。一方、吸い込み関数は、吸い込み量が $2\pi k$ であれば、

$$W_2 = -k \ln z \cdots \cdots \cdots (2)$$

と書ける。複素平面の実軸上の、原点から a と $-a$ の位置にそれぞれ湧き出しと吸い込みがある場合のポテンシャル W_3 は、

$$W_3 = k \ln(z-a) - k \ln(z+a) \cdots \cdots \cdots (3)$$

である。

さて、湧き出しと吸い込みを近づけた場合、すなわち $a \rightarrow 0$ とするとき、 $2ak \rightarrow \mu$ の仮定の下で、式(3)の極限関数を導出する際、ほとんどの流体力学の教科書ではテーラー展開から求めている。確認のために、その方法を以下に書き下す。対数のテーラー展開公式によれば、

$$\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \cdots$$

であるから、変数 ε に小さい条件を課すならば、2次以降の項は省略できることから、

$$\begin{aligned} W_3 &= k \ln(z-a) - k \ln(z+a) \\ &= k \ln \frac{z-a}{z+a} = k \ln \frac{1-a/z}{1+a/z} \cdots \cdots \cdots (4) \\ &\approx k \ln(1-2a/z) \end{aligned}$$

となり、 $a \rightarrow 0$ とするとき、 μ を定数として $2ak \rightarrow \mu$ と仮定するならば W_3 の極限関数 W_4 は、

$$W_4 = -\frac{\mu}{z} \cdots \cdots \cdots (5)$$

と導き出せる。湧き出しや吸い込みを入れ替えれば、式の符号は逆転する。この複素関数は二重湧き出しと呼ばれ、円柱周りの流れを記述する際には重要な関数となる。しかし、ここで最も重要な点は、式(3)と式(5)との関係がテーラー展開法からは直接見えないことである。また、二重湧き出しの電気アナロジー実験は難しいことから、湧き出しや吸い込み実験からこの関数をイメージできない。そのために二重湧き出し関数の導出方法にひ

と工夫が必要となる。加えて、 $2ak \rightarrow \mu$ の式の意味も説明なく導入されている。さらに、テーラー展開した式で、 $\varepsilon = -2a/z$ とおくと、 z が原点すなわち 0 のとき、上記の仮定は十分に満たされているか数学的な疑問が残る。以上の問題点を克服するために、次のように式変形して、極限関数を求めた。

$$W_3 = k \ln(z-a) - k \ln(z+a)$$

$$= -2ak \frac{\ln(z-a) - \ln(z+a)}{(z-a) - (z+a)} \dots\dots\dots(6)$$

であり、定数を除いた式は、空間の2点 $(z-a)$ と $(z+a)$ 間の対数 $\ln z$ の勾配を示すものである。ここで $a \rightarrow 0$ とするとき、式(6)の極限関数は式(1)を微分したものとなっていることが直接理解できるのである。また、この導関数が有意義であるために、 $2ak$ が有限である必要があるのは言うまでもない。 $2ak \rightarrow \mu$ の仮定が単に数学的なトリックでないことも同時に説明できるわけである。

2.2 二重湧き出し関数

図1に示すように、再び原点から a の A 点には湧き出し、 $-a$ の B 点には吸い込みがある場合を考える。改めてポテンシャル関数を W とおくと、その実部 ϕ と虚部 ψ はそれぞれ速度ポテンシャル、流れ関数と呼ばれている。すなわち、

$$W = \phi + i\psi$$

$$= k \ln(z-a) - k \ln(z+a) \dots\dots\dots(7)$$

であり、点 A と点 B から点 P までの幾何学条件を図1のように極座標を用いて定める。

$$\phi = k(\ln r_A - \ln r_B), \quad \psi = k(\theta_A - \theta_B) \dots\dots$$

$$\text{where } r_A = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \quad r_B = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots(8)$$

ここで速度ポテンシャルと流線が一定となる軌跡は、文献(2)にも解説されており簡単な計算からそれぞれ前者は x 軸に、また後者は y 軸を中心にもつ円群で、図2に示す通りである。

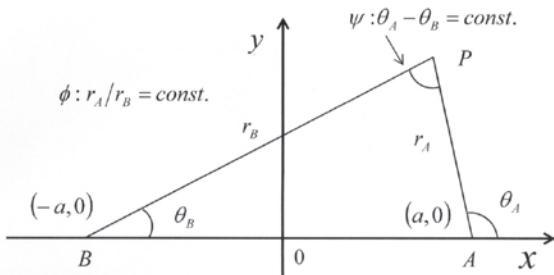


図1. 点 A に湧き出し、点 B に吸い込みをおいた時の幾何学条件

一方、湧き出しと吸い込みが原点に近づいた極限である二重湧き出しの速度ポテンシャルと流線が一定となる軌跡は、式(5)より図3のように作図できる。

図2に示した湧き出しと吸い込みが置かれた流れ場の流線とポテンシャル線は、図3の二重湧き出しのそれぞれに対応する線に滑らかにつながっている。

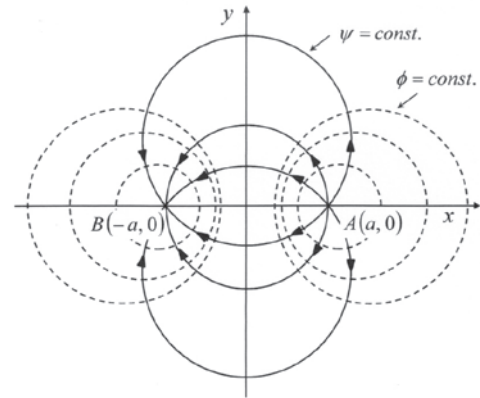


図2. 湧き出し・吸い込み場における流れの方向を示す矢印を付した流線とポテンシャル線

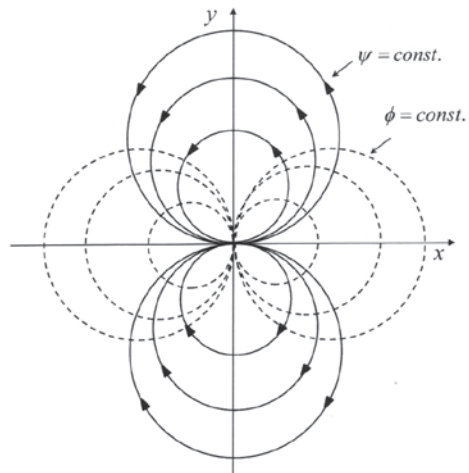


図3. 二重湧き出しにおける流れの方向を示す矢印を付した流線とポテンシャル線

ていることが理解できる。

2.3 電気学における電流、電界、電圧の関係

図4aのように十分広い錫箔や導電紙上に点 A と点 B に底面断面が半径 b の円状電極を置き、点 B を負極として点 A に電位差 V を印加する場合を考える。電流は電子の流れであるから電流の方向は

電界（電場）の方向に一致し、電流密度は電界の強さに比例することになる。すなわち、電極 A から半径方向 r の密度を i_r 、電界を E_r とすると、

$$i_r = \sigma E_r \dots\dots\dots(9)$$

の関係がある。ここに、 σ は抵抗の逆数であり、電気伝導率（あるいは導電率）と呼ばれる。電極 A から電極 B までのある一定の大きさの電流の流れる経路は電流の流線となり、電界の接線とも一致し、電流の流線が交わることはない。

電位の等しい点を連ねると導体が均一ならば一般に連続な線ができる。この線を等電位線という。電流は等電位線に沿って流れることはなく、電流密度ベクトルは常に等電位線に直角となる。

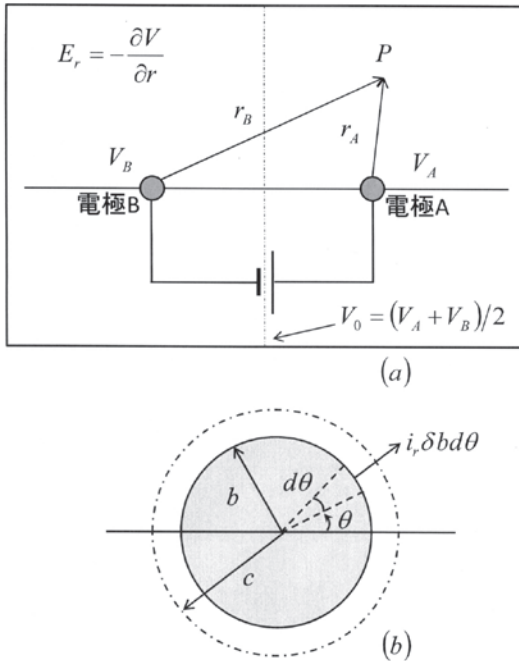


図4. 黒枠で示した導電紙の上に置いた電極周りの等電位線

一方、電極から r 方向のある位置における電界 E_r と電位 V の間には、

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \dots\dots\dots(10)$$

の関係がある。また、電極 A から流出する電流 I は、電極 B に流入する電流に等しく、電極 A の周りを一周する半径 b の経路で周積分を行えば得られる。図 4b に示すように平面状導電紙の厚みを δ とし、半径 b の円周上の θ から $\theta + d\theta$ の扇形部分から流出する電流は $i_r \delta b d\theta$ となる。 i_r は動径の増加する方向の電流密度とする。従って、電極全体から流出する電流 I は、円周上の 0 から 2π まで積分

すれば求まる。式(9)と(10)を考慮すれば、

$$I = \int_0^{2\pi} i_r \sigma \delta a d\theta = -\sigma \delta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=b} a d\theta \dots\dots\dots(11)$$

が得られる。ここで再度、図 4b の一点破線で示すように、円柱を取り囲む半径 c の円を考えると、この円から流出した総電流もやはり I であるはずである。すなわち、

$$I = -\sigma \delta \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r=c} b d\theta \dots\dots\dots(12)$$

となるから、結局このような積分を満たす電流密度関数は半径 r のみの関数で、

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{I}{2\pi\sigma\delta} \cdot \frac{1}{r} \dots\dots\dots(13)$$

である。式(13)は積分できて、

$$V = -\frac{I}{2\pi\sigma\delta} \ln r + D \dots\dots\dots(14)$$

となるが、ここに D は積分定数である。電極 A の電位を V_A とすれば、電極の半径は b であることから式(14)より、

$$D = V_A + \frac{I}{2\pi\sigma\delta} \ln b \dots\dots\dots(15)$$

である。従って、

$$V - V_A = -\frac{I}{2\pi\sigma\delta} \ln \frac{r}{b} \dots\dots\dots(16)$$

が得られる。次に電極 B に流入する電流は電極 A から流出する電流 I に等しいことから、式(16)の符号を考慮すれば、

$$V - V_B = \frac{I}{2\pi\sigma\delta} \ln \frac{r}{b} \dots\dots\dots(17)$$

である。今、図 4a の点 P と電極 A と B との距離をそれぞれ r_A と r_B して、式(16)と(17)を両辺加えわせると、

$$V - \frac{(V_A + V_B)}{2} = \frac{I}{2\pi\sigma\delta} \ln \frac{r}{r_A} \dots\dots\dots(18)$$

ここで、 $V_A + V_B = 2V_0$ とおけば、

$$V - V_0 = \frac{I}{2\pi\sigma\delta} (\ln r_B - \ln r_A) \dots\dots\dots(19)$$

となって、導電紙が均一であれば電極 A と B を結

ぶ二等分線の電圧は V_0 で、常にこの線上の電圧を基準に電圧を計測すれば、式(8)のポテンシャル線の式と相似の式なることが分かる。

結局のところ、電極 A と B を結ぶ二等分線の電圧を基準に電気の流れは流体の流れに、また電極 A は湧き出し、電極 B は吸い込みに対応しているわけである。式(19)に電極の項が消えたのは、2つの電極の半径は同じにしたからで、その外周は等電位となっていることも蛇足であるが付け加えておく。また、導電紙が電極の大きさに比べて十分広ければ、式(19)は電極の半径に無関係であり、実験装置を作るうえで重要なポイントである。

2.4 電流の流線の可視化

電流の流線と等電位線は直交することを学んだ。電圧は電気テスターで容易に計測できることから、等電位線の計測は容易である。しかし、電流の流線を直接計測することはなかなか難しい。そこで、磁力線と電流の流線との間にはアナロジーが成り立つことを利用すれば、電流の流線の可視化はできそうである。後述する湧き出しと吸い込み実験で用いた円柱電極と砂鉄を用いて、磁力線を可視化すればよいわけがある。最初円柱電極を離しておき、次第に近づけると二重湧き出しの流線の様子も可視化できる。

3 湧き出しと吸い込み実験

以上示したように、流体力学における湧き出しと吸い込みは導電紙の上に円形の電極を設け、その電極間に直流電圧を印加する装置を作ればよいわけであるから装置は極めて簡単である。

図4の黒枠はA4の導電紙である。この上に電極として円筒形のニッケルメッキを施したネオジウム磁石2個を乗せる。実験機はスチール製でその表面は樹脂系の化粧板が施してあるから、磁石は紙抑えと電極を兼ねることができる。また、磁石は、供給電源のリード線の端子も鉄系材料を選ぶことで取り外しも極めて容易である。導電紙の抵抗は大きく電流は高々 $10\mu\text{A}$ 程度であるので、汎用の角型9V乾電池(006P)で十分である。また、電圧計としてデジタル電圧計は都合がよく、入力電圧レンジは自動よりは固定が好ましい。以上の装置で実験は開始できる。

学生実験では、等電位線計測を5-6個課している。また学生のグループは5-6人であることから、各人それぞれ電極間隔を変えて、電極間隔を小さくした際の極限の等電位線を想像させるのも重要である。計測した等電位点は黒い導電紙に直接色々な記号でマークさせ、計測終了後A4方眼紙を重ねて針で転写し、さらにそれらの点を実線で連ねさせる。このようにして計測した磁石間隔が60mmの結果を図5に示す。導電紙は十分には広くないので、等電位線が大きくなると真円から次第に楕円に変形し、課す等電圧値には注意が必要である。図5には計測した等電位線の他に、電極(磁石)間隔を60mmにして10mm方眼紙の上に砂鉄を撒いて、磁力線(流線)を可視化した写真を重ねて

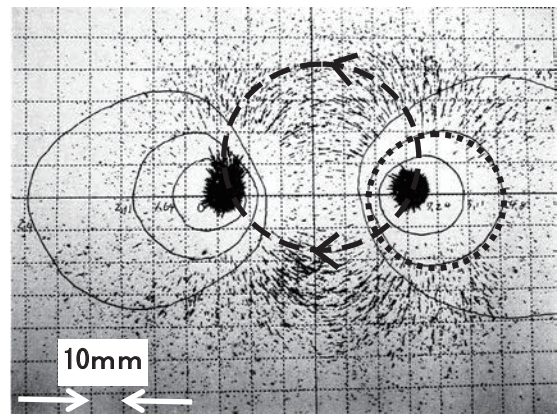


図5. 磁石の直径は8mm, その間隔が60mmの場合の実験から求めた計測点を連ねた等電位線(等ポテンシャル線)群を実線で示し、点線は計測した等電位線に合うように重ねた円を示す。また、砂鉄で磁力線(湧き出し吸い込みの流線に対応)を可視化し、破線は2つの磁石を通るよう描いた円を示す。

ある。さらに等電位線の1つには点線で描いた円と、磁力線の向きを読み取って破線で示した円も重ねて描写している。図2に示した当ポテンシャル線と流線群と概ね一致していることが分かる。

最後に、図6は直径8mmの磁石2個をくっつけて砂鉄で磁力線を可視化したもので、図3に示した二重湧き出しの流線とほぼ一致し、流線は二重湧き出し(x 軸)に接していることも理解できる。

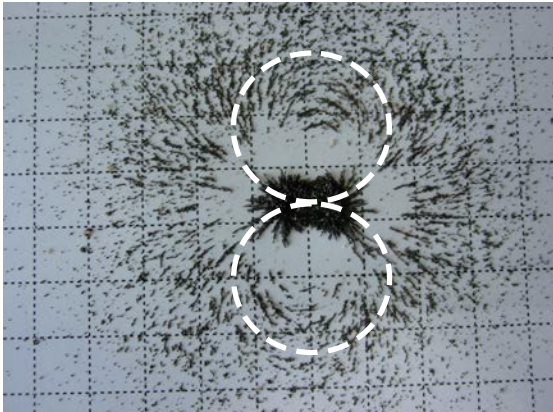


図 6. 直径 8mm の磁石 2 個をくっつけて砂鉄で磁力線（流線）を可視化し、破線は磁石を通るよう描いた 2 つの円を示す。

4 レポートの課題

課題の詳細は割愛するが、計測したほぼ円とみなせる等電位線群は式(19)で記述されることから、ある等電位線から $I/\sigma\delta$ が求まり、この値を用いて他の等電位線を円で近似した際、その直径や中心位置を求めることができる。また、湧き出しと吸い込みが無限小まで近づいて作る二重湧き出しの流線やポテンシャル線が、滑らかに接続する様子は、図 3 に示した流線とポテンシャル線を再度描かすことで、理解がさらに深まる。

5 まとめ

流体力学の複素速度ポテンシャル理論の理解促進に役立つ電磁気とのアナロジーを用いた簡単な電気実験の考案とアナロジー関数を導出した。また、湧き出し・吸い込み関数からその間隔を無限小まで近づけた極限である二重湧き出し関数の導出にあたっては、従来の手法とは異なり、理解促進に役立つよう、数学的にも合理的でしかも身近な式変形を導入した。

流体力学と電磁気学は異なる分野であるにもかかわらず共通の支配方程式に従っていることを気付かせ、自然現象に興味を抱かせることも狙いの 1 つである。さらに、自然の法則を記述している数関数は有限から無限への極限関数に滑らかに接続している美しさも魅力を駆り立てると信じている。

また、高校時代から何の役に立つか疑問を持ち

続けながら学んだ数学が少しでも身近な自然現象を理解する上で役に立っていることを実感させることも、実験担当者としてささやかであるが期待しているところである。

最後に、狙い通りに行っているかどうか本電気実験と風洞実験に関して、履修している学生にアンケートを実施し、履修生 48 名の半数から回答を得た。本小論に関する 3 つの質問事項は、

- 1) 湧き出し・吸い込みを限りなく近接させた極限関数は、湧き出し（吸い込み）関数の導関数（二重湧き出し：doublet）となることを理解できましたか。
- 2) 湧き出し・吸い込みの流線と、2 個の磁石の磁力線に対応させることができ、磁力線を砂鉄で可視化しました。等ポテンシャル線（等電位線）が磁力線（流線）と直交していることを理解できましたか。
- 3) ポテンシャル理論は少し難しいですが、この実験を契機にもっとポテンシャル理論を勉強したいと思いましたが。

質問 1) に対しては、全て普通ないしは理解できたと回答し、その内良くできたと回答した学生は 14 名であった。質問 2) に対しても、全て回答が普通ないしは理解できたと回答し、特によくできたと回答した学生は 17 名であった。最後の質問は特に重要で、これをきっかけとしてポテンシャル理論をもっと勉強をしたいと思った学生はほぼ 6 割に達した。

最後に自由形式の感想あるいはコメントを書かせたところ、

- ・授業だけでは、深く理解することが出来なかったが、実験を行ったことで今までで一番深く理解できた。
- ・難しい実験だったが、勉強意欲をそそられる実験だった。
- ・かなり手軽に流体実験ができるので、やや理解しにくいところもありますが、非常に良い実験方法だと思います。

以上のように、本実験の狙いもほぼ達せられたと判断してよさそうである。

参考文献

- (1) 高木 正平：電気アナロジーを利用した循環をもつ円柱や翼周りの流線の可視化、可視化情報学会論文集。（投稿中）
- (2) 杉山 弘，遠藤 剛，新井 隆景：機械工学入門講座 流体力学，森北出版，1995