局所体上の2次形式のGross-Keating不変量について (モジュラー形式と保型表現)

局所体上の2次形式のGross-Keating不変量について (モジュラー形式と保型表現)

著者	池田 保, 桂田 英典
雑誌名	数理解析研究所講究録
巻	1973
ページ	179-188
発行年	2015-11
URL	http://hdl.handle.net/10258/00008592

局所体上の 2 次形式の Gross-Keating 不変量について

池田保（京都大学大学院理学研究科） ikeda@math.kyoto-u.ac.jp
桂田英典（室蘭工業大学大学院工学研究科） hidenori@mmm.muroran-it.ac.jp

1 Gross-Keating 不変量

Gross-Keating 不変量（以下では GK 不変量という．）は数論幾何への応用のため，Gross と Keating の共著論文 [3] で導入された．この節では GK 不変量の定義を復習する．原論文では GK 不変量は $\mathbb{Z}_p$ 上の 2 次形式に対して定義されているが，一般の標数 0 の局所体の整数環上で考える．

F を標数 0 の局所体，$\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_F$ を F の整数環とする．$\mathfrak{o}$ の極大 ideal と剰余体をそれぞれ $\mathfrak{p}, \mathfrak{k}$ とする．$\mathfrak{p}$ の位数を q で表す．q が偶数のとき，F は dyadic であるという．この論説で主として扱うのは F が dyadic の場合である．ϖ を $\mathfrak{o}$ の一つの素元とする．$x \in \varpi^n \mathfrak{o}^\times$ のとき，$\mathrm{ord}(x) = n$ と表す．また $\mathrm{ord}(0) = +\infty$ であると約束する．$F^\times$ の平方元の全体のなす部分群を $F^{\times 2}$ で表す．

環 R に対して，R の元を成分に持つ $m \times n$ 行列の全体を $M_{mn}(R)$ で表す．$m = n$ のときは単に $M_n(R)$ と表す．$b_1, \ldots, b_n$ を成分に持つ対角行列を $\mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ で表す．

定義 1.1. $B = {}^tB = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(F)$ が半整数対称行列であるとは

$$\begin{aligned} b_{ii} &\in \mathfrak{o} \qquad (1 \le i \le n), \\ 2b_{ij} &\in \mathfrak{o} \qquad (1 \le i, j \le n). \end{aligned}$$

が成り立つこととする．半整数対称行列の全体からなる $\mathrm{M}_n(F)$ の部分集合を $\mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ で表す．

$B \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ が非退化とは $\det B \neq 0$ なることとする．$\mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ の非退化な元全体のなす部分集合を $\mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ で表す．

二つの行列 $B, B' \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ が同値であるとは $B' = B[U]$ を満たす $U \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ が存在

するととする．ここで，$B[U] = {}^tUBU$ である．B と B' が同値であることを $B \sim B'$ で表す．B と同値な行列の全体を $\{B\}$ で表す．

$B = (b_{ij}) \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ とするとき，次の 2 つの条件

$$\begin{aligned} &\mathrm{ord}(b_{ii}) \geq a_i && (1 \leq i \leq n), \\ &\mathrm{ord}(2b_{ij}) \geq (a_i + a_j)/2 && (1 \leq i, j \leq n) \end{aligned}$$

を満たす非負整数の非減少列 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ の全体を $S(B)$ で表す．また

$$\mathbf{S}(\{B\}) = \bigcup_{B' \in \{B\}} S(B') = \bigcup_{U \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})} S(B[U]).$$

とおく．

定義 1.2. 辞書式順序 $\succ$ に関する $\mathbf{S}(\{B\})$ の最大元を $B = (b_{ij}) \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ の GK 不変量 $\mathrm{GK}(B)$ という．$\mathrm{GK}(B) \in S(B)$ のとき，B は最適形式（optimal form）という．

ここで辞書式順序 $\succ$ は，$(y_1, y_2, \ldots, y_n), (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して

$$\begin{aligned} &(y_1, y_2, \ldots, y_n) \succ (z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ &\Longleftrightarrow \\ &y_1 = z_1, \ldots, y_{j-1} = z_{j-1}, y_j > z_j \text{ なる } j \leq n \text{ が存在する} \end{aligned}$$

により定義される全順序である．$\underline{a} \in S(B)$ のとき

$$\min_{1 \leq j \leq n} (\mathrm{ord}(2b_{ij})) \geq a_i/2$$

であるから $a_1 + \cdots + a_n \leq 2\mathrm{ord}(\det(2B))$ である．とくに $\mathbf{S}(\{B\})$ は有限集合であり，最大元が存在することがわかる．定義から明らかなように $\mathrm{GK}(B)$ は B の同値類のみによって定まる．$\mathrm{GK}(B) = (a_1, \ldots, a_n)$ のとき

$$\begin{aligned} a_1 &= \max_{(y_1, \ldots) \in \mathbf{S}(\{B\})} \{y_1\}, \\ a_2 &= \max_{(a_1, y_2, \ldots) \in \mathbf{S}(\{B\})} \{y_2\}, \\ &\cdots \\ a_n &= \max_{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, y_n) \in \mathbf{S}(\{B\})} \{y_n\}. \end{aligned}$$

である．

$B \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ に対して $D_B = (-4)^{[n/2]} \det B$ とおく．

定義 1.3. n は偶数であるとする．$F(\sqrt{D_B})/F$ の判別式を $\mathfrak{D}_B$ で表す．また

$$\xi(B)=\begin{cases}1 & D_B\in F^{\times 2}\ \text{のとき,}\\ -1 & F(\sqrt{D_B})/F\ \text{が不分岐 2 次拡大のとき,}\\ 0 & F(\sqrt{D_B})/F\ \text{が分岐 2 次拡大のとき}\end{cases}$$

とおく．

$B\in\mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ の Clifford 不変量（たとえば Scharlau [9], p. 333 を参照）を次のように定義する．

定義 1.4. n を偶数（resp. 奇数）とするとき $B\in\mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ の Clifford 代数（resp. 偶 Clifford 代数）の Hasse 不変量を B の Clifford 不変量といい，$\eta(B)$ で表す．

B が F 上 $\mathrm{diag}(b_1',\ldots,b_n')$ と同値のとき，（すなわち $B[U]=\mathrm{diag}(b_1',\ldots,b_n')$ なる $U\in\mathrm{GL}_n(F)$ が存在するとき）

$$\begin{aligned}\eta(B)=&\langle -1,-1\rangle^{[(n+1)/4]}\langle -1,\det B\rangle^{[(n-1)/2]}\prod_{i<j}\langle b_i',b_j'\rangle\\ =&\begin{cases}\langle -1,-1\rangle^{m(m-1)/2}\langle -1,\det B\rangle^{m-1}\prod_{i<j}\langle b_i',b_j'\rangle & \text{if } n=2m,\\ \langle -1,-1\rangle^{m(m+1)/2}\langle -1,\det B\rangle^{m}\prod_{i<j}\langle b_i',b_j'\rangle & \text{if } n=2m+1.\end{cases}\end{aligned}$$

である．ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は F の Hilbert 記号である．本論説で必要になるのは n が奇数の場合だけで，その場合は

$$\eta(B)=\begin{cases}1 & B\ \text{が}\ F\ \text{上分裂するとき}\\ -1 & B\ \text{が}\ F\ \text{上分裂しないとき}\end{cases}$$

となる．

2 主定理

定義 2.1. $B\in\mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ に対して

$$\Delta(B)=\begin{cases}\mathrm{ord}(D_B) & n\ \text{が奇数のとき}\\ \mathrm{ord}(D_B)-\mathrm{ord}(\mathfrak{D}_B)+1-\xi(B)^2 & n\ \text{が偶数のとき}\end{cases}$$

とおく．

n が偶数のときは，

$$\Delta(B) = \begin{cases} \mathrm{ord}(D_B) & \mathrm{ord}(\mathfrak{D}_B) = 0 \text{ の場合} \\ \mathrm{ord}(D_B) - \mathrm{ord}(\mathfrak{D}_B) + 1 & \mathrm{ord}(\mathfrak{D}_B) > 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

といっても同じである．

定理 2.1. $B \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ に対して $\mathrm{GK}(B) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とすると

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \Delta(B)$$

が成り立つ．

非負整数の非減少列 $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して，

$$G_{\underline{a}} = \{ g = (g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o}) \mid\ a_i < a_j \text{ ならば } \mathrm{ord}(g_{ij}) \geq (a_j - a_i)/2 \ \}$$

とおく．$G_{\underline{a}}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ の開部分群である．

定理 2.2. $B \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ は最適形式で $\mathrm{GK}(B) = \underline{a}$ とする．このとき，$U \in \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ に対して，$B[U]$ が最適形式となるためには $U \in G_{\underline{a}}$ が必要十分である．

$B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ とするとき，$1 \leq m \leq n$ に対して $B^{(m)} = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq m} \in \mathcal{H}_m(\mathfrak{o})$ とおく．

定理 2.3. $B \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ は最適形式で $\mathrm{GK}(B) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ とする．$a_k < a_{k+1}$ ならば $B^{(k)}$ も最適形式で $\mathrm{GK}(B^{(k)}) = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ が成り立つ．

定理 2.4. $B \simeq B_1 \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ であり，B と B_1 はどちらも最適形式であるとする．$\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{GK}(B) = \mathrm{GK}(B_1)$ とおく．$a_k < a_{k+1}$, $1 \leq k < n$ と仮定するとき，次の *(1), (2)* が成り立つ．

(1) k が偶数ならば $\xi(B^{(k)}) = \xi(B_1^{(k)})$ が成り立つ．
(2) k が奇数ならば $\eta(B^{(k)}) = \eta(B_1^{(k)})$ が成り立つ．

注意 2.1. F が dyadic でない場合は，$B \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ は

$$\mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n), \qquad \mathrm{ord}(b_1) \leq \mathrm{ord}(b_2) \leq \cdots \leq \mathrm{ord}(b_n).$$

という形の対角行列に同値であることが知られている（Jordan 分解）．このとき

$$\mathrm{GK}(B) = (\mathrm{ord}(b_1), \mathrm{ord}(b_2) \ldots, \mathrm{ord}(b_n))$$

が成り立つ．したがって F が dyadic でない場合には GK 不変量の計算は容易である．

3　２元２次形式の GK 不変量

２元２次形式の GK 不変量は比較的容易に計算できる．まず、半整数対称行列と $\mathfrak{o}$ 上の２次加群との対応について説明する．

L を $\mathfrak{o}$ 上の rank n の自由加群，Q を L 上の２次形式で $\mathfrak{o}$ に値を持つものとする．このような組 (L,Q) を $\mathfrak{o}$ 上の rank n の２次加群という．Q に付随する双線型形式 $(\,,\,)_Q$ を

$$(x,y)_Q = Q(x+y) - Q(x) - Q(y), \qquad x,y \in L.$$

により定義する．$\underline{\psi} = \{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ を L の $\mathfrak{o}$ 上の順序づけられた基底とするとき，３つ組 $(L,Q,\underline{\psi})$ を $\mathfrak{o}$ 上の枠付き２次加群という．$(L,Q,\underline{\psi})$ を $\mathfrak{o}$ 上の枠付き２次加群とするとき，$B=(b_{ij}) \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ を

$$b_{ij} = \frac{1}{2}(\psi_i, \psi_j).$$

によって定義することができる．B を $(L,Q,\underline{\psi})$ に付随する半整数対称行列という．この対応により、$\mathfrak{o}$ 上の rank n の枠付き２次加群の同型類の集合は $\mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ と同一視することができる．$B \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ のとき，$(L,Q,\underline{\psi})$ は非退化であるという．B が最適形式のとき，$\underline{\psi}$ は (L,Q) の最適基底であるという．

$(L,Q,\underline{\psi})$ を $\mathfrak{o}$ 上の枠付き２次加群とする．基底 $\underline{\psi}$ により L を $\mathfrak{o}^n$ と同一視し, $\mathrm{Aut}(L) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathfrak{o})$ は L に右から作用しているものと考える．このとき $(L,Q,\underline{\psi}U)$ には $B[U] = {}^tUBU$ が対応する．とくに半整数対称行列の同値類と２次加群の同型類は１対１に対応することがわかる．B の GK 不変量 $\mathrm{GK}(B)$ を対応する２次加群 (L,Q) の GK 不変量ともいう．

(L,Q) を $\mathfrak{o}$ 上の２次加群とするとき, $\{Q(x) \,|\, x \in L\}$ で生成される ideal $\mathrm{n}(L)$ を (L,Q) の norm という．

命題 3.1. *$\mathfrak{o}$ 上の２次加群 (L,Q) の GK 不変量を $(a_1, \ldots, a_n)$ とすると，$a_1 = \mathrm{ord}(\mathrm{n}(L))$ が成り立つ．*

$\mathfrak{o}$ 上の２次加群 (L,Q) と (L_1,Q_1) が弱同値であるとは，(L,Q) と (L_1,uQ_1) が同値になるような $u \in \mathfrak{o}^\times$ が存在することをいう．弱同値な２次加群の GK 不変量は相等しい．

(L,Q) と (L_1,Q_1) が原始的であるとは $\mathrm{n}(L)=\mathfrak{o}$ であることをいう．古典的な２次形式論と同様に，$\mathfrak{o}$ 上の非退化で原始的な２元２次形式は F の２次拡大の整環（order）を使って分類することができる．

$B \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ を非退化で原始的な半整数対称行列，B に対応する $\mathfrak{o}$ 上の 2 次加群を (L,Q) とする．$(L\otimes F, Q\otimes F)$ の F 上の偶 Clifford 代数 E を (L,Q) の判別式代数（discriminat algebra）という．E は F 上の rank 2 の半単純代数で $F[x]/(x^2-D_B)$ と同型である．すなわち

$$E \simeq \begin{cases} F\oplus F & D_B \in F^{\times 2} \text{ の場合} \\ F(\sqrt{D_B}) & D_B \notin F^{\times 2} \text{ の場合} \end{cases}$$

である．E/F が分岐 2 次拡大のとき，E/F は分岐であるといい，そうでないとき E/F は不分岐であるという．E の極大整環を $\mathfrak{o}_E$ とする．$f \geq 0$ を非負整数とするとき，E の導手 $\mathfrak{p}^f$ の整環 $\mathfrak{o}_{E,f}$ を

$$\mathfrak{o}_{E,f} = \mathfrak{o} + \mathfrak{p}^f\mathfrak{o}_E$$

により定義する．E/F の F 上の norm 形式を $\mathrm{N}_{E/F}$ で表す．また E/F の判別式を $\mathfrak{D}_E$ で表す．（$E=F\oplus F$ のときは $\mathfrak{o}_E = \mathfrak{o}\oplus\mathfrak{o}$, $\mathrm{N}_{E/F}((x,y)) = xy$, $\mathfrak{D}_E = \mathfrak{o}$ と考える．）

命題 3.2. $B \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ を非退化で原始的な半整数対称行列，B に対応する $\mathfrak{o}$ 上の 2 次加群を (L,Q) とする．$f = (\mathrm{ord}(D_B) - \mathrm{ord}(\mathfrak{D}_E))/2$ とおくとき，(L,Q) は 2 次加群 $(\mathfrak{o}_{E,f}, \mathrm{N}_{E/F})$ に弱同値である．

命題 3.3. $(\mathfrak{o}_{E,f}, \mathrm{N})$ の GK 不変量は

$$\begin{cases} (0,2f) & E/F \text{ が不分岐の場合,} \\ (0,2f+1) & E/F \text{ が分岐の場合} \end{cases}$$

で与えられる．

次の命題は後で使われないが、文献中にあまり見られないのでここで書いておく．

命題 3.4. $B \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ を非退化で原始的な 2 元 2 次形式とするとき，B が対角行列と同値であるためには $D_B \in 4\mathfrak{o}$ であることが必要十分条件である．

Proof. $B \simeq (b_1)\perp(b_2)$ ならば $D_B = 4b_1b_2 \in 4\mathfrak{o}$ である．逆に $D_B \in 4\mathfrak{o}$ とする．命題 3.2 により B の弱同値類は判別式代数と f だけによって定まるので B は $(1)\perp(-D_B/4)$ と弱同値であることがわかる． □

Rank 2 の最適形式は次のように特徴づけられる．

命題 3.5. F は *dyadic* であるとする．$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ で $\underline{a} = (a_1, a_2) \in S(B)$ とするとき，次が成り立つ．

(1) $a_1 = a_2$ ならば

$$\mathrm{GK}(B) = \underline{a} \Longleftrightarrow \mathrm{ord}(2b_{12}) = a_1.$$

(2) $a_2 - a_1 = 2f > 0,\ f \in \mathbb{Z}_{>0}$ ならば

$$\mathrm{GK}(B) = \underline{a} \Longleftrightarrow \mathrm{ord}(b_{11}) = a_1, \mathrm{ord}(2b_{12}) = a_1 + f.$$

(3) $a_2 - a_1 = 2f + 1,\ f \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ならば

$$\mathrm{GK}(B) = \underline{a} \Longleftrightarrow \mathrm{ord}(b_{11}) = a_1, \mathrm{ord}(b_{22}) = a_2.$$

注意 3.1. F が non-dyadic で $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{o})$ で $\underline{a} = (a_1, a_2) \in S(B)$ とするとき，$\mathrm{GK}(B) = \underline{a}$ であるためには

$$\mathrm{ord}(b_1) = a_1,\ \mathrm{ord}(\det B) = a_1 + a_2$$

が必要十分である．

Example. $F = \mathbb{Q}_2,\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする．B は $F(\sqrt{-1})$ の極大整環に対応するので $\mathrm{GK}(B) = (0, 1)$ である．とくに B は最適形式ではない．B と同値な最適形式としては $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ がとれる．

4　簡約形式

この節では F は dyadic であるとする．（F が non-dyadic のときには議論はずっと簡単になる．）

$\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を非負整数の非減少列とする．n の分割 $n = n_1 + n_n + \cdots + n_r$ を

$$a_{n_1 + \cdots n_u} < a_{n_1 + \cdots + n_u + 1} = \cdots = a_{n_1 + \cdots + n_{u+1}}, \qquad (u = 0, 1, \ldots, r).$$

によって定める．$s = 1, 2, \ldots, r$ に対して

$$n_s^* = \sum_{v=1}^{s} n_v, \qquad a_s^* = a_{n_{s-1}^*+1} = \cdots = a_{n_s^*}$$

とおき，s 番目のブロック I_s を $I_s = \{n_{s-1}^* + 1, n_{s-1}^* + 2, \ldots, n_s^*\}$ により定義する．

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を対合，すなわち $\sigma^2 = \mathrm{id}$ なる置換とする．このとき，

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^0 &= \{i \,|1 \le i \le n,\ i = \sigma(i)\}, \\
\mathcal{P}^+ &= \{i \,|1 \le i \le n,\ a_i > a_{\sigma(i)}\}, \\
\mathcal{P}^- &= \{i \,|1 \le i \le n,\ a_i < a_{\sigma(i)}\}, \\
\mathcal{P}^= &= \{i \,|1 \le i \le n,\ i \ne \sigma(i), a_i = a_{\sigma(i)}\}.
\end{aligned}$$

とおく．また $s = 1, 2, \ldots, r$ に対して $\mathcal{P}_s^+ = I_s \cap \mathcal{P}^+$, $\mathcal{P}_s^- = I_s \cap \mathcal{P}^-$ とおく．

定義 4.1. 対合 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が正規 $\underline{a}$-許容的であるとは次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすこととする．

(i) $i \in \mathcal{P}^0$ ならば

$$i = \max\{j \in \mathcal{P}^0 \cup \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^- \,|\, a_j \equiv a_i \bmod 2\}$$

が成り立つ．とくに $\mathcal{P}^0$ は高々 2 個の元からなり，$\mathcal{P}^0$ が 2 個の元 i, j を持つ場合には $a_i \not\equiv a_j \bmod 2$ である．

(ii) $s = 1, 2, \ldots, r$ に対して $\mathcal{P}_s^+$ は空集合でなければ I_s の最小元だけからなる．さらに $i \in \mathcal{P}_s^+$ ならば

$$\sigma(i) = \max\{j \in \mathcal{P}_1^- \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{s-1}^- \,|\, a_j \equiv a_i \bmod 2\}$$

である．同様に $s = 1, 2, \ldots, r$ に対して $\mathcal{P}_s^-$ は空集合でなければ I_s の最大元だけからなる．さらに $i \in \mathcal{P}_s^+$ ならば

$$\sigma(i) = \min\{j \in \mathcal{P}_{s+1}^+ \cup \cdots \cup \mathcal{P}_r^+ \,|\, a_j \equiv a_i \bmod 2\}$$

である．

(iii) $i \in \mathcal{P}^=$ ならば i と $\sigma(i)$ は隣接している．すなわち $|i - \sigma(i)| = 1$ である．

$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ が正規 $\underline{a}$-許容的な対合ならば $a_i \equiv a_{\sigma(i)} \bmod 2 \quad (1 \le i \le n)$ であることに注意する．

定義 4.2. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ を正規 $\underline{a}$-許容的な対合とする．$B = (b_{ij}) \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ が GK-type $(\underline{a}, \sigma)$ の簡約形式であるとは次の条件 (1), (2), (3), (4) が成り立つことをいう．

(1) $\underline{a} \in S(B)$.

(2) $i \notin \mathcal{P}^0,\ j = \sigma(i)$ ならば $\mathrm{ord}(2b_{ij}) = \dfrac{a_i + a_j}{2}$ である．

(3) $i \in \mathcal{P}^0 \cup \mathcal{P}^-$ ならば $\mathrm{ord}(b_{ii}) = a_i$ である．

(4) $j \neq i, \sigma(i)$ ならば $\mathrm{ord}(2b_{ij}) > \dfrac{a_i + a_j}{2}$ である．

定理 4.1. $B \in \mathcal{H}_n(\mathfrak{o})$ が *GK type* $(\underline{a}, \sigma)$ の簡約形式であれば B は最適形式であり，$\mathrm{GK}(B) = \underline{a}$ が成り立つ．

1 節で定義された群 $G_{\underline{a}}$ の部分群 $G_{\underline{a}}^{\triangle}$ を

$$G_{\underline{a}}^{\triangle} = \{g = (g_{ij}) \in G_{\underline{a}} \mid\ g_{ij} = 0, \text{ if } a_i > a_j.\}$$

により定義する．

定理 4.2. $B \in \mathcal{H}_n^{\mathrm{nd}}(\mathfrak{o})$ が最適形式で $\mathrm{GK}(B) = \underline{a}$ とする．このとき正規 $\underline{a}$-許容的な対合 σ と $U \in G_{\underline{a}}^{\triangle}$ で，$B[U]$ が *GK type* $(\underline{a}, \sigma)$ の簡約形式となるようなものが存在する．

定理 2.1，定理 2.3，定理 2.4 は，定理 4.2 を使って簡約形式に帰着することにより証明される．

定理 4.3. B_1, B_2 を *GK type* がそれぞれ $(\underline{a}_1, \sigma_1)$, $(\underline{a}_2, \sigma_2)$ の簡約形式とする．このとき $(\underline{a}_1, \sigma_1) \neq (\underline{a}_2, \sigma_2)$ であれば B_1 と B_2 は同値ではない．

注意 4.1. 上の定理 4.3 は F が non-dyadic のときには成り立たない．

例. $F = \mathbb{Q}_2$ とする．

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

とおけば、これらは GK-type がそれぞれ $((0,2,2), \begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix})$, $((0,2,2), \begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix})$ の簡約形式である．とくにこれらは同値ではない．

本論説で述べた定理の証明は [4] にある．半整数対称行列 B の Siegel 級数は $\mathrm{GK}(B)$, $\xi(B^{(k)})$, $\eta(B^{(k)})$ を用いて計算することができる．これについては [5] を参照されたい．

参考文献

[1] *ARGOS seminar on Intersections of Modular Correspondences*, Astérisque **312** (2007).

[2] I. I. Bouw, *Invariants of ternary quadratic forms*, Astérisque **312** (2007) 121–145.

[3] B. Gross and K. Keating, *On the intersection of modular correspondences*, Inv. Math. **112** (1993) 225–245.

[4] T. Ikeda and H. Katsurada, *On the Gross-Keating invariant of a quadratic form over a non-archimedean local field*, preprint, arXiv:1504.07330

[5] T. Ikeda and H. Katsurada, *Explicit formula of the Siegel series of a quadrartic form over a non-archimedean local field*, in preparation.

[6] H. Katsurada, *An explicit formula for Siegel series*, Amer. J. Math. **121** (1999) 415–452.

[7] S. Kudla, M. Rapoport, and T. Yang, *Modular Forms and Special Cycles on Shimura Curves*, Princeton university press, (2006).

[8] O. T. O'Meara, *Introduction to Quadratic Forms*, Springer, (1973).

[9] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian forms* Springer (1985)

[10] G. Shimura, *Euler products and Eisenstein series*, AMS, (1997).

[11] T. Yang, *Local densities of 2-adic quadratic forms*, J. Number Theory **108** (2004) 287–345.

[12] T. Wedhorn, *Calculation of representation densities* Astérisque **312** (2007) 185–196.