

皿まわしの数理とロボットによる実現

梶原 秀一^{*1} 橋本 幸男^{*2} 松田 敏彦^{*2} 土谷 武士^{*3}

Dynamics of a Dish-Spinning Trick and Its Realization by Robot

Hidekazu Kajiwara^{*1}, Yukio Hashimoto^{*2}, Toshihiko Matsuda^{*2} and Takeshi Tsuchiya^{*3}

Periodic stimulation sometimes stabilizes dynamic movement of mechanical systems. In this paper, we investigate the dish spinning trick from a view point of such a periodic stabilization. The system is simply described by using a spring-dumper model of the supporting rod which has two degree of freedom. In our analysis, the movement of the dish is stabilized when the elastic rod is shaken in higher frequency than its native resonant frequency. Our theory is checked by letting a robot play the real dish spinning.

Key Words: Periodic Stabilization, Dish-Spinning Trick, Amusement Robot

1. はじめに

非線形なシステムを平衡点のまわりで線形化して制御モデルを作り、線形制御器を設計して制御目的を達成することが多く行われてきた。しかし、システムのなかには線形制御モデルが得られないものや、従来知られている非線形制御を適用しても目的が達成できないものが存在する。例えば、支点を鉛直方向に拘束して動かす倒立振子の制御問題がある [1]。これまで倒立振子は支点を水平方向に動かして倒立を実現していたが、支点を鉛直軸方向に動かす場合には、線形制御モデルが存在しないため非線形制御を適用する必要がある。しかし、非線形制御では支点を大きく下方に移動させなければならず、位置の制御と静止倒立を同時に実現することができない。そこで、静止倒立ではなく振子を平衡点のまわりで動的に安定化させてもよいとすると、支点を周期的に上下移動させるだけで倒立が可能となる。このようにメカニカルシステムに周期的な入力を加えるだけでシステムを周期運動のまわりに安定化できる場合がある。本研究では大道芸である皿まわしもこのようなアプローチにより安定化できるシステムであると考え、皿まわしの数理モデルによる解析を行い、ロボットによる皿まわしの実現を試みた。

皿まわしは竿の先端のような不安定な場所で皿を安定に回すところに醍醐味のある曲芸である。これまでに皿まわしは手軽

にできる曲芸として紹介されている [2] [3]。しかし、皿の動的なバランスをとるためには、皿が回転するタイミングに合わせて竿を振り続けなければならない、このタイミングを合わせるところが初心者には難しい。皿まわしを簡単にするためには、皿まわしに適した皿や竿があることが知られている。永富 [4] は皿まわしの技法や練習方法を紹介し、様々な皿と竿の組み合わせを論じている。酒井 [5] は皿まわしの竿として皿の重量に対して鉛直方向にはたわまず、水平方向には十分なしなやかさを持つものがよいこと。また、数理的に回しやすい皿の形状として、皿は平板に近く糸底の大きさも小さいほうがよいことを指摘している。しかし、どのようなタイミングで竿を振ればよいか。竿のしなやかさによる皿の運動の安定化のメカニズムについてこれまで検討されていないように思われる。本論文では皿まわしの運動を解析するために、まず竿のたわみを考慮した数理モデルを作成する。竿のたわみは棒の先端部の 2 自由度のバネとダンパで近似して運動方程式を導出する。ここで、皿の運動、竿のたわみについてそれぞれ運動方程式を導出すると結果は非常に複雑で解析が困難になる。そこで、皿まわしの皿の運動について鉛直軸回りの回転運動のみ取り扱うこととし、ダイナミクスを単純化する。これは、皿の鉛直軸回りの運動が安定化できれば、コマの作用により皿は大きく傾くことなく回転できることが予想されるためである。次にこのように得られたダイナミクスをもとに竿を振るタイミング、皿まわしの安定化の機構を解析する。まず、竿を周期的に振ったときの皿まわしの運動を解析し、その運動まわりでの安定性を議論する。結果として、皿を安定に回すには竿の固有振動数よりも高い振動数で竿を振ること、竿と皿の運動との間に一定の位相関係が必要であることなどが明らかになった。また、竿のたわみは皿の重心

原稿受付 1997年2月17日

^{*1} 釧路工業高等専門学校

^{*2} 室蘭工業大学

^{*3} 北海道大学工学部

^{*1} Kushiro National College of Technology

^{*2} Muroran Institute of Technology

^{*3} Faculty of Engineering, Hokkaido University

運動の安定化や竿を振る運動と皿の回転運動を同期させる作用を持っていることなども分かった。以上の解析結果をもとに、ロボットアームで皿まわしをしたところ、皿の状態量を観測しない周期的に竿を振るだけのオープンループ制御で皿を回すことに成功した。

2. 皿まわしのモデルとダイナミクス

2.1 皿まわしの数理モデル

皿まわしでは竿を周期的に振ることにより、皿を安定に回転させている。この安定化の機構を議論するためには、安定な状態からずれた非定常な状態でも記述できる数理モデルを作成する必要がある。そこで、本研究では Fig. 1 に示すように皿まわしを 5 リンク 5 自由度のシステムとして取り扱う。

現実のシステムでは竿が弾性特性を持つので、厳密には分布定数系としての取り扱いが必要であるが、このモデルでは第 2 リンクが柔軟性を持つとして、Fig. 2 に示すように、竿を質量のないはり、たわみを先端部の 2 自由度を持つバネとダンパで近似する。また、使用する皿は薄い円板とする。

2.2 座標系の設定

以上のような皿まわしのモデルに対し座標系を設定する。基準座標系 (x_0, y_0, z_0) の原点 O_0 を関節軸 1, 2 の交点にとり、 z_0 軸を鉛直上方に x_0, y_0 軸を右手系をなすようにとる。第 1~5 リンク座標系 $(x_i, y_i, z_i) \{i=1 \sim 5\}$ は $\theta_1 \sim \theta_5 = 0$ のとき (x_0, y_0, z_0) と姿勢と方向が一致するようにとる。ただし、第 1, 2 リンク座標系の原点は O_0 と一致するようにとる。第 3, 4, 5 リンク座標系の原点は弾性変形していないときの第 2 リンク先端部にとる。また、リンク 2 は柔軟性を持つので、その弾性変位を記述するためにリンク先端座標系 (x'_2, y'_2, z'_2) を設定する。この座標系はリンク 2 の先端に固定され、弾性変位がないときに基準座標系と方向が一致するようにとる。ただし、これらの座標系はすべて正規直交座標系とする。

ここで、本論文で使用する記号を以下のように定義しておく。

${}^j R_i$: 各座標系間の回転行列 ($j=0 \sim 4, i=0 \sim 5$)

P_i : 基準座標系から見た第 i リンクの原点位置

q_i : 各リンクの回転軸

ω_i : 各リンクの回転角速度

G : 皿の重心

K : 竿のバネ定数

D : 竿の粘性係数

δ_x, δ_y : 竿のたわみ

m : 皿の質量

l_1 : 竿の全長

l_2 : 皿の糸底の半径

L : 皿の半径

2.3 皿まわしの運動学

ここでは皿まわしの運動方程式を求めるための準備として基準座標系から見たときの各リンクの姿勢、原点位置、角速度を求めておく。

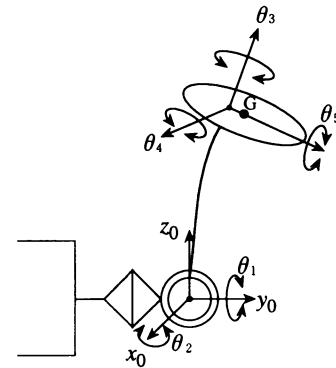


Fig. 1 Coordinate systems with dish-spinning trick

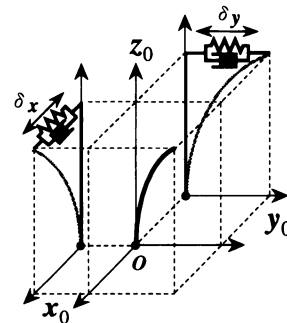


Fig. 2 Spring and damper model

リンク i 座標系からリンク j 座標系への回転行列は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 {}^0 R_1 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \\
 {}^1 R_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ 0 & \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\
 {}^2 R_3 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 {}^3 R_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 \\ 0 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{bmatrix} \\
 {}^4 R_5 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

よって基準座標系からみた各リンクの姿勢は

$$\begin{aligned}
 (x_1, y_1, z_1) &= {}^0 R_1 \\
 (x_2, y_2, z_2) &= {}^0 R_1 {}^1 R_2 \\
 (x_3, y_3, z_3) &= {}^0 R_1 {}^1 R_2 {}^2 R_3 \\
 (x_4, y_4, z_4) &= {}^0 R_1 {}^1 R_2 {}^2 R_3 {}^3 R_4 \\
 (x_5, y_5, z_5) &= {}^0 R_1 {}^1 R_2 {}^2 R_3 {}^3 R_4 {}^4 R_5
 \end{aligned} \tag{2}$$

となる。

基準座標系から見た第 i リンクの座標系の原点位置は

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_2 &= \mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 = \mathbf{o} \\ \mathbf{P}'_2 &= \mathbf{P}_2 + \delta_x \mathbf{x}_2 + \delta_y \mathbf{y}_2 + \ell_1 \mathbf{z}_2 \\ \mathbf{P}_5 &= \mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}'_2 \end{aligned} \quad (3)$$

となる。また、回転軸は

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \mathbf{y}_1, \mathbf{q}_2 = \mathbf{x}_2, \mathbf{q}_3 = \mathbf{z}_3 \\ \mathbf{q}_4 &= \mathbf{x}_4, \mathbf{q}_5 = \mathbf{y}_5 \end{aligned} \quad (4)$$

である。よって、各リンクの角速度は次式で表される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_1 &= \mathbf{q}_1 \dot{\theta}_1, \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{q}_2 \dot{\theta}_2, \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{q}_3 \dot{\theta}_3 \\ \boldsymbol{\omega}_4 &= \boldsymbol{\omega}_3 + \mathbf{q}_4 \dot{\theta}_4, \boldsymbol{\omega}_5 = \boldsymbol{\omega}_4 + \mathbf{q}_5 \dot{\theta}_5 \end{aligned} \quad (5)$$

2.4 皿まわしの運動方程式

皿まわしのモデルにおいて、第5リンクの慣性主軸と皿の重心座標系が一致し、さらにこの座標系の姿勢が第5リンクの姿勢と一致している $(\mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g, \mathbf{z}_g) = (\mathbf{x}_5, \mathbf{y}_5, \mathbf{z}_5)$ とする。

このとき基準座標系からみた重心位置は

$$\mathbf{P}_g = \mathbf{P}_5 + \ell_2 \mathbf{y}_5 \quad (6)$$

となる。よって皿の並進運動エネルギーは

$$\mathcal{T}_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{P}}_g^T \dot{\mathbf{P}}_g \quad (7)$$

で与えられる。重心座標系 $(\mathbf{x}_g, \mathbf{y}_g, \mathbf{z}_g)$ に関する慣性行列を

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

とし、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}_5$ の重心座標系への正射影を

$$\boldsymbol{\omega}_g = \mathbf{T}_5^T \boldsymbol{\omega}_5 \quad (9)$$

とすると、回転運動エネルギーは次式で与えられる。

$$\mathcal{T}_{rot} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_g^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_g \quad (10)$$

また、重力によるポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= m \mathbf{g}^T \mathbf{P}_g \\ \mathbf{g} &= (0, 0, g)^T \end{aligned} \quad (11)$$

となり、弾性によるポテンシャルエネルギーは

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} K \delta_x^2 + \frac{1}{2} K \delta_y^2 \quad (12)$$

損失エネルギーは

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} D \dot{\delta}_x^2 + \frac{1}{2} D \dot{\delta}_y^2 \quad (13)$$

となる。

ラグランジュの運動方程式に式 (7)(10)(11)(12)(13) を代入すると $\theta_1 \sim \theta_5, \delta_x, \delta_y$ の従う式が得られるが結果は非常に複雑になり解析が困難になる。そこで定常状態まわりで皿の運動を取り扱うものとし、次のような仮定を設けて近似的な運動方程式を求める。

仮定 1. 定常状態において安定に回転している皿は回転速度 $\dot{\theta}_3 =$ 一定、 $\theta_4 = \theta_5 \simeq 0$ とみなせることから、 θ_4, θ_5 についての運動は無視する。

仮定 2. 竿のたわみによる変化は微小 $\delta_x, \delta_y \ll 1$

仮定 3. 竿を振る運動は微小 $\theta_1, \theta_2 \ll 1$

仮定 4. 竿の全長は皿の糸底の半径よりも長い $\ell_2^2/L^2 \ll 1$

以上の仮定をもとに、皿の回転運動以外のコリオリ力、遠心力に関する項は微小であるとして省略すると以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_3 &= -\frac{K \ell_2}{I_2} (\delta_x \cos \theta_3 + \delta_y \sin \theta_3) \\ &\quad - \frac{D \ell_2}{I_2} (\dot{\delta}_x \cos \theta_3 + \dot{\delta}_y \sin \theta_3) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_x &= -2\gamma \dot{\delta}_x - \omega_k^2 \delta_x \\ &\quad - \ell_2 \dot{\theta}_3^2 \sin \theta_3 - \ell_1 \ddot{\theta}_1 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_y &= -2\gamma \dot{\delta}_y - \omega_k^2 \delta_y \\ &\quad + \ell_2 \dot{\theta}_3^2 \cos \theta_3 + \ell_1 \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\gamma = \frac{D}{2m}, \omega_k = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

3. 皿まわしの運動解析

3.1 皿まわしの周期運動

皿を安定に回転させるためには、式 (14)~(16) を満たす安定な解が存在しなければならない。しかし、これらの式は非線形な関係で結ばれているため解析的に解を求めることは難しい。そこで、周期的に竿を振ったとき、皿は竿の運動と同期して回転すると仮定して、皿まわしの周期運動を求める。

Fig. 1 のモデルにおいて周期入力として次式で竿を振ることを考える（竿の振り方として、一方向のみ振って皿を回すことが考えられる。このときの解析結果は付録 A 参照）。

$$\begin{aligned} \theta_1 &= A \sin(\omega t) \\ \theta_2 &= A \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (17)$$

このとき、皿の回転運動は皿まわしの観測結果を考慮して次のようになるとする。

仮定 5. 定常的な皿の回転運動は、竿を振る周期と同期する。

$$\theta_3 = \omega t + \phi \quad (18)$$

式 (18) を (15)(16) に代入すると周期解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta_x &= -\frac{\ell_2 \omega^2}{\Omega} \sin(\omega t + \phi + \psi) \\ &\quad + \frac{A \ell_1 \omega^2}{\Omega} \sin(\omega t + \psi) \\ \delta_y &= \frac{\ell_2 \omega^2}{\Omega} \cos(\omega t + \phi + \psi) \\ &\quad - \frac{A \ell_1 \omega^2}{\Omega} \cos(\omega t + \psi) \\ \Omega &= \sqrt{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \\ \psi &= \tan^{-1} \left(-\frac{2\gamma\omega}{\omega_k^2 - \omega^2} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

3.2 安定な皿まわしを実現できる条件

3.2.1 竿を振る周期と振幅

ここでは、皿まわしの解、式(18)(19)を用いて安定な皿まわしを実現できる条件を求める。

安定に回転している皿まわしの皿の重心の運動は観測結果から

$$x_G = y_G \approx 0 \quad (20)$$

としてよい。竿を振る運動が微小 ($\theta_1, \theta_2 \ll 1$) のとき、皿の重心座標は式(6)から次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x_G &= -\ell_2 \sin \theta_3 + \ell_1 \theta_1 + \delta_x \\ y_G &= \ell_2 \cos \theta_3 - \ell_1 \theta_2 + \delta_y \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)に周期解の式(18)(19)を代入して式(20)を満たす条件を求めると皿が竿の固有振動数よりも高い振動数で回転し、皿の重心運動・竿を振る運動とたわみの振動の方向が逆位相になるとき

$$\begin{aligned} \omega &\gg \omega_k \\ \psi &\approx -\pi \end{aligned} \quad (22)$$

であることが分かる。このとき、竿のたわみの解は次式で表される。

$$\begin{aligned} \delta_x &= \ell_2 \sin(\omega t + \phi) - A\ell_1 \sin(\omega t) \\ \delta_y &= -\ell_2 \cos(\omega t + \phi) + A\ell_1 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (23)$$

また、解の式(18)(23)が存在するためには、これらの解を式(14)に代入したとき次式が成り立たなくてはならない。

$$K \sin \phi - D\omega \cos \phi = -\frac{D\ell_2\omega}{A\ell_1} \quad (24)$$

この式は次式のように変形できる。

$$\sin(\phi + \Phi) = -\frac{D\ell_2\omega}{A\ell_1\sqrt{K^2 + D^2\omega^2}} \quad (25)$$

ただし、

$$\sin \Phi = -\frac{D\omega}{\sqrt{K^2 + D^2\omega^2}}, \cos \Phi = \frac{K}{\sqrt{K^2 + D^2\omega^2}}$$

$|\sin(\phi + \Phi)| \leq 1$ であるから、竿を振る振幅の条件として

$$A \geq \frac{D\ell_2\omega}{\ell_1\sqrt{K^2 + D^2\omega^2}} \quad (26)$$

が得られる。

以上の解析により、竿の固有振動数以上で皿を回すと、竿のたわみの作用により自動的に皿の重心は動かなくなることが分かる。

3.2.2 皿まわしの運動の安定性

皿まわしの皿が安定に運動を続けるためには、前節で求めた周期解が安定である必要がある。そこで本節では、解のまわりで微小変動に対する変分方程式[6]をつくり安定性を調べる。安定性の解析は付録Bに示すように、極座標系を導入すると解のまわりでの安定性が厳密に議論できる。しかしながら、極座標系を用いる方法ではパラメータの変化と安定性との関係が見えにくく、直観的な議論ができない欠点がある。ここでは厳密

性を欠くことになるが、直交座標系を用いた直観的な解析方法について述べる。

皿まわしの解、式(18)(23)のまわりで $\theta_3 \rightarrow \theta_3 + \Delta\theta_3$, $\delta_x \rightarrow \delta_x + \Delta\delta_x$, $\delta_y \rightarrow \delta_y + \Delta\delta_y$ なる微小変動が生じたとき、変分方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\theta}_3 &= -\frac{K\ell_2}{I_2} \{\cos(\omega t + \phi)\Delta\delta_x + \sin(\omega t + \phi)\Delta\delta_y\} \\ &\quad -\frac{D\ell_2}{I_2} \{\cos(\omega t + \phi)\Delta\dot{\delta}_x + \sin(\omega t + \phi)\Delta\dot{\delta}_y\} \\ &\quad + \frac{\ell_2}{I_2} (K\ell_2 - KAl_1 \cos \phi - DA\ell_1\omega \sin \phi)\Delta\theta_3 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\delta}_x &= -2\gamma\Delta\dot{\delta}_x - \omega_k^2\Delta\delta_x - \ell_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi)\Delta\theta_3 \\ &\quad - 2\ell_2\omega \sin(\omega t + \phi)\Delta\dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\delta}_y &= -2\gamma\Delta\dot{\delta}_y - \omega_k^2\Delta\delta_y - \ell_2\omega^2 \sin(\omega t + \phi)\Delta\theta_3 \\ &\quad + 2\ell_2\omega \cos(\omega t + \phi)\Delta\dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (29)$$

前節において、皿まわしの運動が実現できるのは皿を竿の固有振動数よりも高い振動数 $\omega \gg \omega_k$ で回すときであった。このことから、周期解からずれたときの皿まわしの運動は、皿の回転振動数 ω で速く振動する部分とバネの固有振動数 ω_k 程度の振動数でゆっくり変化する部分に分けられると考えられる。よって、皿の回転運動の変化 $\Delta\theta_3$, $\Delta\dot{\theta}_3$ が竿のたわみの作用によりゆっくりと変化する関数であると仮定すると、バネの運動の変化を表す式(28)(29)は速い変化 (ω を含む項) とゆっくりした変化 ($\Delta\theta_3$, $\Delta\dot{\theta}_3$ に関する項) を同時に含んでいる。皿が一回転する1周期 $2\pi/\omega$ の間に $\Delta\theta_3$, $\Delta\dot{\theta}_3$ はほとんど変化しないと考えられるから、式(28)(29)においてゆっくりした $\Delta\theta_3$, $\Delta\dot{\theta}_3$ の変化を無視して積分すると、 $\omega \gg \omega_k$ のとき

$$\begin{aligned} \Delta\delta_x &= \ell_2 \cos(\omega t + \phi)\Delta\theta_3 + \frac{2\ell_2}{\omega} \sin(\omega t + \phi)\Delta\dot{\theta}_3 \\ \Delta\delta_y &= \ell_2 \sin(\omega t + \phi)\Delta\theta_3 - \frac{2\ell_2}{\omega} \cos(\omega t + \phi)\Delta\dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。ただし、 $\Delta\theta_3$, $\Delta\dot{\theta}_3$ が0でない限り $\Delta\delta_x$, $\Delta\delta_y$ の運動が定常的に行われるとして、特殊解だけを採用した。

式(30)とそれを時間について微分したものを式(27)に代入すると次式を得る。

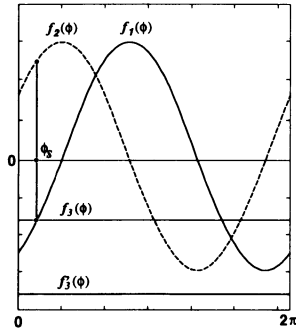
$$\Delta\ddot{\theta}_3 = -\frac{3D\ell_2^2}{I_2}\Delta\dot{\theta}_3 - \frac{\ell_2}{I_2}(KAl_1 \cos \phi + DA\ell_1\omega \sin \phi)\Delta\theta_3 \quad (31)$$

よって、上式から周期解が漸近安定であるための条件はラウス・フルビッツの安定判別法[7]を適用することにより導かれ、次式となる。

$$K \cos \phi + D\omega \sin \phi > 0 \quad (32)$$

また、周期解が存在するためには式(24)も同時に成り立たなくてはならないから漸近安定な皿まわしの運動を実現するには、竿を振る運動と皿の回転運動の間に一定の位相関係が存在しなければならないことが分かる。

Fig. 3において式(24)(32)を満たす位相は $f_1(\phi)$ と $f_3(\phi)$ の交点でかつ $f_2(\phi_s) > 0$ を満たす ϕ_s で表される。また、式(26)の振幅条件を満たさずに竿を振る [$f'_3(\phi)$ のとき] 場合は交点が存在せず、安定な周期解は存在しないことが分かる。



$$f_1(\phi) = K \sin \phi - D\omega \cos \phi$$

$$f_2(\phi) = K \cos \phi + D\omega \sin \phi$$

$$f_3(\phi) = -\frac{D\ell_2\omega}{Al_1} \quad A \geq \frac{D\ell_2\omega}{\ell_1\sqrt{K^2 + D^2\omega^2}}$$

$$f_3'(\phi) = -\frac{D\ell_2\omega}{Al_1} \quad A < \frac{D\ell_2\omega}{\ell_1\sqrt{K^2 + D^2\omega^2}}$$

Fig. 3 Stability of periodic solution

Table 1 Parameters of dish and rod

Parameter	Notation	Value
Mass of Dish	m [kg]	0.128
Length of Rod	ℓ_1 [m]	0.7
Radius of Dish	L [m]	0.125
Radius of Rim at Dish's Bottom	ℓ_2 [m]	0.015
Spring Constant of Rod	K [N/m]	8
Dumper Constant of Rod	D [N·sec/m]	0.5

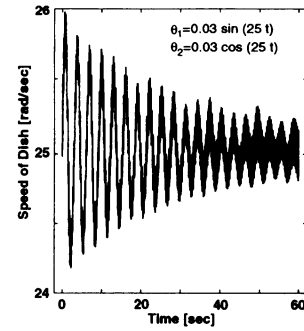
4. シミュレーション

前章で導出した竿を振る周期，振幅，位相関係により安定な皿まわしの運動が実現可能かどうか確認するために行った数値シミュレーションの結果を以下に述べる．シミュレーションで使用する皿まわしの皿と竿の各パラメータは Table 1 に示すようなものである．

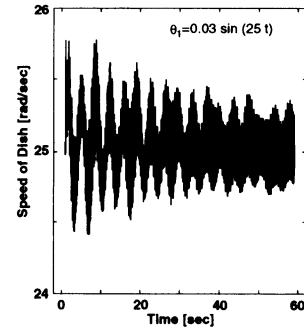
皿まわしの運動は Fig. 1 から得られた厳密な運動方程式を用いて，初期条件 $\theta = (\theta_3 \theta_4 \theta_5 \delta_x \delta_y)^T = \mathbf{o}$ ， $\dot{\theta} = (25 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ で，時間刻み幅を 0.1 [msec] にとった四次の Runge-Kutta-Gill 法により計算した．

Fig. 4 (a) は竿を回して，Fig. 4 (b) は竿を一方だけ振動させて皿の運動をシミュレーションしたものである．皿の回転周期は漸近的に竿を振る周期 $\omega = 25$ [rad/sec] に収束していくことが分かる．

Fig. 5 (a) は皿に与える初速度を変化させたものである．初速がある範囲内であれば，皿の運動は竿を振る振動数に引き込まれる．また，Fig. 5 (b) は竿を振る振幅を増加させた場合である．この図から Fig. 5 (a) の場合よりも引き込む範囲が広がっていることが分かる．これは式 (31) の弾性係数が竿を振る振幅・振動数で変化することから，竿を振る振幅を大きく設定しておくと，変動に対し周期解へ引き込む力が増加し，安定化される範囲が広がるためであると考えられる．

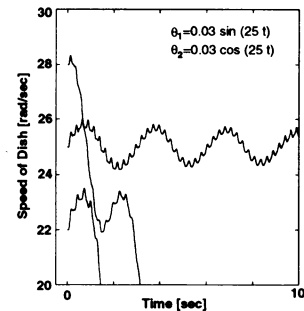


(a)

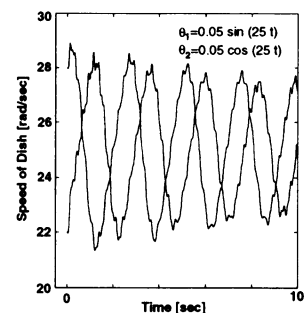


(b)

Fig. 4 Speed of dish



(a)



(b)

Fig. 5 Speed of dish

5. ロボットによる皿まわしの実現

5.1 ロボットの構成

ここでは周期的に竿を振ることにより皿まわしが実現可能かどうか，実際にロボットを使用して検証する．

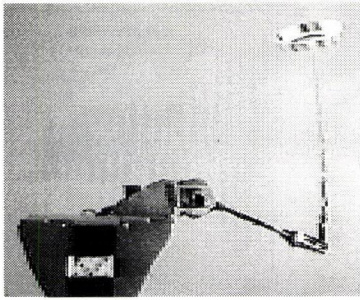


Fig. 6 Robot arm system for dish-spinning trick

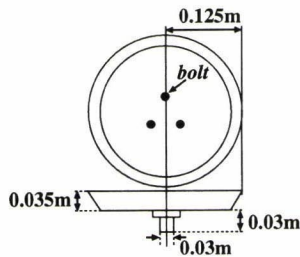


Fig. 7 Figure of dish

実験に使用したロボットアームは Fig. 6 に示す肩部が 2, 肘部 2 の合計 4 自由度のロボットアームで, 各軸にはハーモニックドライブギアを内蔵した DC モータを使用している. 制御器には NEC 社製 PC9801 (数値演算プロセッサ 8027 内蔵) を使い, 制御プロセスは C 言語で記述し, 制御周期は 20 [msec] で行った. 制御器の出力は 12 ビットの D/A 変換器を介して増幅器に送られ, モータが駆動される. アームの角度はモータのロータリーエンコーダの読みをギア比 1:50 で換算した値を採用し, 角速度の観測値にはこの値の制御周期ごとの後退差分値を用いた.

実験ではロボットの肘部に Table 1 に示したパラメータを持つ直径 5 [mm] の丸棒を取り付け, 肘部のモータのみ動かすことにより皿まわしを行った. 取り付けられた棒の先端部は皿の糸底部分を滑らないように削って尖らせてあり, 皿まわしの皿は Fig. 7 に示すプラスチック製の植木鉢の受け皿を用いた. また, この皿の裏面には糸底として直径 3 [cm] の筒が 3 [mm] のボルトで固定してある.

5.2 実験結果

皿を竿の先端に載せて静止した状態から皿を回すアルゴリズムを以下に示す.

$$\begin{aligned}
 &0 \leq t < 10 \text{ [sec]} \\
 &\quad \theta_1 = 0.1 \cos(18.84t) \\
 &\quad \theta_2 = 0.1 \sin(18.84t) \\
 &10 \leq t < 14 \\
 &\quad \theta_1 = 0.06 \cos(18.84t) \\
 &\quad \theta_2 = 0.06 \sin(18.84t) \\
 &14 \leq t \\
 &\quad \theta_1 = 0.04 \cos(18.84t) \\
 &\quad \theta_2 = 0.04 \sin(18.84t)
 \end{aligned} \tag{33}$$

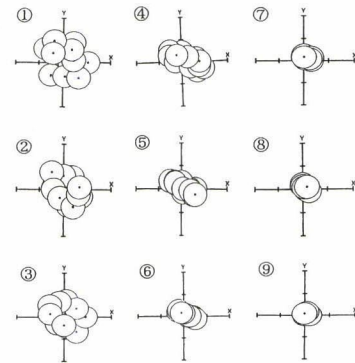


Fig. 8 Position of dish's center

竿を一方だけ動かす場合.

$$\begin{aligned}
 &14 \leq t \\
 &\quad \theta_1 = 0.06 \cos(18.84t)
 \end{aligned} \tag{34}$$

このアルゴリズムでは 3 [Hz] で竿を振り皿を回している. 皿の回し始めは竿を振る振幅を大きくして, 周期解が安定な範囲を広げている. また時間の経過とともに振幅を減少させているのは, 皿の重心移動を小さくするためである.

式 (33) による皿まわしの皿の運動の様子を 8 ミリビデオカメラで撮影し, 2 [sec] ごとの皿の中心運動の様子を皿を真上から見たときの $x-y$ 平面座標系にプロットしたものを Fig. 8 に示す. 皿の中心は, 原点付近に収束していくことが分かる.

6. おわりに

曲芸である皿まわしについて, 竿のたわみも考慮したモデルによりダイナミクスを導出し, その数理解析を行った. 皿まわしが実現できるタイミングとして, 竿を振る振幅, 周期, 位相関係を明らかにし, 安定な皿まわしを実現するには竿のたわみが重要になることを理論的に示した. さらに, 解析により得られた条件をもとにロボットで皿まわしができることを実験により検証した.

人間が皿まわしをする場合, 視覚や手の感覚などから回転している皿の状態量を観測し竿を振る周期や位相関係を決定していると考えられる. ところが, 今回の実験では竿の先端で回転している皿の運動を観測することは難しく, 皿の状態量をフィードバックした制御は実現できなかった. そこで, 竿を振る振幅を増加させると皿の周期運動の安定範囲が広がることに着目し, 皿の回し始めは大きく竿を振り, 竿を振る運動に皿の回転運動を同期させることを試みた. 結果として, 皿まわしは周期的な外力を加えるだけでも簡単に実現できることが明らかになった.

今後は, 回転している皿の運動に合わせてロボットアームを協調動作させる制御方法も検討すべき課題であると考えている.

参考文献

- [1] 梶原, 橋本, 土谷, 松田: “支点が鉛直軸に拘束された倒立振子の制御—動的安定化—”, 第 25 回計測自動制御学会北海道支部学術講演会論文集, pp.27-28, 1994.
- [2] 戸田盛和: おもちゃセミナー・叙情性と科学性への招待. pp.109-113,

日本評論社, 1973.

- [3] 酒井高男: 創る・動くおもちゃ, pp.124-127, 講談社ブルーバックス, 1980.
 [4] 永富勲: 誰にでもできる皿まわし入門, 1976.
 [5] 酒井高男: 遊べる力学, pp.124-127, 工作舎, 1980.
 [6] 丹羽敏雄: 微分方程式と力学系の理論入門, pp.114-117, 遊星社, 1988.
 [7] 小郷寛, 美多勉: システム制御理論入門, pp.71-74, 実教出版, 1979.

A. 一方向に竿を振る場合

A.1 振幅条件

周期入力として次式で竿を振ることを考える.

$$\theta_1 = A \sin(\omega t) \quad (35)$$

皿は竿を振る周期と同期して

$$\theta_3 = \omega t + \phi \quad (36)$$

で回転しているとする.

式(36)を式(15)(16)に代入して得られた周期解は $\omega \gg \omega_k$ のとき次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \delta_x &= \ell_2 \sin(\omega t + \phi) - A \ell_1 \sin(\omega t) \\ \delta_y &= -\ell_2 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (37)$$

式(36)(37)を(21)に代入すると $x_G = y_G \approx 0$ を満たしていることが分かる.

さて, 式(36)(37)を式(14)に代入すると, 解が存在するためには次式が成り立たなくてはならない.

$$\begin{aligned} K \cos(\omega t + \phi) \sin(\omega t) \\ + D \omega \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) = \frac{D \ell_2 \omega}{A \ell_1} \end{aligned} \quad (38)$$

この場合, 任意の時間 t について上式が成立するとは言えない. そこで, 皿の一回転中の平均として成立することを考えてみる.

式(38)を1周期にわたって時間平均を取る(平均を $\langle \rangle$ で表す)と次式が得られる.

$$\langle K \sin \phi - D \omega \cos \phi \rangle = -\frac{2D \ell_2 \omega}{A \ell_1} \quad (39)$$

この式は次式のように変形される.

$$\langle \sin(\phi + \Phi) \rangle = -\frac{2D \ell_2 \omega}{A \ell_1 \sqrt{K^2 + D^2 \omega^2}} \quad (40)$$

ただし,

$$\sin \Phi = -\frac{D \omega}{\sqrt{K^2 + D^2 \omega^2}}, \cos \Phi = \frac{K}{\sqrt{K^2 + D^2 \omega^2}}$$

$|\sin(\phi + \Phi)| \leq 1$ であることから竿を振る振幅の条件として

$$A \geq \frac{2D \ell_2 \omega}{\ell_1 \sqrt{K^2 + D^2 \omega^2}} \quad (41)$$

が得られる.

A.2 安定条件

竿を一方向のみ振ったときの周期解まわりで微小変動に対する変分方程式をつくると次式を得る.

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\theta}_3 &= -\frac{K \ell_2}{I_2} \{ \cos(\omega t + \phi) \Delta \delta_x + \sin(\omega t + \phi) \Delta \delta_y \} \\ &\quad - \frac{D \ell_2}{I_2} \{ \cos(\omega t + \phi) \Delta \dot{\delta}_x + \sin(\omega t + \phi) \Delta \dot{\delta}_y \} \\ &\quad + \frac{\ell_2}{I_2} \{ K \ell_2 - K A \ell_1 \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t) \\ &\quad - D A \ell_1 \omega \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t) \} \Delta \theta_3 \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\delta}_x &= -2\gamma \Delta \dot{\delta}_x - \omega_k^2 \Delta \delta_x - \ell_2 \omega^2 \cos(\omega t + \phi) \Delta \theta_3 \\ &\quad - 2r \omega \sin(\omega t + \phi) \Delta \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\delta}_y &= -2\gamma \Delta \dot{\delta}_y - \omega_k^2 \Delta \delta_y - \ell_2 \omega^2 \sin(\omega t + \phi) \Delta \theta_3 \\ &\quad + 2\ell_2 \omega \cos(\omega t + \phi) \Delta \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (44)$$

式(43)(44)においてゆっくりした $\Delta \theta_3$, $\Delta \dot{\theta}_3$ の変化を無視して積分すると, $\omega \gg \omega_k$ のとき

$$\begin{aligned} \Delta \delta_x &= \ell_2 \cos(\omega t + \phi) \Delta \theta_3 + \frac{2\ell_2}{\omega} \sin(\omega t + \phi) \Delta \dot{\theta}_3 \\ \Delta \delta_y &= \ell_2 \sin(\omega t + \phi) \Delta \theta_3 - \frac{2\ell_2}{\omega} \cos(\omega t + \phi) \Delta \dot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (45)$$

を得る. 式(45)とそれを時間について微分したものを式(42)に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \Delta \ddot{\theta}_3 &= -\frac{3D \ell_2^2}{I_2} \Delta \dot{\theta}_3 - \frac{\ell_2}{I_2} \{ K A \ell_1 \sin(\omega t + \phi) \sin(\omega t) \\ &\quad + D A \ell_1 \omega \sin(\omega t + \phi) \cos(\omega t) \} \Delta \theta_3 \end{aligned} \quad (46)$$

式(46)でゆっくりした $\Delta \theta_1$, $\Delta \dot{\theta}_1$ の運動に着目するために, 速い振動については時間平均をとると次式を得る.

$$\Delta \ddot{\theta}_3 = -\frac{3D \ell_2^2}{I_2} \Delta \dot{\theta}_3 - \frac{\ell_2}{I_2} \left\langle \frac{K A \ell_1}{2} \cos \phi + \frac{D A \ell_1}{2} \omega \sin \phi \right\rangle \Delta \theta_3 \quad (47)$$

よって, 上式から周期解が漸近安定であるためには平均的に次式を満たせばよいことが分かる.

$$\langle K \cos \phi + D \omega \sin \phi \rangle > 0 \quad (48)$$

B. 極座標を利用した皿まわしの運動の安定解析

竿のたわみ部に極座標系を導入して

$$\begin{aligned} \delta_x &= r \cos \Theta \\ \delta_y &= r \sin \Theta \end{aligned} \quad (49)$$

とする. このとき, 定常解を $r = r_e$, $\Theta = \omega t + \sigma$ とすると竿のたわみ部の解の式(23), または式(37)(一方向に竿を振る場合)より次式の関係を得る.

$$\begin{aligned} r_e \cos(\omega t + \sigma) &= \ell_2 \sin(\omega t + \phi) - A \ell_1 \sin(\omega t) \\ r_e \sin(\omega t + \sigma) &= -\ell_2 \cos(\omega t + \phi) + A \ell_1 \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (50)$$

竿を二方向に振る場合は $\alpha = A$

竿を一方向に振る場合は $\alpha = 0$

上式より次式の関係を得る.

$$\begin{aligned} r_e \cos \sigma &= \ell_2 \sin \phi \\ r_e \sin \sigma &= \beta \ell_1 - \ell_2 \cos \phi \end{aligned} \quad (51)$$

竿を二方向に振る場合は $\beta = A$

竿を一方方向に振る場合は $\beta = \frac{A}{2}$

よって, 極座標で表した竿のたわみ部の定常解は次式となる.

$$\begin{aligned} r_e &= \sqrt{\beta^2 \ell_1^2 + \ell_2^2 - \beta \ell_1 \ell_2 \cos \phi} \\ \Theta &= \omega t + \tan^{-1} \left(\frac{\beta \ell_1 - \ell_2 \cos \phi}{\ell_2 \sin \phi} \right) \end{aligned} \quad (52)$$

また, 式 (49) より解のまわりで微小変動が生じた場合

$$\begin{aligned} \delta_x + \Delta \delta_x &= (r + \Delta r) \cos(\Theta + \Delta \Theta) \\ \delta_y + \Delta \delta_y &= (r + \Delta r) \sin(\Theta + \Delta \Theta) \end{aligned} \quad (53)$$

の関係を得る. よって, 解の式 (18)(52) のまわりでの微小変分に対し

$$\begin{aligned} \Delta \delta_x &= \cos(\omega t + \sigma) \Delta r - r_e \sin(\omega t + \sigma) \Delta \Theta \\ \Delta \delta_y &= \sin(\omega t + \sigma) \Delta r + r_e \cos(\omega t + \sigma) \Delta \Theta \end{aligned} \quad (54)$$

が成り立つ.

式 (54) を利用して, 変分方程式 (27)~(29) を変換すると次式を得る.

$$\dot{\theta} = \mathbf{Z} \theta \quad (55)$$

ただし,

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \theta & (\theta_3, \dot{\theta}_3, r, \dot{r}, \Theta, \dot{\Theta})^T \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & z_2 & z_3 & -z_1 & z_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z_5 & z_6 & z_7 & z_8 & z_9 & z_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_7 & z_8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\ell_2}{I_2} (K \ell_2 - K \beta \ell_1 \cos \phi - D \beta \ell_1 \omega \sin \phi) \\ z_2 &= -\frac{\ell_2}{I_2 r_e} (K \beta \ell_1 \sin \phi - D \beta \ell_1 \omega \cos \phi + D \ell_2 \omega) \\ z_3 &= -\frac{D \beta \ell_1 \ell_2}{I_2 r_e} \sin \phi \\ z_4 &= \frac{D \ell_2}{I_2} (\beta \ell_1 \cos \phi - \ell_2) \\ z_5 &= -\frac{\beta \ell_1 \ell_2 \omega^2}{r_e} \sin \phi \\ z_6 &= \frac{2 \ell_2 \omega}{r_e} (\beta \ell_1 \cos \phi - \ell_2) \\ z_7 &= \omega^2 - \omega_k^2 \\ z_8 &= -2\gamma \\ z_9 &= 2\gamma r_e \omega \\ z_{10} &= 2r_e \omega \\ z_{11} &= \frac{\ell_2 \omega^2}{r_e^2} (\beta \ell_1 \cos \phi - \ell_2) \\ z_{12} &= \frac{2\beta \ell_1 \ell_2 \omega}{r_e^2} \sin \phi \\ z_{13} &= -\frac{2\gamma \omega}{r_e} \\ z_{14} &= -\frac{2\omega}{r_e} \end{aligned}$$

実験で使用した Table 1 に示す皿まわりの各パラメータから, 式 (26) より竿を振る振幅を

$$\beta = 0.04$$

式 (24), (32) より位相を

$$\phi = 0.45$$

とする. これらの値をもとに行列 \mathbf{Z} の固有値を求めると

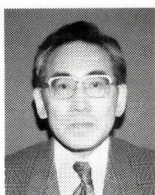
$$-1.9 \pm 26.5i, -2.0 \pm 11.2i, -0.03 \pm 2.1i$$

となり, すべての固有値の実数部が負になることから皿まわりの解はすべて漸近安定であることが分かる.



梶原秀一 (Hidekazu Kajiwara)

1971年1月25日生. 1995年室蘭工業大学博士前期課程電気電子工学専攻修了. 現在釧路工業高等専門学校電子工学科助手. 制御工学, ロボット工学の研究に従事. (日本ロボット学会正会員)



松田敏彦 (Toshihiko Matsuda)

1934年1月20日生. 1956年室蘭工業大学電気工学科卒業. 北海道大学工学部助手, 室蘭工業大学講師, 助教授を経て1978年同大学電気工学科教授. 現在同大学電気電子工学科教授. 工学博士. 電気機器, 電動機制御に関する研究に従事. 電気学会の会員. (日本ロボット学会正会員)



橋本幸男 (Yukio Hashimoto)

1953年3月8日生. 1979年室蘭工業大学大学院修士課程電子工学専攻修了. 高校の非常勤講師等を経て1983年室蘭工業大学電子工学科助手. 1990年より同大学電気電子工学科助手, 現在助教授. 制御工学, メカトロニクスの研究に従事. 工学博士. 計測自動制御学会の会員. (日本ロボット学会正会員)



土谷武士 (Takeshi Tsuchiya)

1941年2月2日生. 1965年北海道大学大学院修士課程電気工学専攻修了. 北海道大学工学部電気工学科講師, 助教授を経て現在教授. 制御工学, ロボット工学, パワーエレクトロニクスなどの研究に従事. 工学博士. 計測自動制御学会, システム制御情報学会, 日本機械学会, 電気学会, 日本ファジィ学会, IEEEの会員. (日本ロボット学会正会員)