室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

電磁波導波路伝搬問題の高精度数値解析法に関する研究

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2016-06-08 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 森田, 好人 メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.15118/00008927

電磁波導波路伝搬問題の高精度数値解析法に関する研究

室蘭工業大学 工学研究科 生産情報システム工学専攻
13092002　　森田 好人
指導教員　長谷川 弘治　教授

平成 27 年 2 月

目次

1 **序論** 1

2 **電磁波導波路伝搬特性の解析法** 3

2.1 まえがき 3

2.2 ハイブリッドトレフツ有限要素法（HTFEM） 4

2.2.1 伝搬方向に一様な導波路のモード解析法の概要 4

2.2.2 トレフツ要素での離散化 5

2.2.3 界分布に対称性の制約を課したトレフツ要素 8

2.2.4 不必要なモードを求解しない場合のトレフツ要素 11

2.3 Multipole method（MM） 13

3 Sakurai-Sugiura **射影法（**SSM**）による非線形固有値問題（**NEP**）の解法** 17

3.1 まえがき 17

3.2 SSM の概略 17

3.3 非ブロック版 SSM の適用例 21

3.3.1 周期構造導波路 21

3.3.2 SSM による求解例 22

3.4 ブロック版 SSM の適用例 32

3.4.1 滑降シンプレックス法（DSM） 32

3.4.2 ホーリーファイバの MM による解析 34

3.5 むすび 37

4 **ハイブリッドトレフツ有限要素解析法と** SSM **による導波路伝搬特性解析** 51

4.1 まえがき 51

4.2 伝搬方向に構造が一様な場合の HTFEM の数値計算例 51

4.2.1 円筒誘電体導波路 52

4.2.2 ホーリーファイバ 60

4.3 求解するモードの界分布を制約する HTFEM の数値計算例 69

4.3.1 1/4 領域での解析 69

4.3.2 不必要なモードを求解しない解析 71

4.4 むすび 72

5 **結論** 86

1　序論

通信需要の増大に伴い，有線通信路の大容量化を目指した研究開発が盛んに行われている．たとえば，基幹有線通信路に利用する光ファイバとして，マルチコアファイバ [1]〜[3]，フォトニック結晶ファイバ [4]〜[8]，ホーリーファイバ [5]〜[14]，ブラッグファイバ [15]〜[20] などの研究開発が行われてきた [21].

光ファイバに代表される有線通信用の導波路の設計では，導波路断面構造（屈折率分布）を適切に構成することで，群遅延分散等の伝送特性を制御する．この断面構造の最適化は，候補とする断面構造ごとに伝送特性を評価し，良好な構造を選択することを繰り返すことで行われる．このため，設計の自動化には，候補とする構造の創出法が重要な技術となっており，最適化法の検討が盛んに行なわれている．また，数値計算を利用した伝送特性の定量的評価が多数回必要であることから，実用的な自動最適化法の開発には，伝送特性の数値計算法の高速化ならびに高精度化が要求されている．伝送特性計算法として，通常，汎用性が高く市販シミュレータでの利用が可能な多項式を補間関数とする有限要素法（Finite Element Method: FEM）[22]〜[27] あるいは有限差分時間領域法が用いられる．どちらの解法も領域型であるため，外部にエネルギーを放射する漏洩モードの伝送特性を計算するためには，完全整合層（Perfectly Matched Layer: PML）[28]〜[35] を用いて閉領域化する必要がある．また，高精度なモード伝搬特性の解析には，数値分散のため，要素あるいは格子に解析領域を十分細分化する必要があり，計算コストが大きくなる欠点がある．

一方，高精度な伝送特性解析法として，波動関数による級数展開を利用する Multipole Method（MM）[36]〜[43] やモード整合法等があるが，複雑な断面構造の解析は容易ではない．たとえば，MM はコアやホールの断面が円や楕円の場合に取扱い形状が制限されており，MM を伝搬特性解析に使用する自動最適設計では寸法最適化に限定される．このように，波動関数展開を利用する算法は，高速性に優れるが汎用性が犠牲となり，さらに最終的に解くべき問題が非線形固有値問題（Nonlinear eigenvalue problem: NEP）となる欠点がある．

多項式補間する汎用性の高い有限要素法と，波動関数展開による高速かつ高精度性を兼備えた方法として，主に回折格子の散乱問題を対象として，ハイブリッドトレフツ有限要素法（Hybrid Trefftz finite element method: HTFEM）[44]〜[56] に基づく解析法が開発されている．この方法は，形状適合性が良い通常要素と，波動方程式の基本解を補間関数とする高精度なトレフツ要素とを併用して要素分割を行うものである．このため，最適化領域のように構造が複雑になる領域に通常要素，他の無限領域，一様領域，円や楕円を含む不均質領域にトレフツ要素を用いて分割することで，FEM の汎用性を損なわずに高精度な解析が可能である．また，通常要素で分割する領域が削減されるため，自動最適設計時の要素分割が容易となる．トレフツ要素を採用することで最終的に解く行列方程式が NEP となる欠点があるが，NEP の高速解法である Sakurai-Sugiura 射影法（Sakurai-Sugiura projection method: SSM）[54]，[55]，[57]〜[85] を使用することでこの欠点を解消できるものと期待されていた．

本論文は，高速な自動最適設計を目的として，電磁波導波路の伝搬特性を高速かつ高精度に解析

する数値解析法の開発に関する研究を取りまとめたものである．数値分散を有するが汎用性に優れた有限要素法と，数値分散が小さいが汎用性に劣る波動関数によるフーリエベッセル展開を併用可能なハイブリッドトレフツ有限要素解析法を新たに開発している．波動関数を用いるため，非線形固有値問題（NEP）に帰着するが，Sakurai-Sugiura 射影法（SSM）を用いることで，指定した範囲内の全伝搬定数を縮退モードも含めて，高速に求解可能であることを初めて示している [54], [57]．なお，SSM を導波路解析の NEP に適用すると，モード数判定基準の設定が困難な場合があることが数値計算により明らかとなった [54]，[57] ため，新たな判定指標を見出して [58]，[86]，この問題点を克服 [58] している．また HTFEM のみならず MM から得られる NEP に縮退固有値用 SSM を適用し，SSM の妥当性，有用性を確認している [43]．さらに，ホーリーファイバを対象として，導波路伝搬特性解析用の HTFEM の開発を行い，導波路断面全体を解析対象とすることで高精度に全伝搬モードの解析が可能であること [59]，界分布に対称条件 [87]，[88] を課すことで解析対象とするモードを制約できること [61] を確認している．

以下に本論文の概要を示す．

第 2 章では，伝搬方向に一様な電磁波導波路伝搬特性解析法の定式化を示す．はじめに，トレフツ要素の補間関数として円筒座標系の変数分離解であるベッセル関数からなる波動関数を用いた HTFEM の定式化を示す．次に，電磁界分布の対称性の制約を課した HTFEM の定式化，求解するモードを制限する HTFEM の定式化を示す．さらに，ホーリーファイバのように円柱状構造から構成した導波路の伝送特性の高精度解析が可能な MM の定式化を示す．

第 3 章では，NEP の SSM による求解法を述べる．はじめに，SSM の定式化と不要解の判別指標を示す．SSM には，縮退固有値の求解が可能なブロック版と，アルゴリズムがより簡単であるが，近接固有値の精度が低下する非ブロック版がある．数値計算例として，はじめに，非ブロック版 SSM により求解可能な NEP に帰着する周期構造導波路の伝搬特性の HTFEM 解析結果を示す．次に，縮退固有値を含めた NEP の求解が必要となる例として，ホーリーファイバの伝搬特性の MM とブロック版 SSM を用いた解析結果を示す．さらに，NEP の行列が特異になる複素伝搬定数を滑降シンプレックス法（Downhill Simplex Method: DSM）[89]〜[91] で探索する場合と SSM で求解した場合とを比較し，SSM の有用性を示す．

第 4 章では，新たに 2 章で定式化を行った HTFEM と SSM による数値計算例を示す．まず，単純な構造である円筒誘電体導波路を対象として，トレフツ要素のみを用いて分割した HTFEM 解析を行い，解析解との比較により本解析法の妥当性を示す．次に，解析対象をホーリーファイバとし，ホールを含んだ円環状の不連続領域をベクトル要素で分割し, それ以外の一様領域をトレフツ要素で分割した HTFEM 解析の結果を示す．この計算結果をベクトル要素を使用した文献値 [5]，[12]，[11]，Multipole Method による文献値 [38]，有限要素シミュレータである COMSOL Multiphysics®(COMSOL) を用いた計算結果と比較して，妥当性，有用性を示す．

第 5 章では，本研究によって得られた結論を述べている．

2　電磁波導波路伝搬特性の解析法

2.1　まえがき

導波モードの数値解析法として汎用性の高い有限要素法（Finite Element Method: FEM）がある．FEM は領域分割型の解析法であるため，解析領域を有限としなければならず，無限領域を解析する場合に何らかの工夫が必要となる．この工夫のひとつが，電磁波が伝搬するにつれ減衰する仮想材料を充填した完全整合層（Perfectly Matched Layer: PML）[28]〜[35] を装荷することで解析領域を有限化する方法である．界分布を調べる有限領域と無限領域を模擬する PML との境界で無反射となるように，PML 材料の減衰パラメータ，PML 層厚みや設置位置などを問題毎に調整決定する必要がある．また，PML 領域を有限要素分割するため，吸収境界条件などのインピーダンス条件と比べ，最終的に解く行列方程式の次元数が増大する．

いま一つの工夫として，無限領域用の特殊な要素を用いる方法がある．その一つとして，系の支配方程式を満足する関数を補間関数とするトレフツ要素を利用するハイブリッドトレフツ有限要素法（Hybrid Trefftz Finite Element Method: HTFEM）[44]〜[56] がある．

トレフツ要素は，無限領域の汎関数を接続境界上の節点間の行列関係式で与えるので，PML が無限領域を要素分割するのに比べ，最終的に解く行列固有値問題の次元数を小さくでき，支配方程式を満足する関数で補間するので PML 内の多項式補間に比べ数値分散が小さくなることが期待できる．しかしながら，PML を使用した場合のように，各種の効率的解法が利用可能な一般化線形固有値問題に帰着せず，正則な行列関数の非線形固有値問題となる．これまでは，周期構造導波路を解析対象として，非線形固有値問題の解法は行列の条件数が発散する周波数と伝搬定数の組を探索するものであった．

マルチコア光ファイバ，フォトニック結晶ファイバような縮退モードを有する伝搬問題へ適用するためには，無限領域用の波動関数を，電磁波の伝搬方向に周期性を有する空間高調波から，導波路の横断面内で周期性を有する波動関数へ変更する必要がある．

また，対称モードあるいは反対称モードのように特定のモードのみを解析するには，電磁界分布に対称性の制約を課す必要がある．また HTFEM は，空隙部分を含む円環領域を通常のベクトル要素で分割するため，円柱列がコア部を何重にも取り囲むフォトニック結晶ファイバのように空隙部分が広い場合には，全断面構造を解析するよりも界分布の対称性を利用して解析領域を縮小し，計算時間を短縮することが望ましいと考えられる．

本章では，本論文で用いた導波路解析法の定式化を説明する．

2.2 節では，伝搬方向に一様な電磁波導波路伝搬特性の解析のための，新たな HTFEM 解析法の定式化を示す．まず, トレフツ要素の補間関数として円筒座標系の変数分離解であるベッセル関数からなる波動関数を用いた定式化を示す．次に，電磁界分布の対称性の制約を課した HTFEM の定式化と求解不要なモードを抑制する HTFEM の定式化を示す．

さらに，2.3 節では，ホーリーファイバ等の解析に有用な方法であるが, フーリエベッセル展開を

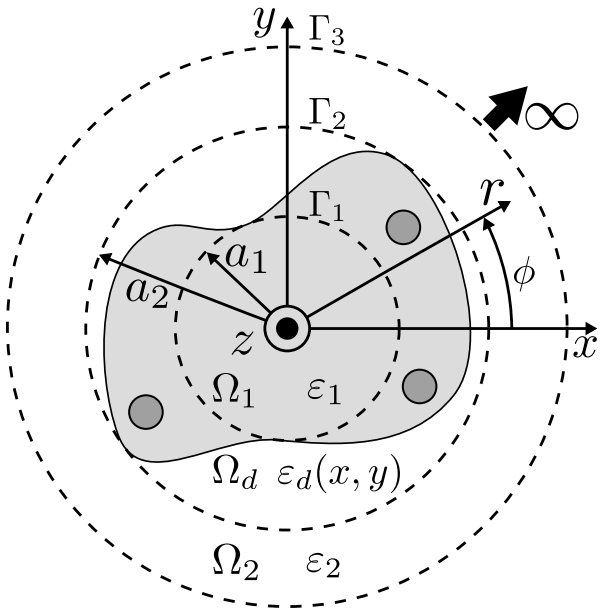


図 2.1　誘電体導波路の断面図

利用するために非線形固有値問題に帰着する Multipole method(MM) の定式化の概略を示す.

2.2　ハイブリッドトレフツ有限要素法（HTFEM）

2.2.1　伝搬方向に一様な導波路のモード解析法の概要

図 2.1 に示す断面構造を有し，導波方向の z 軸方向に一様で無限に長い誘電体導波路を考える．全領域を誘電体とし，比透磁率を 1 とする．円筒座標系 (r, ϕ, z) を用いて，一様有限領域 $\Omega_1(0 \leq r \leq a_1)$，コア，ホールなどの構造を断面に含む不連続領域 $\Omega_d(a_1 \leq r \leq a_2)$，一様半無限領域 $\Omega_2(a_2 \leq r)$ に三分割する．領域 $\Omega_i(i = 1, 2)$ は，比誘電率が ε_i の一様均質な誘電体，領域 Ω_d は比誘電率が位置の関数 $\varepsilon_d(x, y)$ の誘電体である．構造の z 軸方向一様性から，被導波の複素伝搬定数を γ，角周波数を ω とすると，界の z 軸方向依存性は，$\exp\{j(\omega t - \gamma z)\}$ となる．ここに，j は虚数単位である．このため，導波路断面の二次元領域の電磁界分布に HTFEM を適用することで，複素伝搬定数を固有値，電界分布を固有ベクトルとする行列方程式を得るので，この方程式をブロック版 SSM で解くことでモード解析ができる．要素分割は，不連続領域 $\Omega_d(a_1 \leq r \leq a_2)$ にベクトル要素を，一様な領域 $\Omega_1(0 \leq r \leq a_1)$，$\Omega_2(a_2 \leq r)$ にトレフツ要素を用いる．ベクトル要素は，伝搬定数の有限要素解析に用いる図 2.2 に示す通常のベクトル要素を用いるため，本章では説明を省略する．

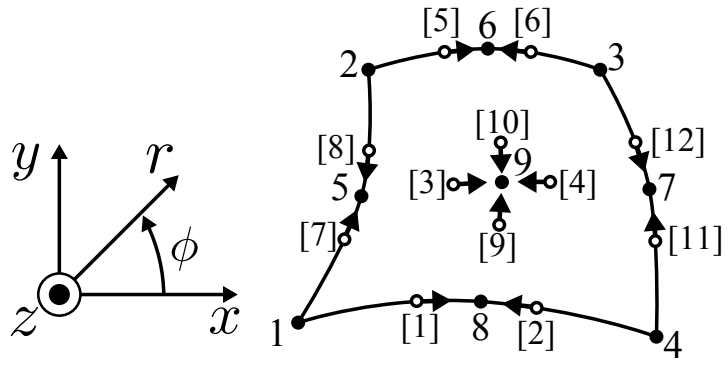


図 2.2　9 節点 12 辺アイソパラメトリック要素

2.2.2　トレフツ要素での離散化

図 2.1 に示す一様な領域 $\Omega_i (i=1,2)$ の汎関数 I_i は

$$
\begin{aligned}
I_i = & \frac{1}{2u_i}\int_{\Gamma_i}\left[\hat{n}\cdot(\nabla\times\vec{\Phi}\times\vec{\Phi}^t+\nabla\times\vec{\Phi}^t\times\vec{\Phi})\right]ds \\
& -\frac{1}{u_i}\int_{\Gamma_i}\left[\hat{n}\cdot(\nabla\times\vec{\Phi}\times\vec{\tilde{\Phi}}^t+\nabla\times\vec{\Phi}^t\times\vec{\tilde{\Phi}})\right]ds
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

である．ここで，$\hat{n}$ は線積分素 ds の外向き法線ベクトルであり，円筒座標系の動径方向 r の単位ベクトル $\hat{r}$ を用いると I_1，I_2 でそれぞれ $\hat{r}$，$-\hat{r}$ となる．また，上添字 t はトランスポーズ界 [92] を表し，$\vec{\Phi}, \vec{\tilde{\Phi}}, u_i$ は

$$
\vec{\Phi}=\begin{cases}\vec{E}\\ \vec{H}\end{cases},\vec{\tilde{\Phi}}=\begin{cases}\vec{\tilde{E}}\\ \vec{\tilde{H}}\end{cases},u_i=\begin{cases}1 & \begin{cases}\text{for} & \text{e-form}\\ \text{for} & \text{h-form}\end{cases}\\ \varepsilon_i & \end{cases}
\tag{2.2}
$$

である．ここに $\vec{E}$ は電界ベクトル，$\vec{H}$ は磁界ベクトル，$\vec{\tilde{E}}, \vec{\tilde{H}}$ は連続条件を緩和する境界 Γ_1, Γ_3 上の電界ベクトル，磁界ベクトルであり，上段と下段は，それぞれ，ベクトル有限要素の汎関数として電界ベクトル (e-form)，磁界ベクトル (h-form) を用いる場合に対応するトレフツ要素の汎関数表示である．

電磁界の断面内成分は，伝搬方向成分 $\hat{z}\cdot\vec{\tilde{E}}$，$\hat{z}\cdot\vec{\tilde{H}}$ を用いて表現できるので，トレフツ要素内の界分布 $\vec{\Phi}$ をこの 2 成分 $\hat{z}\cdot\vec{\tilde{E}}$，$\hat{z}\cdot\vec{\tilde{H}}$ の波動関数を用いて近似して汎関数を評価する．ここに，$\hat{z}$ は z 軸方向の単位ベクトルである．

真空中の波数を k_0 とする円筒座標系の波動方程式

$$
\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+(k_0^2u_iv_i-\gamma^2)\right]\begin{pmatrix}\Phi_z\\ \Psi_z\end{pmatrix}=0,\quad v_i=\begin{cases}\varepsilon_i & \text{for} \quad \text{e-form}\\ 1 & \text{for} \quad \text{h-form}\end{cases}
\tag{2.3}
$$

を満足する波動関数を用いて, 領域 $\Omega_i (i=1,2)$ 内の電磁界の伝搬方向成分 $\Phi_z=\hat{z}\cdot\vec{\Phi}$ と $\Psi_z=\hat{z}\cdot\vec{\Psi}$

を

$$\Phi_{z,i} = \sum_{n=-M_c}^{M_c} A_{n,i} F_{n,i}(\kappa_i r) \exp(jn\phi) \exp(-j\gamma z), \tag{2.4}$$

$$\Psi_{z,i} = \sum_{n=-M_c}^{M_c} B_{n,i} F_{n,i}(\kappa_i r) \exp(jn\phi) \exp(-j\gamma z) \tag{2.5}$$

と空間高調波展開する．ここに，$\vec{\Psi}$ は e-form では $\vec{H}$，h-form では $-\vec{E}$，M_c は展開の打ち切り項数，$A_{n,i}, B_{n,i}$ は展開係数である．$F_{n,i}(\kappa_i r)$ は領域 Ω_1 では n 次の第一種ベッセル関数 J_n，領域 Ω_2 では n 次の第二種変形ベッセル関数 K_n である．κ_i は領域 Ω_i の断面内波数で領域 Ω_1, Ω_2 でそれぞれ

$$\kappa_1 = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_1 - \gamma^2}, \tag{2.6}$$

$$\kappa_2 = \sqrt{\gamma^2 - k_0^2 \varepsilon_2} \tag{2.7}$$

である．$\vec{\Phi}$ の r 成分と ϕ 成分は Φ_z と Ψ_z を用いて

$$\Phi_r = \frac{j}{k_0^2 u_i v_i - \gamma^2} \left(\frac{k_0 v_i w}{r} \frac{\partial \Psi_z}{\partial \phi} - \gamma \frac{\partial \Phi_z}{\partial r} \right), \tag{2.8}$$

$$\Phi_\phi = \frac{-j}{k_0^2 u_i v_i - \gamma^2} \left(k_0 v_i w \frac{\partial \Psi_z}{\partial r} - \frac{\gamma}{r} \frac{\partial \Phi_z}{\partial \phi} \right) \tag{2.9}$$

と表せる．ここに，v_i と w は，それぞれ，e-form では ε_i と η_0，h-form では 1 と $1/\eta_0$ であり，η_0 は真空の固有インピーダンスである．

図 2.3 に示す 3 節点 2 辺線要素を用いてトレフツ要素の境界 Γ_i をベクトル要素に分割する．境界 Γ_i が円弧なので，Γ_i 上の界ベクトル $\vec{\tilde{\Phi}}$ は辺上での Φ_ϕ 成分と節点上での Φ_z 成分の 2 成分であり，

$$\tilde{\Phi}_\phi = \{V\}^T \{\tilde{\Phi}_\phi\}_e, \tag{2.10}$$

$$\tilde{\Phi}_z = \{N\}^T \{\tilde{\Phi}_z\}_e \tag{2.11}$$

と多項式補間できる．ここに，$\{V\}$，$\{N\}$ は ϕ，z 成分の多項式補間関数からなる列ベクトルであり，$\{\tilde{\Phi}_\phi\}_e$，$\{\tilde{\Phi}_z\}_e$ はそれぞれ界ベクトルの ϕ，z 成分からなる列ベクトルである．上添字 T は転置をとることを表す．

式 (2.1) に式 (2.4)，(2.5)，(2.8)〜(2.11) を代入すると，離散化した汎関数 I_i は

$$I_i = \{D_i^t\}^T [G_i] \{D_i\} + \{\tilde{\Phi}_i^t\}^T [L_i] \{D_i\} + \{D_i^t\}^T [L_i^t] \{\tilde{\Phi}_i\} \tag{2.12}$$

となる．ここに，$\{D_i\}$ は展開係数を要素とする列ベクトル $\{A_{n,i}\}$，$\{B_{n,i}\}$ からなる列ベクトル

$$\{D_i\} = \left[\{A_{n,i}\}^T \quad \{B_{n,i}\}^T \right]^T \tag{2.13}$$

である．$\{\tilde{\Phi}_i\}$ は Γ_i 上の離散点上の全未知電界もしくは磁界からなる列ベクトルである．また，

$$[G_i] = \begin{bmatrix} [G_{AA,i}] & [0] \\ [0] & [G_{BB,i}] \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

$$[L_i] = \begin{bmatrix} [0] & [L_{B\phi,i}] \\ [L_{Az,i}] & [L_{Bz,i}] \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

$$[L_i^t] = \begin{bmatrix} [0] & [L_{Az,i}^t] \\ [L_{B\phi,i}^t] & [L_{Bz,i}^t] \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

である．$[G_i]$ の各小行列は対角行列であり，その (j,j) 成分は，

$$G_{AA,i(j,j)} = \frac{2\pi a_i u_i k_0^2}{\kappa_i} F_{n,i}^t(\kappa_i a_i) F'_{n,i}(\kappa_i a_i), \tag{2.17}$$

$$G_{BB,i(j,j)} = -\frac{2\pi a_i v_i k_0^2}{\eta_0^2 \kappa_i} F_{n,i}^t(\kappa_i a_i) F'_{n,i}(\kappa_i a_i) \tag{2.18}$$

である．ここに，$n = -(M_{\mathrm{c}} - j + 1)$ であり，$F'_{n,i}(\kappa_i a_i)$ は $F_{n,i}(\kappa_i a_i)$ の $(\kappa_i a_i)$ に関する偏導関数である．$[L_i]$ の各小行列は

$$[L_{B\phi,i}] = \int_{\Gamma_i} \{V\}\{\xi_{n,i}\} ds, \tag{2.19}$$

$$[L_{Az,i}] = \int_{\Gamma_i} \{N\}\{\eta_{n,i}\} ds, \tag{2.20}$$

$$[L_{Bz,i}] = \int_{\Gamma_i} \{N\}\{\zeta_{n,i}\} ds \tag{2.21}$$

であり，$\xi_{n,i}$，$\eta_{n,i}$，$\zeta_{n,i}$ は

$$\xi_{n,i} = -jk_0 s_i w F_{n,i}(\kappa_i r) \exp(jn\phi), \tag{2.22}$$

$$\eta_{n,i} = \frac{k_0^2 u_i}{\kappa_i} F'_{n,i}(\kappa_i r) \exp(jn\phi), \tag{2.23}$$

$$\zeta_{n,i} = -\frac{jk_0 \gamma n w}{\kappa_i^2 r} F_{n,i}(\kappa_i r) \exp(jn\phi) \tag{2.24}$$

である．式 (2.22) 内の s_i は領域 Ω_1 の場合 1，領域 Ω_2 の場合 -1 である．なお，式 (2.16) は式 (2.15) のトランスポーズ界に対応するものである．

式 (2.12) は $\{D_i\}$，$\{D_i^t\}$，$\{\tilde{\Phi}_i\}$，$\{\tilde{\Phi}_i^t\}$ が未知量であることに注意して，はじめに $\{D_i\}$，$\{D_i^t\}$ について変分を取り，得られた関係式を用いると式 (2.12) は

$$I_i = \{\tilde{\Phi}_i^t\}^T [L_i][G_i]^{-1}[L_i^t]\{\tilde{\Phi}_i\} \tag{2.25}$$

となる．最後に $\{\tilde{\Phi}_i^t\}$ について変分を取ると，最終的な全体行列方程式への領域 Ω_i からの寄与分

$$[L_i][G_i]^{-1}[L_i^t]\{\tilde{\Phi}_i\} = \{0\} \tag{2.26}$$

を得る．

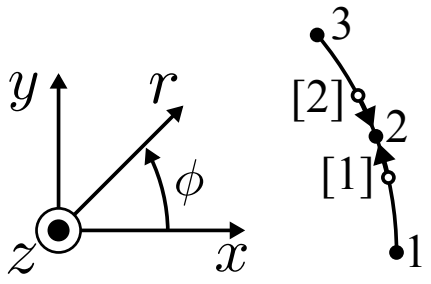


図 2.3　3 節点 2 辺線要素

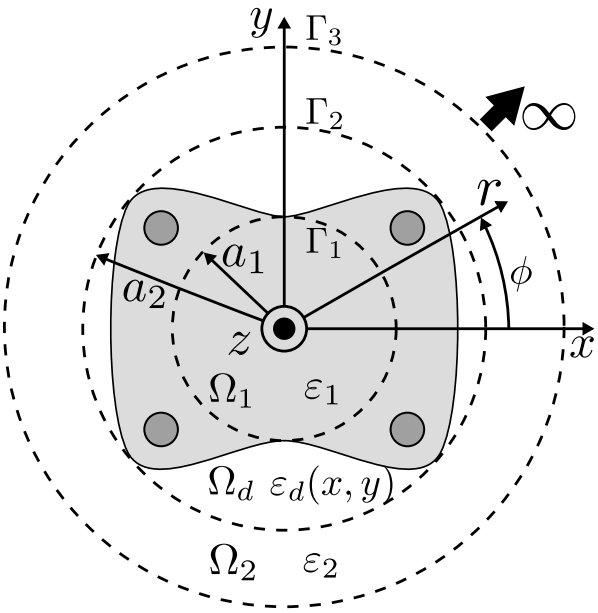


図 2.4　誘電体導波路の断面図

2.2.3　界分布に対称性の制約を課したトレフツ要素

図 2.4 に示すような断面構造に対称面（$x = 0$ と $y = 0$ の 2 面）を有し，導波方向の z 軸方向に一様で無限に長い誘電体導波路を考える．全領域を誘電体とし，比透磁率を 1 とする．電磁界分布は，不連続領域 $\Omega_d(a_1 \leq r \leq a_2)$ では界の対称性から 1/4 断面（$0 \leq \phi \leq \pi/2$）を図 2.2 に示すベクトル要素で近似し，一様な領域 $\Omega_1(0 \leq r \leq a_1)$，$\Omega_2(a_2 \leq r)$ では全域を界の対称性の制約を課したトレフツ要素で近似する．ベクトル要素を用いた 1/4 断面構造の有限要素定式化は，良く知られている [4],[12] ので本節では省略する．以下に，実際の計算で多く使用される e-form の場合での，界分布の対称性の制約を課したトレフツ要素を説明する．

汎関数の式 (2.1) を界分布の対称性の制約を課して 1/4 断面領域に適用することが考えられるが，積分路が円とはならない．本節では，簡単化のため，トレフツ要素境界は 1/4 断面のみ離散化

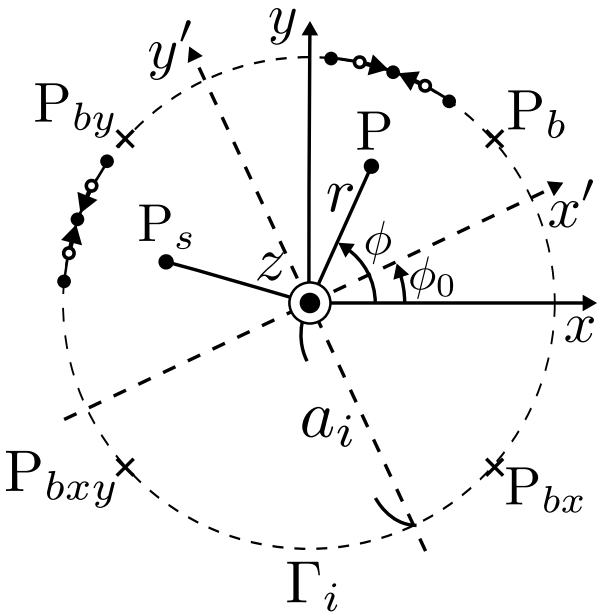


図 2.5　線要素と対称面 y'-z

するが，汎関数は一様領域全体に渡って評価する．このため，界の対称性を利用してトレフツ要素境界の円周 Γ_i 上の電界分布を不連続領域境界上の 1/4 円上の電界分布により表す必要がある．また対称性の制約を界分布に課すため，トレフツ要素内部の補間関数の構成には対称条件を満足する波動関数のみを用いる．

はじめに，1/4 円上の離散化電界 $\{\tilde{E}_{\phi,is}\}$，$\{\tilde{E}_{z,is}\}$ と境界 Γ_i の円周上の離散化電界の対応関係 $\{\tilde{E}_{\phi,i}\}$，$\{\tilde{E}_{z,i}\}$ を示す．図 2.5 に示すような境界 Γ_i の分割を考える．簡単化のため，ある要素と，それと対称な位置の要素の 2 つの要素のみ示している．ここに y' 軸と z 軸を含む平面が鏡映操作の鉛直面であり，$x = 0$ 面では $\phi_0 = 0$，$y = 0$ 面では $\phi_0 = \pi/2$ である．この鉛直面による鏡映操作を，本章で考えている $C_{2\mathrm{v}}$ 対称性を有する電界ベクトルに施すと，点 $\mathrm{P}(r, \phi)$ と対称な位置の点 $\mathrm{P}_s(r, \pi + 2\phi_0 - \phi)$ における電界ベクトルの z，ϕ 成分間には，

$$E_\phi(r, \pi + 2\phi_0 - \phi) = S_n E_\phi(r, \phi), \tag{2.27}$$
$$E_z(r, \pi + 2\phi_0 - \phi) = S_p E_z(r, \phi) \tag{2.28}$$

が成立する．ここに S_n，S_p は界分布が対称の場合に，それぞれ，-1，1 であり，反対称では 1，-1 とする．

円周 $r = a_i$ を構成する全要素について，円弧 $(r = a_i, 0 \leq \phi \leq \pi/2)$，$(r = a_i, \pi/2 \leq \phi \leq \pi)$，$(r = a_i, -\pi \leq \phi \leq -\pi/2)$，$(r = a_i, -\pi/2 \leq \phi \leq 0)$ 上の辺と節点に，それぞれ恒等 e，鏡映 M_y，$M_x M_y$，M_x の対称操作を施して円弧 $(r = a_i, 0 \leq \phi \leq \pi/2)$ 上の辺と節点に対応づけると，式 (2.12) に含まれる円周 Γ_i 上の離散化電界 $\{\tilde{E}_i\}$，$\{\tilde{E}_i^t\}$ は実際に分割する 1/4 円上の離散化電界

表 2.1　対称と反対称界の A_n，B_n の制限

Symmetric plane		$i=1$		$i=2$	
$y=0$	$x=0$	n: even	n: odd	n: even	n: odd
S	S	$A_n=A_{-n}$ $B_n=-B_{-n}$	$A_n=0$ $B_n=0$	$A_n=A_{-n}$ $B_n=-B_{-n}$	$A_n=0$ $B_n=0$
S	A	$A_n=0$ $B_n=0$	$A_n=-A_{-n}$ $B_n=B_{-n}$	$A_n=0$ $B_n=0$	$A_n=A_{-n}$ $B_n=-B_{-n}$
A	S	$A_n=0$ $B_n=0$	$A_n=A_{-n}$ $B_n=-B_{-n}$	$A_n=0$ $B_n=0$	$A_n=-A_{-n}$ $B_n=B_{-n}$
A	A	$A_n=-A_{-n}$ $B_n=B_{-n}$	$A_n=0$ $B_n=0$	$A_n=-A_{-n}$ $B_n=B_{-n}$	$A_n=0$ $B_n=0$

S: symmetric fields, A: antisymmetric fields

$\{\tilde{E}_{is}\}$，$\{\tilde{E}^t_{is}\}$ を用いて

$$\{\tilde{E}_i\} = [E_p]\{\tilde{E}_{is}\}, \tag{2.29}$$

$$\{\tilde{E}^t_i\} = [E^t_p]\{\tilde{E}^t_{is}\} \tag{2.30}$$

と表現できる．ここに，M_i は iz 面 $(i=x,y)$ による鏡映操作を表す．また行列 $[E_p]$，$[E^t_p]$ は，電界ベクトルの対称操作の行列表現からなり，要素の値は 1，0，-1 のいずれかである．

次にトレフツ要素の補間関数の制約を考える．領域 $\Omega_i(i=1,2)$ における電界の ϕ 成分の補間関数は，電磁界の z 成分 $E_{z,i}$，$H_{z,i}$ の補間関数から構成するので，ここでは $E_{z,i}$ の補間関数に課される制約を考える．境界 Γ_i である円周上の 2 点に式 (2.28) を適用し，空間高調波展開の式 (2.5) を代入すると，

$$\begin{aligned}&\sum_{m=-M_c}^{M_c} A_{m,i}F_{m,i}(\kappa_i a_i)\exp(jm(\pi+2\phi_0-\phi))\\ &= S_p\sum_{m=-M_c}^{M_c} A_{m,i}F_{m,i}(\kappa_i a_i)\exp(jm\phi)\end{aligned} \tag{2.31}$$

である．式 (2.31) は任意の ϕ について成立するので，両辺に $\exp(-jn\phi)$ を掛けて ϕ について円周 Γ_i（$r=a_i$）上で積分すると，

$$A_{-n,i}F_{-n,i}(\kappa_i a_i)\exp\{-jn(\pi+2\phi_0)\} = S_p A_{n,i}F_{n,i}(\kappa_i a_i) \tag{2.32}$$

を得る．同様に $H_{z,i}$ の展開係数の関係式を得ることができるので，ここでは省略する．

鉛直な鏡映面を $y=0$ 面 $(\phi_0=\pi/2)$，$x=0$ 面 $(\phi_0=0)$ とすると，$A_{n,i}$，$B_{n,i}$ に課すべき制約は表 2.1 となる．

この表から，$A_{n,i}$，$B_{n,i}$ をそれぞれ $A_{-n,i}$，$B_{-n,i}$ で表すと，離散化した汎関数の式 (2.12) に含まれる空間高調波の展開係数 $\{D_i\}$，$\{D^t_i\}$ は, $\{D_i\}$，$\{D^t_i\}$ から全ての $A_{n,i}$，$B_{n,i}$，$A^t_{n,i}$，$B^t_{n,i}$ を

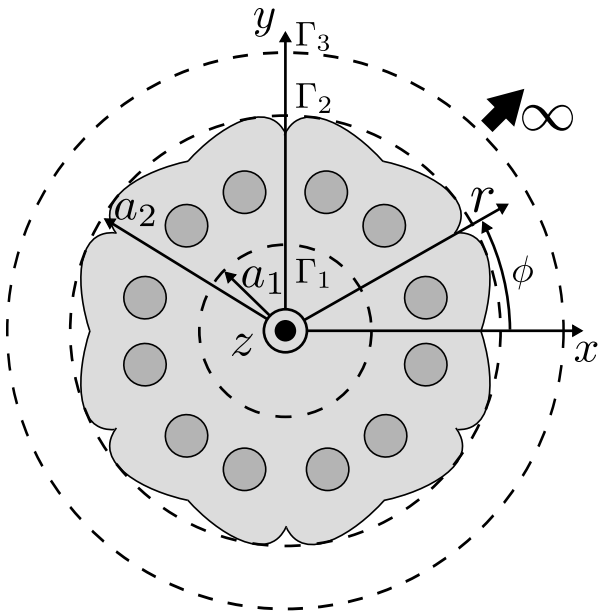


図 2.6　誘電体導波路の断面図（対称面 $\phi = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6$）

取除いた $\{\bar{D}_i\}$，$\{\bar{D}_i^t\}$ を用いて，線形関係式

$$\{D_i\} = [D_p]\{\bar{D}_i\}, \tag{2.33}$$

$$\{D_i^t\} = [D_p^t]\{\bar{D}_i^t\} \tag{2.34}$$

で表される．

結局，対称条件を課した離散化汎関数 I_{is} が

$$\begin{aligned} I_{is} = &\{\bar{D}_i^t\}^T[D_p^t]^T[G_i][D_p]\{\bar{D}_i\} + \{\tilde{E}_{is}^t\}^T[E_p^t]^T[L_i][D_p]\{\bar{D}_i\} \\ &+ \{\bar{D}_i^t\}^T[D_p^t]^T[L_i^t][E_p]\{\tilde{E}_{is}\} \end{aligned} \tag{2.35}$$

と求まるので，$\{\bar{D}_i^t\}$，$\{\tilde{E}_{is}^t\}$ について変分をとるとトレフツ要素の行列方程式を得る．

2.2.4　不必要なモードを求解しない場合のトレフツ要素

不必要なモードを求解しないようにするには，トレフツ要素の補間関数からその不必要な対称，反対称モードの $A_{n,i}$，$B_{n,i}$ に対応する係数を取り除けば良い．本節では，図 2.6 に示すような断面構造に対称面（$\phi = 0,\ \pi/6,\ \pi/3,\ \pi/2,\ 2\pi/3,\ 5\pi/6$ の 6 面）を有する場合を考える．対称面が $x = 0, y = 0$ の場合から，対称面が $\phi = 0,\ \pi/6,\ \pi/3,\ \pi/2,\ 2\pi/3,\ 5\pi/6$ の場合の対称，反対称モードの解を除いて求解する場合の $A_{n,i}$，$B_{n,i}$ の制限を具体的に示す．対称面が $\phi = 0,\ \pi/6,\ \pi/3,\ \pi/2,\ 2\pi/3,\ 5\pi/6$ の場合の A_n，B_n の制限は，前節と同様の手続きで得ることができ，$A_{n,i}$，$B_{n,i}$ に課すべき制約は表 2.2(a) となる．このため，表 2.1 から表 2.2(a) の制限を取り除くと表 2.2(b) となる．この制限の式を用いて行列方程式を構成することで，不必要なモードを求解せずに，特定のモードを解くことが可能となる．

表 2.2　対称と反対称界の A_n，B_n の制限

(a) 対称面 $\phi = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6$

Symmetric plane		$i=1$		$i=2$	
$y=0(\phi=0)$	$\phi=\pi/6$	$n=6m$	$n\neq 6m$	$n=6m$	$n\neq 6m$
S	S	$A_n = A_{-n}$ $B_n = -B_{-n}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$	$A_n = A_{-n}$ $B_n = -B_{-n}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$
S	A	$A_{n+3} = -A_{-(n+3)}$ $B_{n+3} = B_{-(n+3)}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$	$A_{n+3} = A_{-(n+3)}$ $B_{n+3} = -B_{-(n+3)}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$
A	S	$A_{n+3} = A_{-(n+3)}$ $B_{n+3} = -B_{-(n+3)}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$	$A_{n+3} = -A_{-(n+3)}$ $B_{n+3} = B_{-(n+3)}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$
A	A	$A_n = -A_{-n}$ $B_n = B_{-n}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$	$A_n = -A_{-n}$ $B_n = B_{-n}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$

S: symmetric fields, A: antisymmetric fields, m: an integer

(b) 対称面 $y = 0$,$x = 0$（対称面 $\phi = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6$ の解を除く）

Symmetric plane		$i=1$		$i=2$	
$y=0$	$x=0$	$n=2m$ and $n\neq 6m$	$n\neq 2m$ or $n=6m$	$n=2m$ and $n\neq 6m$	$n\neq 2m$ or $n=6m$
S	S	$A_n = A_{-n}$ $B_n = -B_{-n}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$	$A_n = A_{-n}$ $B_n = -B_{-n}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$
S	A	$A_{n+3} = -A_{-(n+3)}$ $B_{n+3} = B_{-(n+3)}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$	$A_{n+3} = A_{-(n+3)}$ $B_{n+3} = -B_{-(n+3)}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$
A	S	$A_{n+3} = A_{-(n+3)}$ $B_{n+3} = -B_{-(n+3)}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$	$A_{n+3} = -A_{-(n+3)}$ $B_{n+3} = B_{-(n+3)}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$
A	A	$A_n = -A_{-n}$ $B_n = B_{-n}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$	$A_n = -A_{-n}$ $B_n = B_{-n}$	$A_n = 0$ $B_n = 0$

S: symmetric fields, A: antisymmetric fields, m: an integer

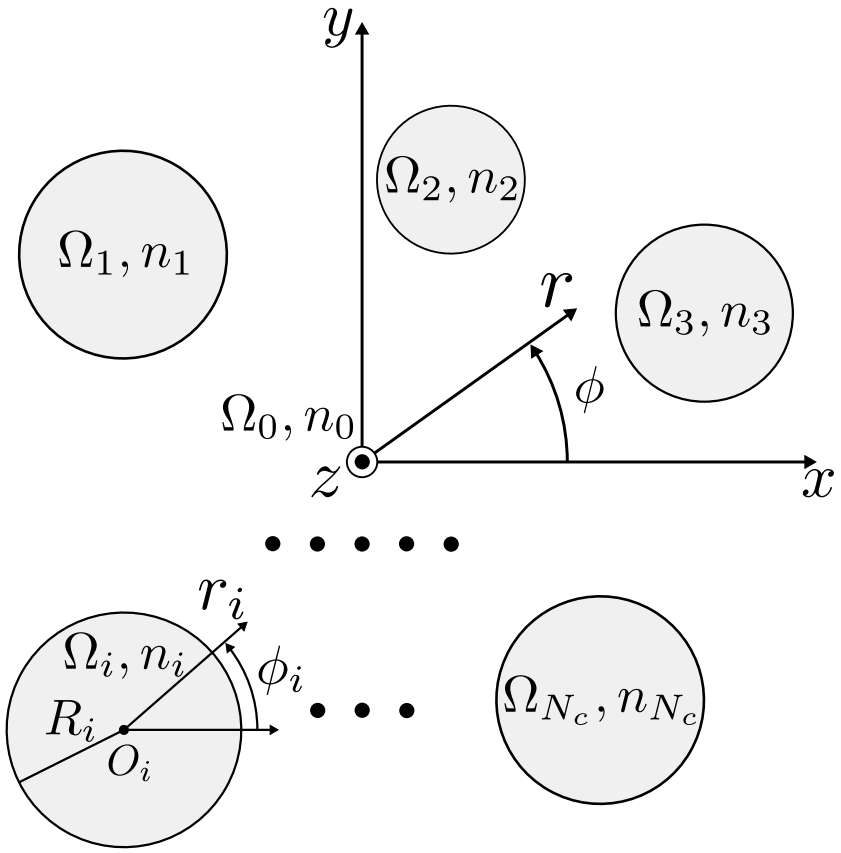


図 2.7　誘電体導波路の断面図

2.3　Multipole method（MM）

図 2.7 に示すように半径 $R_i(i = 1, \cdots, N_c)$ である N_c 本のポールを有し，z 軸方向に一様で無限に長い誘電体導波路を考える．全体座標系を円筒座標系 (r, ϕ, z) とし, 各ポールの中心を原点 O_i とする局所座標系を円筒座標系 (r_i, ϕ_i, z) とする．各ポールの内部領域 $r_i < R_i$ を $\Omega_i(i = 1, \cdots, N_c)$ とし，その他の領域を Ω_0 とする．各領域は一様均質な誘電体とし，その屈折率を n_i とする．構造の z 軸方向一様性から被導波の複素伝搬定数を γ，角周波数を ω とすると，電磁界は $\exp\{j(\omega t - \gamma z)\}$ の依存性を持つ．ここに，j は虚数単位，t は時刻である．

電磁界の x, y 成分は電界の z 成分 E_z と，磁界の z 成分 H_z と真空中の特性インピーダンス η_0 の積 $K_z(= \eta_0 H_z)$ を用いて表現できるので，真空中の波数を k_0 とする局所円筒座標系の波動方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i}\frac{\partial}{\partial r_i} + \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi_i^2} + k_0^2 n_i'^2 - \gamma^2\right)\begin{pmatrix} E_z \\ K_z \end{pmatrix} = 0 \tag{2.36}$$

を満足するように, E_z と K_z を空間高調波展開する．図 2.8 に示すような $R_i < r_i < \min_{i \neq l}\{r_i^l - R_l\}$

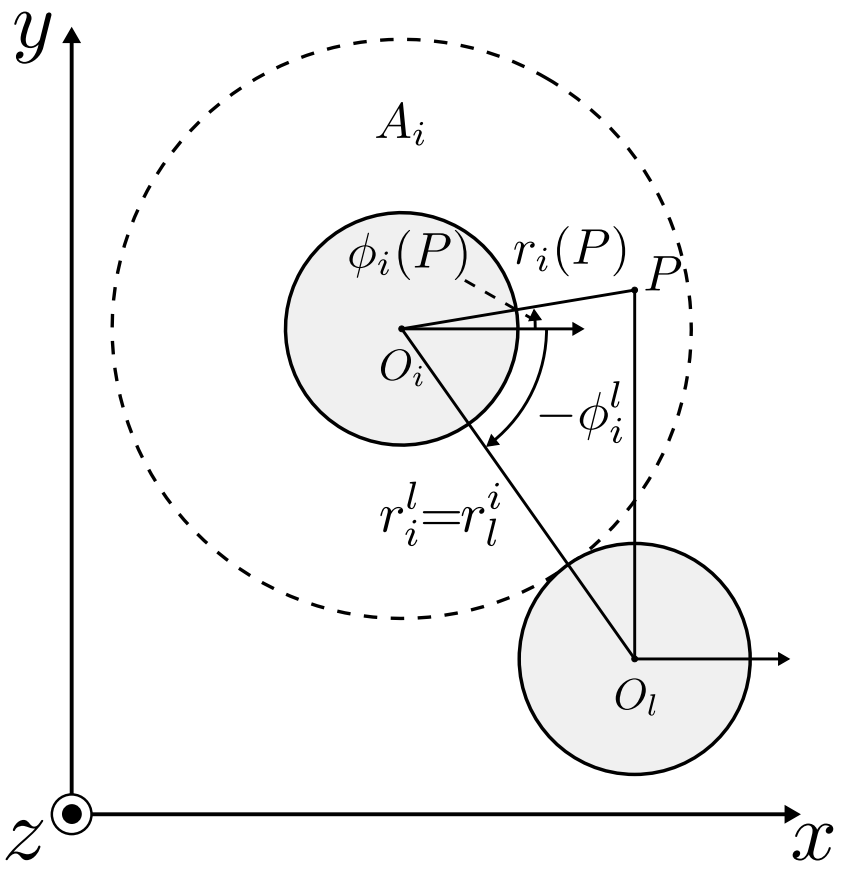


図 2.8　i 番目と l 番目のポールの断面図

である円環状の領域 A_i では，屈折率 $n_i' = n_0$ だから

$$\Phi_z(r_i, \phi_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{\Phi,i,m} J_m(\kappa_0 r_i) \exp(jm\phi_i) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{\Phi,i,m} H_m^{(2)}(\kappa_0 r_i) \exp(jm\phi_i) \tag{2.37}$$

となり，$r_i < R_i$ であるポール内部の領域では，$n_i' = n_i$ だから

$$\Phi_z(r_i, \phi_i) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{\Phi,i,m} J_m(\kappa_i r_i) \exp(jm\phi_i) \tag{2.38}$$

となる．ここで，Φ_z は E_z あるいは K_z を表し，$a_{\Phi,i,m}$，$b_{\Phi,i,m}$，$c_{\Phi,i,m}$ は未知係数，J_m は m 次の第一種ベッセル関数，$H_m^{(2)}$ は m 次の第二種ハンケル関数である．κ_i は断面内波数であり，

$$\kappa_i = \sqrt{k_0^2 n_i^2 - \gamma^2} \tag{2.39}$$

である．領域 A_i 内の点 P における式 (2.37) に，Graf の公式 [95] から導かれる式

$$
\begin{aligned}
&H_m^{(2)}(\kappa_0 r_i(P))\exp(jm\phi_i(P)) \\
&= \sum_{q=-\infty}^{\infty} \exp(j(m-q)\phi_i^l) H_{q-m}^{(2)}(\kappa_0 r_l^i) J_q(\kappa_0 r_i(P))\exp(jq\phi_i(P))
\end{aligned}
\tag{2.40}
$$

を適用すると，未知係数 $a_{\Phi,i,m}$ と $b_{\Phi,i,m}$ からなる列ベクトル $\{a_{\Phi,i}\}$，$\{b_{\Phi,l}\}(i \neq l)$ 間の関係式

$$
\{a_{\Phi,i}\} = \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{N_c} [Y^{il}]\{b_{\Phi,l}\} \tag{2.41}
$$

を得る．$[Y^{il}]$ の (m,q) 成分 $y_{m,q}$ は

$$
y_{m,q} = \exp(j(q-m)\phi_i^l) H_{m-q}^{(2)}(\kappa_0 r_i^l) \tag{2.42}
$$

である．

$r_i = R_i$ での境界条件を式 (2.37)，(2.38) に課すことで得られる関係式

$$
\{b_i\} = [\tilde{S}_i]\{a_i\} \tag{2.43}
$$

を式 (2.41) に適用すると，

$$
\{b_i\} - \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{N_c} [\tilde{S}_i][\tilde{T}^{i,l}]\{b_i\} = \{0\} \tag{2.44}
$$

を得る．ここで，$[\tilde{T}^{i,l}]$，$\{a_i\}$，$\{b_i\}$ は

$$
[\tilde{T}^{il}] = \begin{bmatrix} [Y^{il}] & [0] \\ [0] & [Y^{il}] \end{bmatrix}, \tag{2.45}
$$

$$
\{a_i\} = \left\{ \{a_{E,i}\}^T \quad \{a_{K,i}\}^T \right\}^T, \tag{2.46}
$$

$$
\{b_i\} = \left\{ \{b_{E,i}\}^T \quad \{b_{K,i}\}^T \right\}^T \tag{2.47}
$$

である．上添字 T は転置をとることを表す．

式 (2.44) を具体的な行列の形で表すと

$$
\begin{bmatrix}
[I] & -[\tilde{S}_1][\tilde{T}^{1,2}] & \cdots & -[\tilde{S}_1][\tilde{T}^{1,N_c}] \\
-[\tilde{S}_2][\tilde{T}^{2,l}] & [I] & \cdots & -[\tilde{S}_2][\tilde{T}^{2,N_c}] \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
-[\tilde{S}_{N_c}][\tilde{T}^{N_c,l}] & -[\tilde{S}_{N_c}][\tilde{T}^{N_c,2}] & \cdots & [I]
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \{b_1\} \\ \{b_2\} \\ \vdots \\ \{b_{N_c}\} \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \vdots \\ \{0\} \end{Bmatrix}
\tag{2.48}
$$

となる．ここで，$[I]$ は単位行列である．m と q を $-M_c$ から M_c で打ち切ることで最終的に NEP

$$
[T(\gamma)]\{b\} = \{0\} \tag{2.49}
$$

を得る．$[T(\gamma)]$ は N 行 N 列（$N = 2N_c(2M_c+1)$）の複素平面上の行列関数であり，$\{b\}$ は N 次元の列ベクトルである．式 (2.49) を解くことで，複素固有値である伝搬定数 γ と複素固有ベク

トルである未知係数ベクトル $\{b\}$ を得る．電磁界の z 成分は，$\{b\}$ から得られる未知係数 $b_{\Phi,i,m}$，$c_{\Phi,i,m}$ を用いて，$\Omega_i(i=1\cdots N_c)$ では

$$\Phi_z(r,\phi)=\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{m=-M_c}^{M_c}c_{\Phi,i,m}J_m(\kappa_i r_i)\exp(jm\phi_i) \tag{2.50}$$

となり，Ω_0 では

$$\Phi_z(r,\phi)=\sum_{i=1}^{N_c}\sum_{m=-M_c}^{M_c}b_{\Phi,i,m}H_m^{(2)}(\kappa_0 r_i)\exp(jm\phi_i) \tag{2.51}$$

となる．

3 Sakurai-Sugiura 射影法（SSM）による非線形固有値問題（NEP）の解法

3.1 まえがき

非線形固有値問題（NEP）の解法の一つとして，零点探索法がある．固有値を含む複素数 z の平面において，大きさが零となる平面上の点 γ が複素固有値となる関数 $f_0(z)$ を適切に選択し，γ を探索する問題に帰着させるものである．関数 $f_0(z)$ として，通常は，NEP の係数行列の行列式あるいは行列の条件数を用いる．零点探索法としては，Newton 法，Broyden 法，滑降シンプレックス法（Downhill simplex method: DSM）などが利用できるが，いずれも，指定範囲内の固有値数を計算により定めることは出来ず，また求まる固有値は初期値に依存する．このため，探索範囲内の関数値 $f_0(z)$ を事前に調べて，固有値数を決定し，適切な初期値を選択して零点探索法により各固有値を算出するため，近接固有値の求解は容易ではなく，非線形固有値問題の零点探索法による求解の自動化は困難である．

他方，複素平面上の周回積分路内の全固有値とその固有ベクトルが求まる方法が開発されている．多項式の求解問題に帰着する Argument principle method(APM)[93]，[94] や一般化固有値問題に帰着させる Sakurai-Sugiura 射影法（SSM）[54]，[55]，[57]〜[85] 等がある．この周回積分を用いる方法は，零点探索法とは違い，指定した範囲の固有値数が計算により決定できること，ならびに縮退固有値の計算が可能であることから，導波モード解析に有用である．とくに SSM は，多項式の求解精度の観点から [93]，[94] に課されていた指定領域内の固有値数の上限，実用上 5 程度，が取除かれ，高精度で固有値が算出可能と報告されている．

本章では，この SSM の概略について述べ，非ブロック版の適用例として，周期構造導波路の漏洩モードを HTFEM 解析する．またブロック版の適用例として，ホーリーファイバの導波モードを MM 解析する．これらの解析結果から，指定した範囲内の全伝搬定数を縮退モードも含めて，高速に求解可能であることを示す [54]，[57]．また，SSM を導波路解析の NEP に適用すると，モード数判定基準の設定が困難な場合があることが数値計算により明らかとなった [54]，[57] ため，新たな判定指標として固有値の条件数 [58]，[86]，NEP の係数行列の条件数，NEP の固有ベクトルを規格化して算出する残差の 3 つの指標を検討し，固有値の条件数が最も有効であることを示す．また HTFEM のみならず MM から得られる NEP に縮退固有値用 SSM を適用し，SSM の妥当性，有用性を確認する [43]．

3.2 SSM の概略

非線形固有値問題

$$[T(z)]\{x\} = \{0\} \tag{3.1}$$

を解くことを考える．$[T(z)] \in \mathbb{C}^{N\times N}$ は複素数 $z \in \mathbb{C}$ について正則な複素数値の行列関数であり，$\{x\} \in \mathbb{C}^N$ は固有ベクトルである．

各列ベクトルが互いに独立な任意の N 行 L 列の行列 $[V] \in \mathbb{C}^{N\times L}$ を用いて L 行 L 列の行列関数 $[f(z)]$ を

$$[f(z)] = [V]^H [T(z)]^{-1} [V] \tag{3.2}$$

と定義する．ここに，上添字 H はエルミート共役であることを示す．この $[f(z)]$ の複素モーメント行列 $[\mu_k]$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ を，正の向きをもつ複素平面上の Jordan 曲線 $\check{\Gamma}$ 上の周回積分

$$[\mu_k] = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\check{\Gamma}} z^k [f(z)] dz \tag{3.3}$$

で定義する．

計算の簡単化のため，周回積分路 $\check{\Gamma}$ が中心 o，半径 ρ の円とする．通常，式 (3.3) は z^k を $\{(z-o)/\rho\}^k$ に置換し，台形則による数値積分によって近似評価されるため，複素モーメント行列 $[\hat{\mu}_k]$ は，

$$[\hat{\mu}_k] = \frac{\rho}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} \left(\frac{c_n - o}{\rho} \right)^{k+1} [f(c_n)] \tag{3.4}$$

となる．ここに，積分点 c_n は周回積分路 $\check{\Gamma}$ 上の N_s 個の等間隔点

$$c_n = o + \rho e^{\frac{2\pi \mathrm{j}}{N_s}\left(n+\frac{1}{2}\right)} \tag{3.5}$$

である．このため，一度の求解で $[V]^H [T(z)]^{-1} [V]$ の評価が標本点数 N_s 分必要となる．数値積分した複素モーメント行列 $[\hat{\mu}_k]$ を用いて Hankel 行列 $[\hat{H}_{ML}]$ とその成分をシフトした行列 $[\hat{H}^{<}_{ML}]$ を，それぞれ

$$[\hat{H}_{ML}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mu}_0] & [\hat{\mu}_1] & \cdots & [\hat{\mu}_{ML-1}] \\ [\hat{\mu}_1] & [\hat{\mu}_2] & \cdots & [\hat{\mu}_{ML}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\hat{\mu}_{ML-1}] & [\hat{\mu}_{ML}] & \cdots & [\hat{\mu}_{2ML-2}] \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

$$[\hat{H}^{<}_{ML}] = \begin{bmatrix} [\hat{\mu}_1] & [\hat{\mu}_2] & \cdots & [\hat{\mu}_{ML}] \\ [\hat{\mu}_2] & [\hat{\mu}_3] & \cdots & [\hat{\mu}_{ML+1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\hat{\mu}_{ML}] & [\hat{\mu}_{ML+1}] & \cdots & [\hat{\mu}_{2ML-1}] \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

と構成すると，求めたい $[T(z)]$ の近似固有値 $\hat{\lambda}_l$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ は，一般化固有値問題

$$([\hat{H}^{<}_{ML}] - \zeta [\hat{H}_{ML}])\{\hat{w}\} = \{0\} \tag{3.8}$$

の固有値 $\hat{\zeta}_l$ を用いて，

$$\hat{\lambda}_l = o + \rho \hat{\zeta}_l \tag{3.9}$$

と求められる．固有ベクトル $\{\hat{x}_l\}$ は

$$\{\hat{x}_l\} = [[\hat{s}_0], [\hat{s}_1], \cdots, [\hat{s}_{ML-1}]]\{\hat{w}_l\}, \quad l = 1, 2, \cdots, m \tag{3.10}$$

と求まる．ここに，$\{\hat{w}_l\}$ は一般化固有値問題 $\{[\hat{H}^{<}_{ML}]-\zeta[\hat{H}_{ML}]\}\{\hat{w}\}=\{0\}$ の $\hat{\zeta}_l$ に対応する固有ベクトルであり，$[\hat{s}_k]$ は

$$[\hat{s}_k]=\frac{\rho}{N_s}\sum_{h=0}^{N-1}\left(\frac{c_h-o}{\rho}\right)^{k+1}[T(c_h)]^{-1}[V] \tag{3.11}$$

である．

本論文では式 (3.8) を QZ 法 [96]，[97] に基づき解く．まず，行列 $[\hat{H}^{<}_{ML}]$，$[\hat{H}_{ML}]$ を

$$[\hat{H}^{<}_{ML}]=[Q][S][Z]^H, \tag{3.12}$$

$$[\hat{H}_{ML}]=[Q][P][Z]^H. \tag{3.13}$$

と一般化 Schur 分解する．ここに，$[Q]$，$[Z]$ はユニタリ行列である．次に，上三角行列 $[S]$，$[P]$ のそれぞれの対角成分 S_{ll}，P_{ll} を用いて，固有値 $\hat{\zeta}_l$ を

$$\hat{\zeta}_l=\frac{S_{ll}}{P_{ll}} \tag{3.14}$$

と求める．

Hankel 行列の次数はモーメント数 M と L の積 ML である．周回積分路内部の固有値の個数 m は先験的に不明なので L と M は以下のように定める．まず，周回積分路内部の最大縮退固有値数よりも十分大きくなる L を推定し決定する．次に，周回積分路内部に存在する全固有値 m よりも十分大きくなる $ML\geq m$ から M を推定し決定する．ここで，$L=1$ の場合が非ブロック版，$L\geq 2$ がブロック版である．しかしながら，$ML>m$ 次元の式 (3.8) の数値解には，真の m 個の解の他に，SSM に起因する $\check{\Gamma}$ 内の解，並びに $\check{\Gamma}$ 外の解が混入する．このため，ハンケル行列の階数から m を決定し，式 (3.8) を解くか，あるいは式 (3.8) を解き，固有値に関する指標を用いて求めた ML 個の固有値から正解を判別し m を定める．なお，$ML>m$ 次元の式 (3.8) から求めた固有値の精度は，m 次元の式 (3.8) に比べ精度が低下している場合があるため，m 次元の式 (3.8) を再び解くことが望ましい．

SS 法の文献 [68] では，積分路内の固有値の個数 m を次のように決定している．$ML\geq m$ である ML を推定し，$\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_{ML}$ を Hankel 行列 $[\hat{H}_{ML}]$ の特異値，δ を小さな値として K 個の特異値が $\sigma_i\geq\delta$ $(i=1,2,\cdots,K)$，残りの $ML-K$ 個が $\sigma_i<\delta$ $(i=K+1,\cdots,ML)$ となる K を定める．この値を m とする．

しかしながら，本章の数値計算例で示すように，判定基準値 δ の決定は必ずしも容易ではない．そこで，本論文では，式 (3.8) を解き m を定める．SSM に起因する混入解を判別，除去する手続きは，文献 [58]，[85] に報告しているものと同様である．判別指標として，固有値の条件数 [85]

$$C_l=\frac{||\{\hat{v}\}_l||_2||\{\hat{w}\}_l||_2}{\sqrt{|S_{ll}|^2+|P_{ll}|^2}} \tag{3.15}$$

を用いることができる．ここに，$\{\hat{v}\}_l$，$\{\hat{w}\}_l$ は式 (3.8) の求めた固有値 $\hat{\zeta}_l$ に対応する左，右固有ベクトルである．$||\cdot||_2$ はベクトルの 2-ノルムを表す．

いま一つの指標として感度の逆数 F_l

$$F_l = |\{\hat{v}\}_l^H[\hat{H}_m^{<}]\{\hat{w}\}_l|^2 + |\{\hat{v}\}_l^H[\hat{H}_m]\{\hat{w}\}_l|^2 \tag{3.16}$$

を用いることが考えられる [58]．F_l 値は摂動に対する感度が高いほど小さい．複素伝搬定数として物理的意味をもたない解は複素伝搬定数よりも SSM のパラメータに強く依存することから，複素伝搬定数として物理的意味をもたない解に対応する F_l 値は，複素伝搬定数に対応するものよりも小さくなる．

他にも，混入解を判別，除去する方法として，Hankel 行列の固有値 P_{ll} を用いる方法 [58] を検討したが，本論文では示さない．

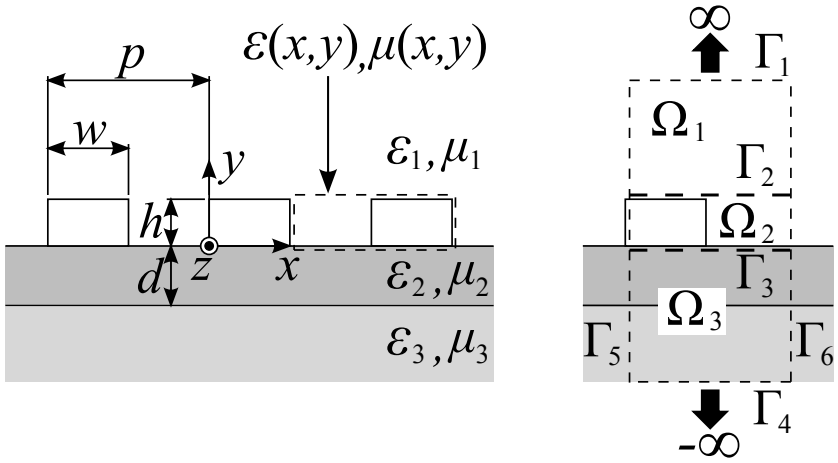


図 3.1　周期構造誘電体スラブ導波路

3.3　非ブロック版 SSM の適用例

非ブロック版 SSM は，縮退モードの求解ができず近接する固有値の精度が低下するが，ブロックのパラメータ $L = 1$ であるため，SSM 適用時に必要なパラメータが 1 個減り，ブロックの取り扱いの分だけアルゴリズムが簡単となる．本節では，この非ブロック版で求解できる問題として，周期構造導波路の伝搬特性の HTFEM 解析を行う．

HTFEM の定式化については，既に，散乱問題を対象に報告されているため，本節では述べずに，解析結果について検討する．

3.3.1　周期構造導波路

図 3.1 に示すようなカバー層 (比誘電率 ε_1，比透磁率 μ_1，$h < y$)，完全導体電極による周期摂動部 (比誘電率 $\varepsilon(x, y)$，比透磁率 $\mu(x, y)$，$0 \leq y \leq h$)，導波層 (比誘電率 ε_2，比透磁率 μ_2，$-d \leq y < 0$)，基板 (比誘電率 ε_3，比透磁率 μ_3，$y < -d$) からなる周期構造誘電体スラブ導波路 (構造周期 p，電極幅 w，電極厚み h，導波層厚み d) の伝搬問題を考える．電磁界を複素表示して時間依存性を $\exp(j\omega t)$ とし，z 軸方向の界の変化を一様 ($\frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$) とする．構造が x 軸方向に周期的なので，フロケの定理により電磁界の成分 $\phi(x, y, z)$ は，複素伝搬定数を $\gamma = \beta - j\alpha$ とすると，周期関数 $\tilde{\phi}(x + p, y) = \tilde{\phi}(x, y)$ を用いて $\phi(x, y, z, t) = \mathrm{e}^{j(\omega t - \gamma x)}\tilde{\phi}(x, y)$ と表される．ここに，β は位相定数，α は減衰定数である．また，j は虚数単位である．構造の周期性から，導波路 1 周期分（$x_0 \leq x \leq x_0 + p$）を解析する．無限遠方の境界 Γ_1，Γ_4 には放射条件，境界 $\Gamma_5(x = x_0)$，$\Gamma_6(x = x_0 + p)$ にはフロケの条件を課す．

図 3.1 に示す完全導体を周期的に装荷した誘電体スラブ導波路 ($k_0 p = 2.1$，$d = 0.5p$，$w = 0.5p$，$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1.0$，$\varepsilon_2 = 11.8$，$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.0$) の伝搬問題を考える．分割数は x，y 軸方向ともに 32 等分割とし，完全導体電極内に電磁界は侵入しないので，不連続領域 Ω_2 の真空部分のみを

512 個の 4 節点 4 辺矩形要素で分割し，境界 Γ_2，Γ_3 を 32 個の 2 節点 1 辺線要素で分割する．また，トレフツ要素の空間高調波展開の打ち切りモード次数 $M_c = 32$ とした．これは，HTFEM の平面波散乱問題の解析結果 [48] から，計算結果の精度はモード数よりも伝搬方向分割数の依存性が大きく，モード数は接続境界 Γ_2，Γ_3 上の離散化電界の未知数個程度で十分なことが分っているためである．

3.3.2 SSM による求解例

固有値数 K の M，δ 依存性を調べる．表 3.1 は，電極厚み $h/p = 0.5$，SS 法の積分路の中心を $op = 5.6 - j0.2$, 半径を $\rho p = 0.4$ として調べたものである．上添字 $*$ は領域内に不要解を含んでいることを表す．この問題の伝搬定数は，TE モードならびに TM モードに対応する $\gamma p = 5.70243 - j0.03545$, $5.40284 - j0.33514$ の 2 つである [54]，[98]．標本点数が 16，32 と少ない場合には，固有値数 $K = 2$ とはならず，積分径路外の解を含んだ K 値が求まる．これは，径路積分の精度が不足しているため，混入したものと考えられる．$\delta = 10^{-9}$，$M = 8$ の場合には，標本点数を 1024 と多くしても，積分径路内に不要解が 1 個含まれ，$K = 3^*$ となる．この不要解は伝搬方向に界が増幅するものである．$\delta = 10^{-9}$，$M = 8$，$N_s = 32$ の場合では，積分径路内に不要解が 1 個含まれ，$K = 5^*$ となる．この場合の複素伝搬定数 γ 平面での数値計算による固有値の分布を図 3.2 に示す．(1) は TE モードの解，(2) は TM モードの解，(4) は積分径路内の不要解，(3), (5) は積分径路外の不要解である．各固有値の固有ベクトル，すなわち電界ベクトルの界分布を図 3.3〜3.7 に示す．なお，$0.5 < y/p$ はカバー層，$0 \leq y/p \leq 0.5$ は周期摂動部，$-0.5 \leq y/p \leq 0$ は導波層，$y/p \leq -0.5$ は基板，白い部分は電極である．図 3.5，図 3.6，図 3.7 に対応する解は，(a), (b) の界が周期摂動部で不連続になっているため，不要解であることがわかる．他の場合も δ，M，N_s の設定により，不要解が含まれることがあるが，いずれも物理的見地から除去可能である．以上から，設定値 δ，M，N_s によっては $K > m$ となるが，算出した伝搬定数，界を吟味すると，積分路内の全解が求まることが判った．

次に求まる伝搬定数の値の妥当性を確認する．図 3.8 は位相定数と減衰定数の電極厚み h/p 依存性を調べたものである．SS 法のパラメータは，積分路の半径 $\rho p = 0.4$ とし，$N_s = 128$，$M = 8$，$\delta = 10^{-7}$ とした．積分径路の中心は，予想される伝搬定数に応じて移動させ，例えば電極厚み $h/p = 0.5$ の場合には，$op = 5.6 - \mathrm{j}0.2$ とした．TE モードと TM モードの両固有値が半径 $\rho p = 0.4$ の円内に含まれない $h/p = 0.9$ の場合に限り，各固有値向けに中心を設定し，SS 法を 2 度実行した．図 3.8 から SS 法を用いた HTFEM の結果 (-) は，積分方程式（IE）の結果 (•)[98] と一致していることがわかる．

SS 法のパラメータを $M = 8$，$\delta = 10^{-11}$ とし，固有値 $\hat{\gamma}_l p$ とその場合の行列 $[T(\hat{\gamma}_l p)]$ の条件数 $\mathrm{cond}([T(\hat{\gamma}_l p)])$ を計算した結果を表 3.2 に示す．また，求まった固有値の複素平面上の分布を図 3.9 に示す．条件数は，2-ノルムを用いて，行列 $[T(\hat{\gamma}_l p)]$ の最小特異値 $\sigma_{\min}$ と最大特異値 $\sigma_{\max}$ の比 $\sigma_{\min}/\sigma_{\max}$ で算出した．特異値分解には Intel® Math Kernel Library の zgesvd を用いた．求める 2 つの解は，いずれの円でも正しく求められており，円 1 と円 2($N_s = 64$) の $[T(\hat{\gamma}_l p)]$ の条件数は 10^{13} 以上と十分大きくなっている．その他の解，すなわち円 1 での 5 個，円 2 と円 3 での

6 個の解は，図 3.9 から値が異なっていることがわかり，また $\hat{\gamma}_l p$ に対応する条件数も 10^4 程度と大きくはなく，SS 法に由来するものと考えられる．このため，M，δ の設定によって K が真の固有値数より大きくなった場合でも，円の半径を大きくした領域と求解領域で求まる解の移動を調べることで，移動しない物理的解と SS 法の適用により混入する移動する解の判別が可能であると考えられる．

表 3.1　固有値数 K の M, δ 依存性

N_s	δ							
	10^{-3}		10^{-5}		10^{-7}		10^{-9}	
	M		M		M		M	
	4	8	4	8	4	8	4	8
16	4	7	4	8	4	8	4	8
32	2	2	2	2	2	3	3	5*
64	2	2	2	2	2	2	3*	3*
128	2	2	2	2	2	2	2	4
256	2	2	2	2	2	2	2	2
512	2	2	2	2	2	2	3*	3*
1024	2	2	2	2	2	2	2	3*

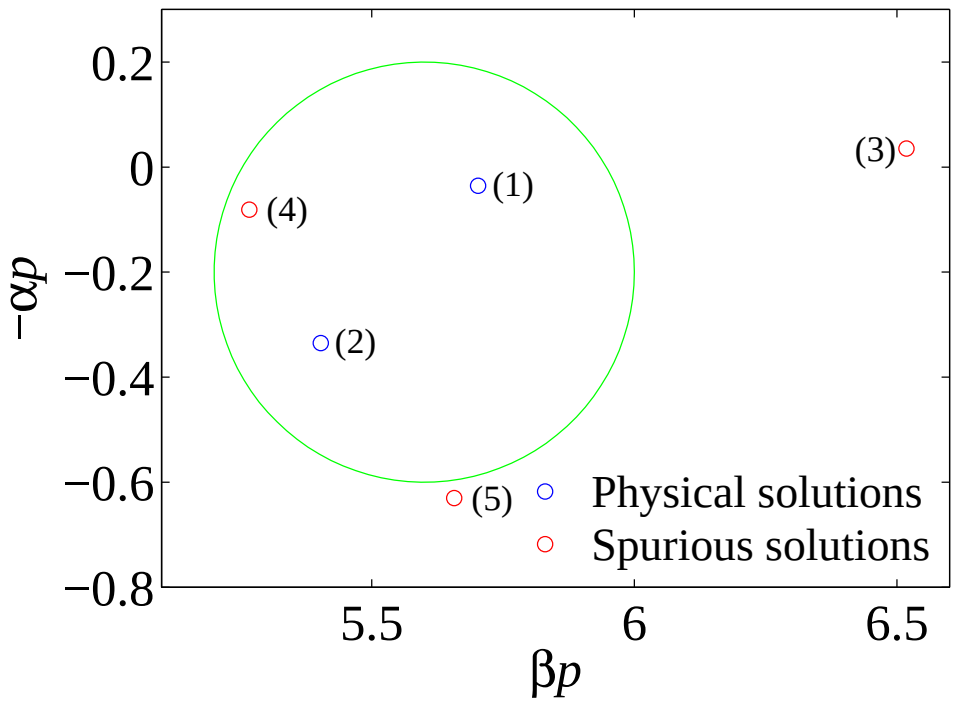
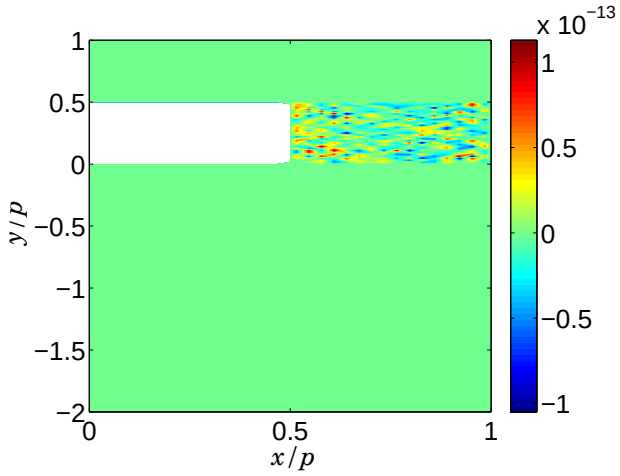
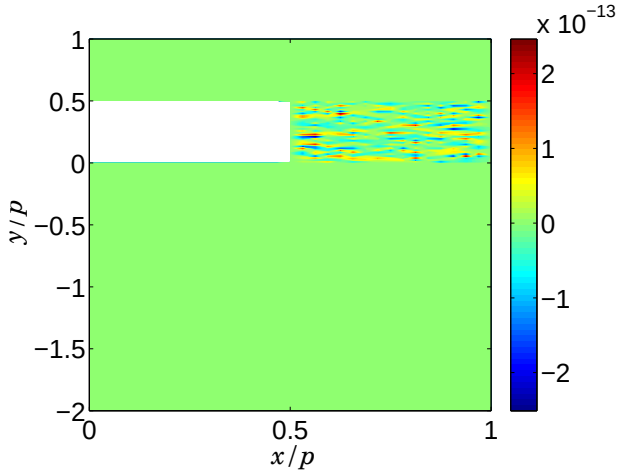


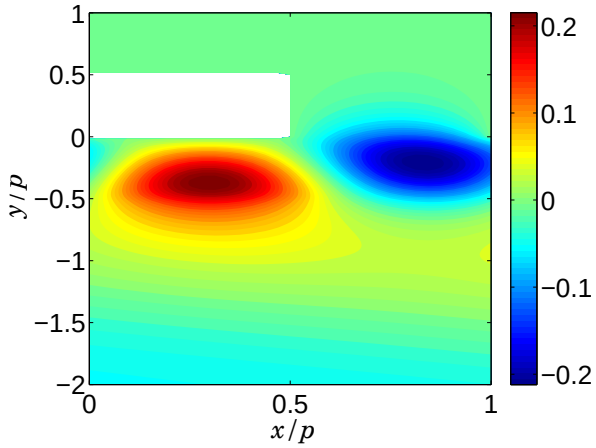
図 3.2　複素伝搬定数 γ 平面での数値計算による固有値の分布



(a) x 成分

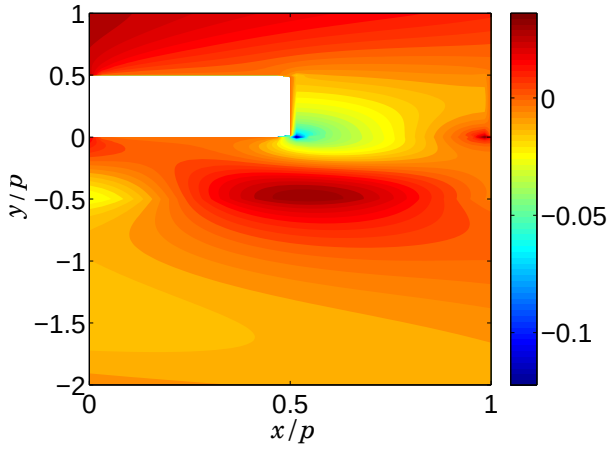


(b) y 成分

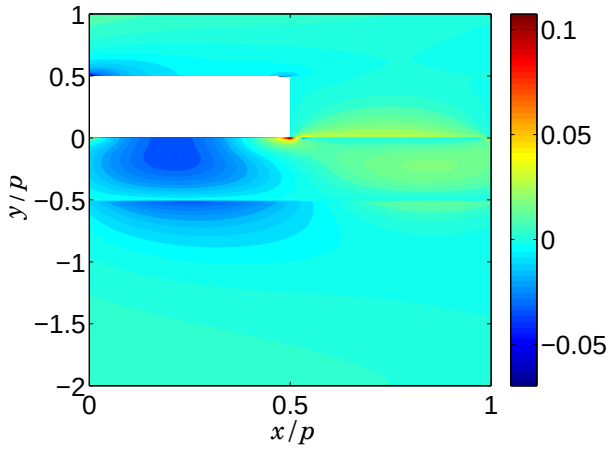


(c) z 成分

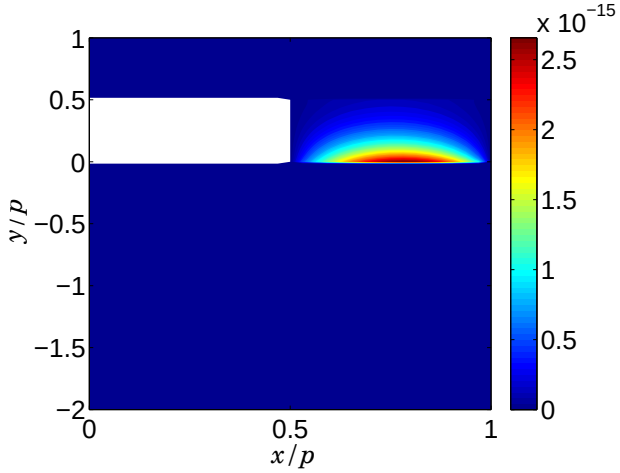
図 3.3　図 3.2 の (1) の電界分布 ($\gamma p = 5.70243 - j0.03545$，TE モード)



(a) x 成分

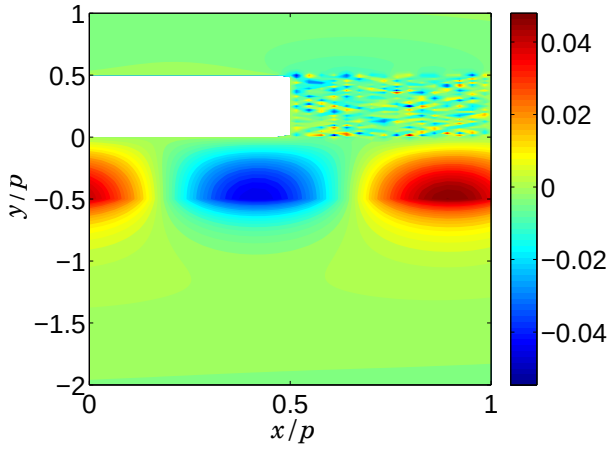


(b) y 成分

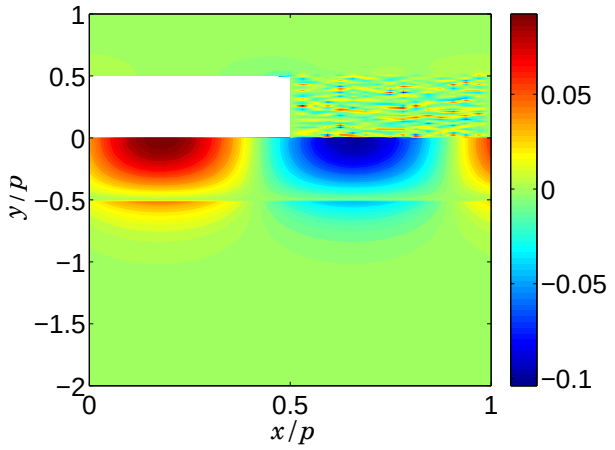


(c) z 成分

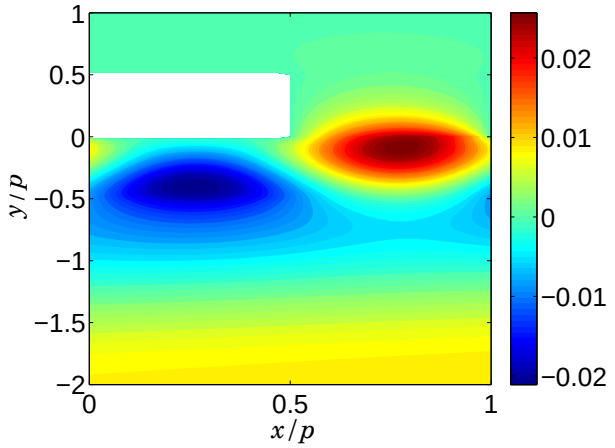
図 3.4　図 3.2 の (2) の電界分布 ($\gamma p = 5.40284 - j0.33514$，TM モード)



(a) x 成分

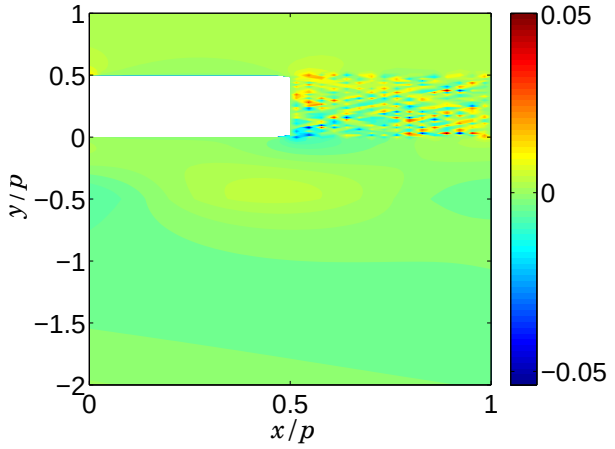


(b) y 成分

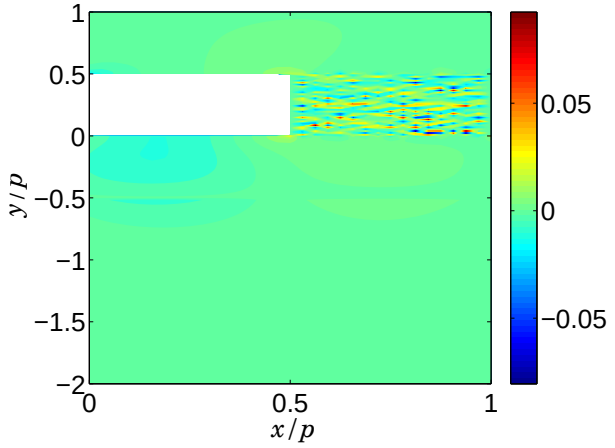


(c) z 成分

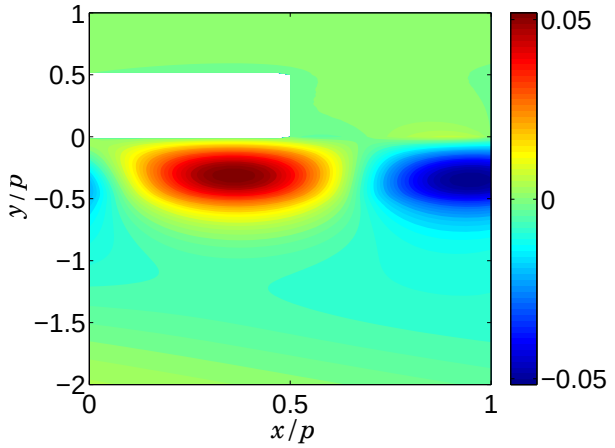
図 3.5　図 3.2 の (3) の電界分布 ($\gamma p = 6.51820 + j0.03534$，不要解)



(a) x 成分

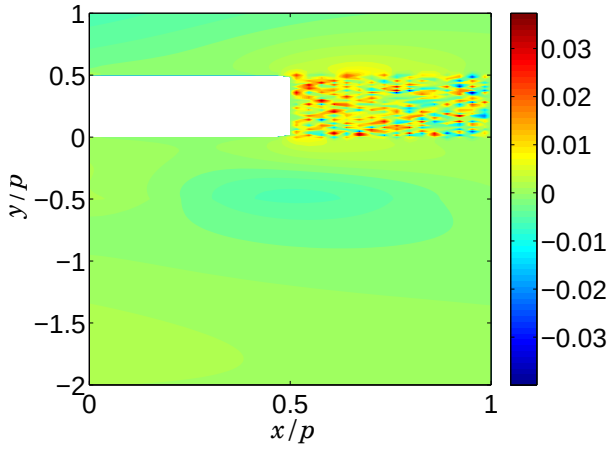


(b) y 成分

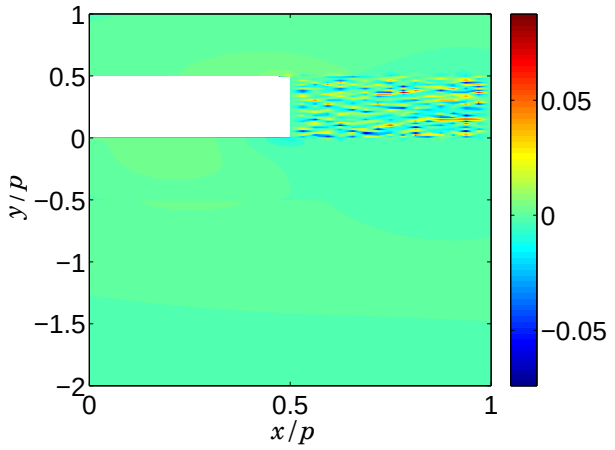


(c) z 成分

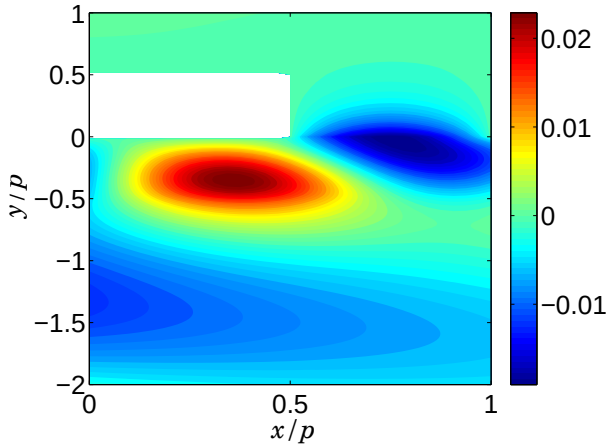
図 3.6　図 3.2 の (4) の電界分布 ($\gamma p = 5.26684 - j0.08118$，不要解)



(a) x 成分

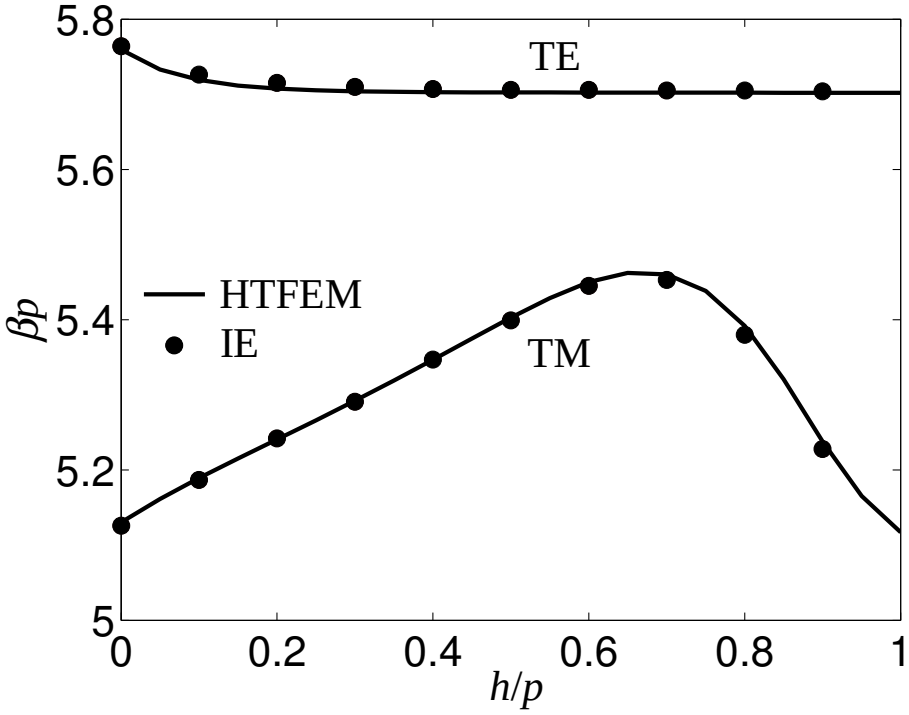


(b) y 成分

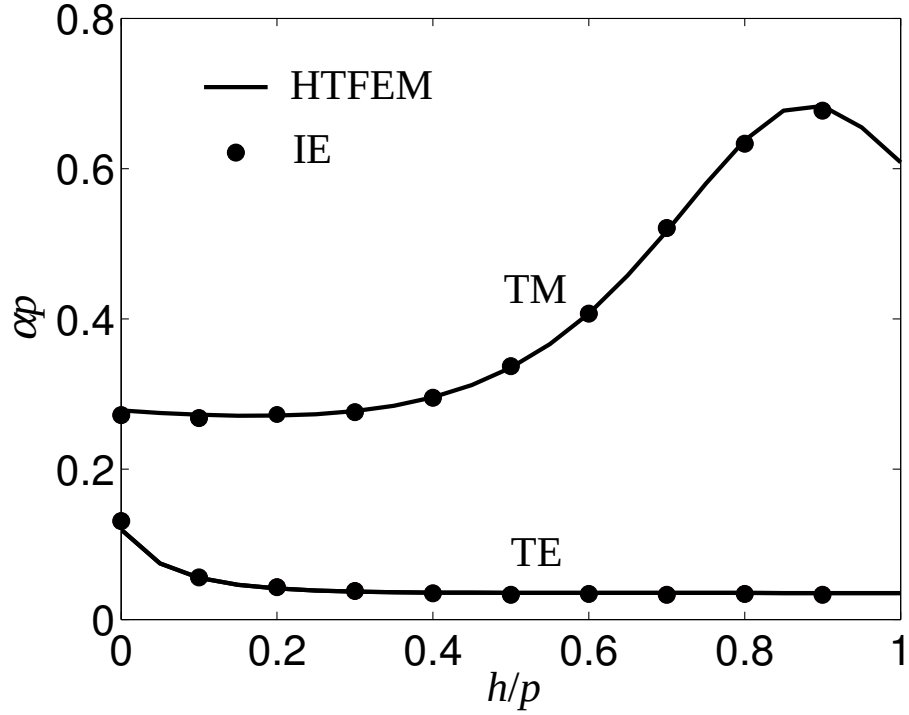


(c) z 成分

図 3.7　図 3.2 の (5) の電界分布 ($\gamma p = 5.65680 - j0.63017$，不要解)



(a) 位相定数 βp



(b) 減衰定数 αp

図 3.8　伝搬定数 γp の電極厚み h/p 依存性

表 3.2　周期構造誘電体スラブ導波路の固有値 $\hat{\gamma}_l p$ と条件数 $\mathrm{cond}([T(\hat{\gamma}_l p)])$

	Circle1($op=5.5-j0.1, \rho p=0.3$)		Circle2($op=5.5-j0.1, \rho p=0.4$)				Circle3($op=5.5-j0.2, \rho p=0.3$)	
	$N_s=32$		$N_s=64$		$N_s=32$		$N_s=32$	
l	$\hat{\gamma}_l p$	$\mathrm{cond}(T[\hat{\gamma}_l p])$	$\hat{\gamma}_l p$	$\mathrm{cond}(T[\hat{\gamma}_l p])$	$\hat{\gamma}_l p$	$\mathrm{cond}(T[\hat{\gamma}_l p])$	$\hat{\gamma}_l p$	$\mathrm{cond}(T[\hat{\gamma}_l p])$
1	$5.40284-j0.33514$	1.993×10^{16}	$5.40284-j0.33514$	7.196×10^{16}	$5.40284-j0.33514$	1.990×10^{16}	$5.40284-j0.33514$	8.800×10^{16}
2	$5.70243-j0.03545$	5.539×10^{14}	$5.70243-j0.03545$	8.000×10^{13}	$5.70243-j0.03545$	2.238×10^{14}	$5.70243-j0.03545$	5.018×10^{14}
3	$5.34973-j0.30079$	3.093×10^{4}	$5.10266-j0.00893$	1.366×10^{4}	$5.34785-j0.44106$	1.629×10^{4}	$5.42371-j0.31973$	7.477×10^{4}
4	$5.53415-j0.32942$	1.469×10^{4}	$5.37354+j0.22353$	1.366×10^{4}	$5.09843-j0.00086$	1.366×10^{4}	$5.44507-j0.08417$	1.366×10^{4}
5	$5.12355-j0.05814$	1.366×10^{4}	$5.67347-j0.05446$	1.366×10^{4}	$6.97366-j0.16473$	1.366×10^{4}	$5.24100-j0.05698$	1.366×10^{4}
6	$5.77381+j0.09689$	1.366×10^{4}	$5.00209-j0.48473$	1.366×10^{4}	$5.68743+j0.06103$	1.366×10^{4}	$5.96372+j0.86781$	1.366×10^{4}
7	$3.60659-j0.16208$	1.366×10^{4}	$5.88296+j0.00694$	1.366×10^{4}	$4.10983+j0.07105$	1.366×10^{4}	$4.65607-j0.09855$	1.366×10^{4}
8	-	-	$5.52906-j0.48525$	1.366×10^{4}	$7.05048+j0.97921$	1.366×10^{4}	$5.82036-j0.49987$	1.366×10^{4}

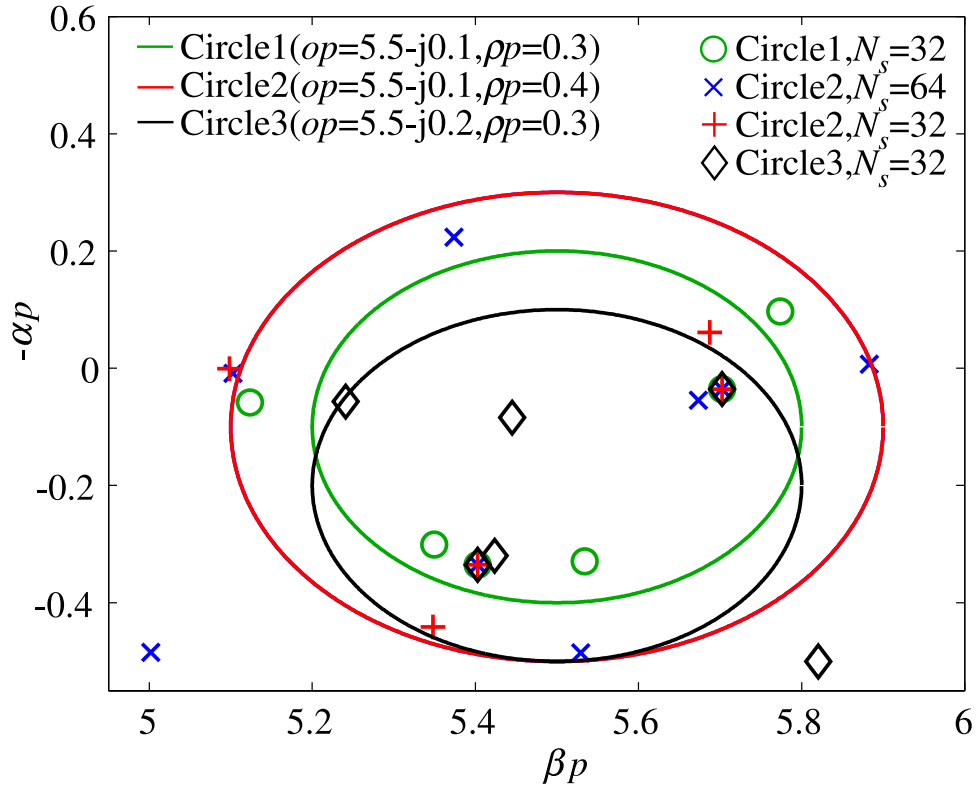


図 3.9　積分路変更による固有値の分布

3.4 ブロック版 SSM の適用例

光ファイバを効率的に設計するには，目標とする特性を持つ構造の自動最適設計を高速に行うことが重要となる．自動最適設計では，目標とする特性が得られるまで伝搬特性解析と屈折率分布の変更を繰り返す必要がある．このため，伝搬特性解析に汎用性が高い有限要素法（Finite Element Method: FEM）を用いる場合，屈折率分布の更新毎に最適な要素分割を行う必要があり，計算時間が長くなる．

Multipole Method（MM）[36]〜[43]，は光ファイバのコアやホールの断面が円や楕円の場合しか取り扱うことができないが，各領域の波動方程式の基本解を用いて電磁界を離散化するため，数値分散が小さく，少ない未知数で精度の高い計算が可能である．また，FEM のように要素分割を必要としないため，ホールやコアの大きさや位置の変更に伴う時間は極めて短い．このため，伝搬特性解析に MM を用いると，高速な最適設計が可能となることが期待できる．しかし，MM は最終的に非線形固有値問題（Nonlinear eigenvalue problem: NEP）に帰着するので，計算時間は NEP を解く数値計算手法に大きく依存する．

この NEP の解法として，滑降シンプレックス法（Downhill Simplex Method: DSM）[89]〜[91] を用いて，NEP の行列が特異になる複素伝搬定数を探索する方法がある．DSM は複素伝搬定数平面に三角形を設定し，その 3 頂点の関数値が小さくなるように頂点の更新を繰り返すことで，関数値が極小となる点を探索する方法である．関数値を直接評価するので，ニュートン法などのように関数の微分を計算する必要がない．しかし，複数の極小値が存在する場合，求まる解が初期値に依存するため，あらかじめ最小化する関数値の複素伝搬定数平面上での分布を調べ，適切な初期値を設定する必要がある．このため，DSM を用いた NEP の自動求解は難しく，自動最適設計への MM の適用は困難であった．

そこで本節では，縮退固有値の解析が可能なブロック版 SSM を MM の求解に適用する．はじめに，DSM による NEP の求解方法を説明する．次に，数値計算例としてホーリーファイバを考え，ブロック版 SSM による求解の妥当性を示す．さらに，NEP の行列が特異になる複素伝搬定数を DSM で探索する場合と比較し，SSM の高速性を示す　.

3.4.1 滑降シンプレックス法（DSM）

複素数 z の実数値関数 $f(z)$ の極小値を探索する滑降シンプレックス法のアルゴリズムを以下に示す．

(1). 初期三角形を決めて，その頂点の関数値を昇順に $f(\alpha_1)$，$f(\alpha_2)$，$f(\alpha_3)$ と並べる．

(2). 反射点 $\alpha_r = 2\alpha_m - \alpha_3$ を生成し，$f(\alpha_1) < f(\alpha_r) < f(\alpha_2)$ なら，α_3 を α_r に変更 [Reflect] して（6）へ．ただし，$\alpha_m = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ である．

(3). $f(\alpha_r) < f(\alpha_1)$ なら拡張点 $\alpha_e = \alpha_m + D(\alpha_m - \alpha_3)$ を計算する．$f(\alpha_e) < f(\alpha_r)$ なら α_3 を α_e に変更 [Expand] して（6）へ．$f(\alpha_e) \geq f(\alpha_r)$ なら α_3 を α_r に変更 [Reflect] して（6）

へ．ただし，D は係数である．

(4). $f(\alpha_r) \geq (\alpha_2)$ の場合

- $f(\alpha_r) < f(\alpha_3)$ なら，$\alpha_{co} = \alpha_m + (\alpha_r - \alpha_m)/2$ を計算する．$f(\alpha_{co}) < f(\alpha_r)$ の場合，α_3 を α_{co} に変更 [Contract outside] して（6）へ．
- $f(\alpha_r) \geq (\alpha_3)$ なら，$\alpha_{ci} = \alpha_m + (\alpha_3 - \alpha_m)/2$ を計算する．$f(\alpha_{ci}) < f(\alpha_3)$ の場合，α_3 を α_{ci} に変更 [Contract inside] して（6）へ．

(5).（2）〜（4）に該当しない場合は，$v_2 = \alpha_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)/2$，$v_3 = \alpha_1 + (\alpha_3 - \alpha_1)/2$ とし，α_2 を v_2 に，α_3 を v_3 に変更 [Shrink] する．

(6). 許容誤差を満たせば反復を終了，満たさなければ新たに得られた三点での関数値を再び昇順に並べ（2）に戻る．

係数行列 $[T(\gamma)]$ である NEP の求解では，z と $f(z)$ として，γ と $[T(\gamma)]$ の条件数の逆数 $1/\mathrm{cond}\{[T(\gamma)]\}$ を選ぶと，関数値は $0 \leq f(z) \leq 1$ の実数値であり，$f(z) = 0$ となる z が求める固有値であるから，極小点探索問題となる．また計算開始に必要な初期三角形は，あらかじめ関数値 $f(z)$ の分布を調べ，極小値となる z の近くに初期値を設定する．導波路解析用の NEP では，複数の解が存在することが多いため，更新する三角形が拡大して求めたい解から離れ，他の解に収束しないように，係数 D を 1 とした．

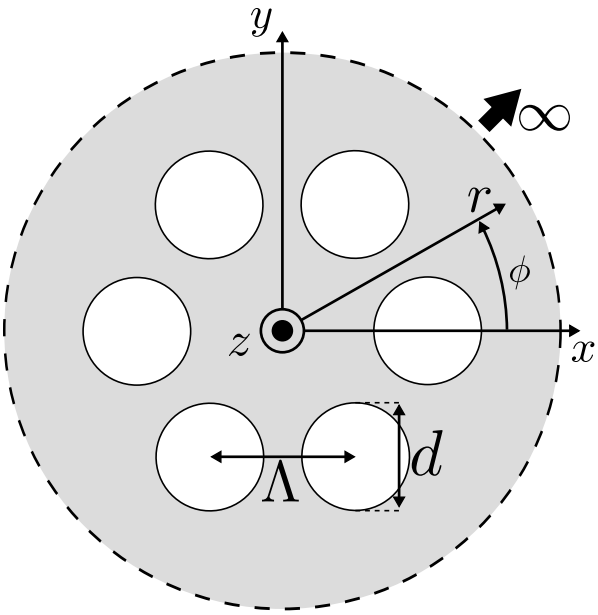


図 3.10　ホーリーファイバの断面図

3.4.2　ホーリーファイバの MM による解析

図 3.10 に示す z 方向へ無限に長いホーリーファイバ [12]，[38]，[39] を考える．ホールは真空とし，ホール以外の領域の屈折率 $n_0 = 1.45$ とする．ホールの直径 d，隣り合うホールの中心間の長さ $\Lambda = 1.35d$，$k_0 d = \pi/0.145$ とする．SSM では，$[V]$ の各列ベクトルはランダム関数で発生させた値を直交三角分解で直交化して用いた．不要解の判別には固有値の条件数 C_l を用いた．本節で示す表で，† は SSM の周回積分路内部に位置する解，モード名が suprious のものは SSM の求解時に混入する非物理解を示す．

表 3.3，3.4 はブロック版と非ブロック版で求めた実効屈折率 $n_{\mathrm{eff}}(= \hat{\gamma}_l/k_0)$ とその不要解判別指標 C_l，行列の条件数 $\mathrm{cond}([T(\gamma)])$，残差 $||[T(\gamma)]\{b\}||_2$ を示したものである．空間高調波の打ち切り項数 M_c は文献 [38] の MM の設定と同様に $M_c = 5$ としている．SSM のパラメータは $\rho/k_0 = 10^{-3}$，$o/k_0 = 1.4385$，$N_s = 256$ とした．残差を算出する際の $\{b\}$ は，$-4 \leq x/d, y/d \leq 4$ の正方形領域で面積分したポインティングベクトルの z 成分で規格化している．積分路内に存在する解は TE_{01}，TM_{01}，縮退している HE_{21} モードであり，縮退モードは利便上 HE_{21}^a,HE_{21}^b と表記する．表 3.3 のブロック版では 4 つのモードが算出できているが，表 3.4 の非ブロック版では HE_{21} モードが縮退モードとして算出できていない．非物理解に対応する C_l，$1/\mathrm{cond}([T(\gamma)])$，残差 $||[T(\gamma)]\{b\}||_2$ は，物理解の値と比較して大きくなっている．このため，どの値を用いても物理解と非物理解を判別可能である．計算時間の観点で，C_l が 3 つの指標のなかで一番有用だと考えられる．

表 3.5 は SSM から求めた低次モードの実効屈折率 $n_{\mathrm{eff}}(= \hat{\gamma}_l/k_0)$ とその不要解判別指標 C_l，行

列の条件数 cond($[T(\gamma)]$)，残差 $||[T(\gamma)]\{b\}||_2$，クラスタ分析による指標のグループ分け，Broyden method から求めた実効屈折率 $n_{\mathrm{eff},l}$[38] を示したものである．非縮退モードである HE_{31} モードは HE'$_{31}$，HE"$_{31}$ と表記する．空間高調波の打ち切り項数 M_c は文献 [38] の MM の設定と同様に $M_c = 5$ としている．SSM のパラメータは，$\rho/k_0 = 10^{-3}$，$N_s = 256$ とした．M と L は $ML > 4$ となるように，$M = 2$ と $L = 4$ とした．o/k_0 は HE_{11} モードを求める場合 $o/k_0 = 1.4455$，TE_{01}，HE_{21}，TM_{01} モードを求める場合 $o/k_0 = 1.4385$，TE_{01}，HE_{31}，EH_{11} モードを求める場合 $o/k_0 = 1.430$ とした．指標のグループ分けはソートした $\log_{10} C_l$ に対して，ユークリッド距離を用いた k-means 法 [100] を使用している．SSM と Broyden のどちらの実効屈折率も文献値 [38] と良く一致している．またクラスタ分析により物理解と非物理解を自動で判別できている．

図 3.11 は HE_{11} モードの電磁界とポインティングベクトルの z 成分の分布である．文献 [38] の分布と比較すると，本手法による界分布算出の妥当性を確認できる．

図 3.12，3.13 は HE_{11} モードと TM_{01} モードの電界の z 成分である．SSM と DSM により求めた界分布は，図から良く一致していることがわかる．また，ここでは示さないが，他のモードの界分布を含めて，重なり積分から SSM と DSM で求めた界分布の一致を確認している．DSM の初期三角形は，二等辺直角三角形として，その 3 頂点を $\acute{n}_{\mathrm{eff}}$，$\acute{n}_{\mathrm{eff}} + \Delta$，$\acute{n}_{\mathrm{eff}} + j\Delta$ とする．$\acute{n}_{\mathrm{eff}}$ は初期値であり推定した複素実効屈折率，Δ は辺の長さである．許容誤差は，関数値である $[T(\gamma)]$ の条件数の逆数 $1/\mathrm{cond}\{[T(\gamma)]\}$ と実効屈折率 n_{eff} のどちらについても 10^{-10} 以下とする．DSM パラメータは $\Delta = 2.5 \times 10^{-5}$ とし，$\acute{n}_{\mathrm{eff}}$ は求めるモードに合わせて適宜変更した．なお DSM による界分布は，係数行列のヌル空間の直交基底として求まる固有ベクトルを求めている．さらに，界分布の重なり積分は，Multipole method の係数から SSM と DSM での界分布を算出し，両者を数値積分したものであるが，界分布の算出式が同一であるため SSM と DSM で求めた係数行列の内積を評価したところ，完全に一致するときの内積の値 1 に対して 15 桁以上一致していた．

表 3.6 は HE^a_{21} モードの実効屈折率 n^a_{eff} と n^b_{eff} の差の N_s 依存性を調べたものである．$o/k_0 = 1.4385$，$\rho/k_0 = 10^{-3}$，$M = 2$ としている．$Ns = 16$ は，いずれの L でも，実効屈折率は小数点以下で実部で 11 桁，虚部で 10 桁以上一致している．この結果から，$\rho/k_0 = 10^{-3}$ では，$Ns = 16$ と少ないすうち縮退モードを計算可能であることがわかる．また，$L = 2, 4, 8$ の順に縮退固有値の差は小さくなっており，縮退度よりも L を大きくする方が精度が良いことがわかる．

表 3.7 と図 3.14 は，表 3.5 の半径 $\rho/k_0 = 0.001$ よりも大きい $\rho/k_0 = 0.01$ とした場合の実効屈折率とその分布を示している．SSM のパラメータは，$o/k_0 = 1.436$，$M = 4$，$L = 8$，$N_s = 256$ としている．点線の小さい円は $\rho/k_0 = 0.001$ であり，点線の大きい円は $\rho/k_0 = 0.01$ である．$\rho/k_0 = 0.01$ としても，表 3.5 と同様に解が求まっている．$M \times L = 32$ なので不要解が多く混入しているが，いずれの指標を用いても判別できている．

表 3.8 は HE^a_{21} モードの実効屈折率 n^a_{eff} と n^b_{eff} の差の N_s 依存性を調べたものである．パラメータは $M = 4$ から $M = 8$ に変更して，$L = 2$ でも $L \times M = 32 > N_p = 12$ となるようにした．$L = 2$ のとき，$N_s = 512$ でも n^a_{eff} と n^b_{eff} の差は 10^{-9} よりも大きい．$L = 4$ では $N_s > 128$，$L = 8$ では $N_s > 64$ で小数点以下 13 桁の一致を確認できる．この結果から，N_s を減らすために，$N_s > M$ の制限の下で，縮退度より L を大きくすると固有値の計算精度が良いことがわかる．

以下に，SSM と DSM の比較を行う．SSM による標本点と求まるモードを図 3.15 に示した．SSM のパラメータ $o/k_0 = 1.4385$，は $\rho/k_0 = 10^{-3}$，$N_s = 16$，$M = 2$，$L = 4$ とした．SSM では数値積分の標本点数 16 点の評価で，積分路内の 3 つの固有値（縮退を考慮すると 4 つの固有値）が全て一度に求まる．

図 3.16，3.17 は，$M_c = 10$ として DSM での初期値決定に用いる関数値 $|\det\{[T(\gamma)]\}|$，$1/\mathrm{cond}\{[T(\gamma)]\}$ の分布を調べたものである．図示した範囲を縦横 N_g 等分する格子を考え，格子点上の関数値から等値線図を作成した．図 3.17(a) の $N_g = 100$ の場合では 3 つの固有値に対応する極小値を確認できるが，図 3.17(b) の $N_g = 10$ では極小値は 1 つに見えている．また，図 3.16 では，$N_g = 100$ であるが，固有値に対応する極小値を確認できない．このように関数分布を調べるためには，詳細な調査が必要であり，近接する解の有無，解の個数の決定は容易ではない．

図 3.18 は SSM と DSM の計算時間を調べたものである．SSM のパラメータは，$\rho/k_0 = 0.001$，$o/k_0 = 1.4455$，$L = 4$，$M = 2$，$M_c = 5, 13$ である．用いた計算機は，Intel® i7-4770（基本周波数 3.40GHz，4 コア，8 スレッド），主記憶 16GB を備えている．1 回あたりの計算時間は，DSM の方が SSM より長いが，同程度と仮定して $\mathrm{cond}([T(\gamma)])$ あるいは $[V]^H[T(\gamma)][V]$ の評価回数を見積る．DSM で固有値を算出する場合，行列の条件数 $\mathrm{cond}([T(\gamma)])$ を初期三角形の 3 点と収束するまでの N_u 点で，合計 $3 + N_u$ 回計算する必要がある．また，1 回の DSM の適用で，1 つの固有値のみを算出する．一方，SSM は一度の計算で $[V]^H[T(\gamma)][V]$ を N_s 回評価する必要があるが，Γ 内の固有値がすべて求まる．表 3.5，表 3.7 の $N_p = 2$，4，12 の固有値を求める場合，SSM では $N_s = 16$，$N_s = 64$ が必要となる．SSM に近い計算時間で DSM を用いて解く場合には，$N_p = 2, 4$ で $N_u = 5, 1$ であり，$N_p = 12$ で $N_u = 3$ であるため，$N_u = N_s/N_p - 3$ を満たす必要がある．しかし，これらの N_u を実現するには求める固有値に速く収束する初期値が必要である．不適切な初期値では解が求まらなかったり，N_u が増加する．したがって，DSM を用いる場合は，適切な初期値の選択のために複素伝搬定数面での条件数の分布をあらかじめ詳細に調べる必要がある．

以上をまとめると，DSM で解を探索する場合，初期値と解の個数を決定するために，あらかじめ関数値の詳細な分布が必要となる．また，一度の DSM の適用で 1 つの固有値を探索するので，複数の固有値が存在する場合には，全体で多くの反復回数が必要となり，計算時間が長くなってしまう．一方 SSM では，縮退固有値を含めて，指定範囲内の全固有値を一度に求めることができ，関数値の評価回数も少ない．以上により，計算時間は DSM より SSM の方が速いと考えられる．

3.5 むすび

SSM の概略について述べ，非ブロック版の適用例として，周期構造導波路の漏洩モードの HTFEM 解析を行った．またブロック版の適用例として，ホーリーファイバの導波モードを MM 解析した．これらの解析結果から，指定した範囲内の全伝搬定数を縮退モードも含めて，高速に求解可能であることを確かめた [54]，[57].

SSM を導波路解析の NEP に適用すると，ハンケル行列の条件数から解の個数を決定することが難しいことを漏洩モードの解析例で示し，モードの電界分布あるいは積分路の変更により不要解が判別できることを示した．また不要解の判別指標として，新たに，固有値の条件数 [58]，[86]，NEP の係数行列の条件数，NEP の固有ベクトルを規格化して算出する残差の 3 つの指標を．ホーリーファイバの導波モード解析を例として，検討した．不要解の判別は，本章の数値計算例で示したように，NEP の係数行列の条件数，NEP の残差，NEP の固有ベクトルから求めた界分布の物理的妥当性，積分路の変更によっても可能であるが，固有値の条件数を判別指標とすると，判別指標に必要な計算量が他の指標等よりも少ないため，有用であることを示した．なお，固有値の条件数では SSM で求解した一般化線形固有値問題の固有値とその固有ベクトルを用いて，条件数の計算をするのみであるが，ほかの方法では係数行列の条件数や固有ベクトルと残差を計算する必要があり，計算量が著しく増加する．さらにホーリーファイバの MM 解析を例に，NEP の行列が特異になる複素伝搬定数を DSM で探索する場合と比較し，SSM による求解の高速性を示した．また，判別指標として固有値の条件数 C_l を用いることにより縮退固有値がある場合でも，不要解を判別できること，ならびに C_l をクラスタ分析することで，不要解を自動判別できることを確認した．

固有値が周回積分路外や周回積分路付近の場合の C_l を用いた不要解の自動判別の妥当性確認は今後の課題である．

表 3.3　ブロック版 SSM により求めた実効屈折率と指標

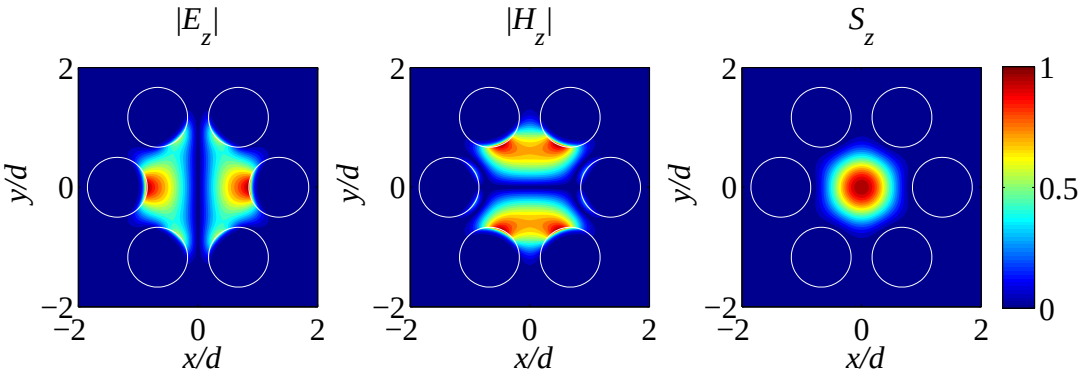
L	Mode	$\check{\Gamma}$	n_{eff}	C_l	cond($[T(\gamma)]$)	Residual$\|\|[T(\gamma)]\{b\}\|\|_2$
2	TE_{01}	†	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	1.3×10^{2}	3.4×10^{12}	9.7×10^{-8}
	HE_{21}^{a}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	6.8×10^{1}	6.1×10^{11}	2.2×10^{-7}
	HE_{21}^{b}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	2.2×10^{1}	2.5×10^{14}	9.6×10^{-10}
	TM_{01}	†	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	4.9×10^{1}	3.7×10^{12}	7.7×10^{-8}
4	TE_{01}	†	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	7.9	4.1×10^{14}	5.1×10^{-10}
	HE_{21}^{a}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	7.8	4.0×10^{14}	3.0×10^{-10}
	HE_{21}^{b}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	7.4	4.2×10^{14}	2.7×10^{-10}
	TM_{01}	†	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	8.0	1.2×10^{15}	2.0×10^{-10}
	Spurious	†	$1.438675258 + j9.790 \times 10^{-4}$	1.1×10^{14}	5.9×10^{1}	8.0×10^{2}
	Spurious		$1.443969202 + j8.040 \times 10^{-3}$	1.3×10^{14}	1.6×10^{1}	4.2×10^{3}
	Spurious		$1.434094692 - j2.993 \times 10^{-3}$	1.7×10^{14}	2.8×10^{1}	1.8×10^{3}
	Spurious		$1.435910897 + j1.492 \times 10^{-3}$	1.0×10^{14}	1.6×10^{1}	4.2×10^{3}
8	TE_{01}	†	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	7.9	2.5×10^{14}	6.5×10^{-10}
	HE_{21}^{a}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	6.0	4.2×10^{14}	2.6×10^{-10}
	HE_{21}^{b}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	6.4×10^{1}	1.7×10^{14}	6.5×10^{-10}
	TM_{01}	†	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	4.5	9.5×10^{14}	3.2×10^{-10}
	Spurious	†	$1.438588176 - j6.478 \times 10^{-4}$	1.5×10^{14}	1.1×10^{2}	1.0×10^{3}
	Spurious	†	$1.438785890 + j6.734 \times 10^{-4}$	1.3×10^{14}	7.9×10^{1}	6.5×10^{2}
	Spurious		$1.439379364 + j4.464 \times 10^{-3}$	3.9×10^{14}	7.1×10^{1}	5.3×10^{2}
	Spurious		$1.438983657 + j4.337 \times 10^{-3}$	3.7×10^{14}	1.4×10^{1}	2.3×10^{3}
	Spurious		$1.437693668 + j1.698 \times 10^{-3}$	2.1×10^{14}	2.9×10^{1}	1.4×10^{3}
	Spurious		$1.438701618 + j1.593 \times 10^{-3}$	2.2×10^{14}	3.6×10^{1}	9.1×10^{2}
	Spurious		$1.438497563 - j1.033 \times 10^{-3}$	3.1×10^{14}	7.5×10^{1}	7.2×10^{2}
	Spurious		$1.438485060 - j1.090 \times 10^{-3}$	3.0×10^{14}	7.2×10^{1}	7.6×10^{2}
	Spurious		$1.438518755 - j1.088 \times 10^{-3}$	2.6×10^{14}	7.2×10^{1}	6.8×10^{2}
	Spurious		$1.438518897 + j1.143 \times 10^{-3}$	2.7×10^{14}	5.1×10^{1}	7.3×10^{2}
	Spurious		$1.438478805 + j1.091 \times 10^{-3}$	2.7×10^{14}	5.4×10^{1}	8.2×10^{2}
	Spurious		$1.438501215 + j1.078 \times 10^{-3}$	3.0×10^{14}	5.4×10^{1}	7.7×10^{2}

表 3.4　非ブロック版 SSM（$L = 1$）により求めた実効屈折率と指標

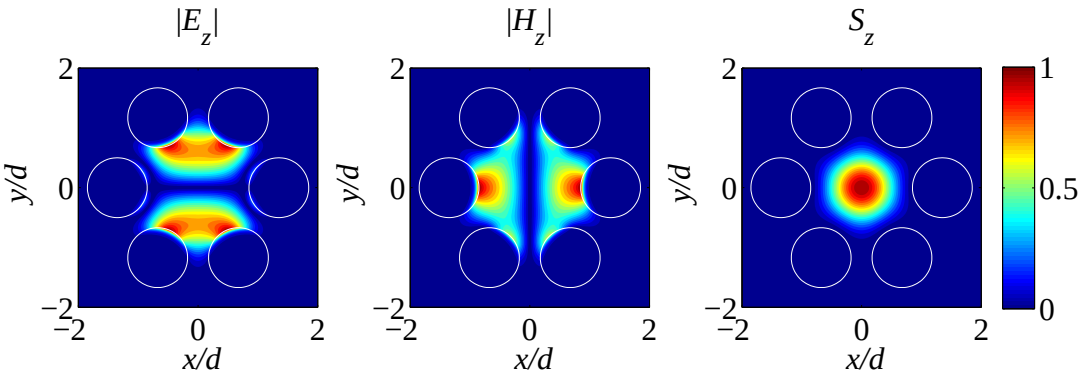
M	Mode	$\check{\Gamma}$	n_{eff}	C_l	cond($[T(\gamma)]$)	Residual$\|\|[T(\gamma)]\{b\}\|\|_2$
2	Spurious	†	$1.438569696 + j1.155 \times 10^{-5}$	2.7×10^{1}	2.6×10^{3}	1.8×10^{2}
	Spurious	†	$1.438384277 - j1.804 \times 10^{-5}$	1.8×10^{1}	2.7×10^{3}	9.1×10^{1}
4	TE_{01}	†	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	2.3×10^{2}	7.0×10^{11}	8.9×10^{-7}
	HE^{a}_{21}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	3.4×10^{2}	1.1×10^{11}	1.0×10^{-6}
	TM_{01}	†	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	2.8×10^{2}	3.9×10^{11}	7.4×10^{-7}
	Spurious		$1.434671744 + j1.076 \times 10^{-2}$	4.4×10^{13}	3.9	2.7×10^{4}
6	TE_{01}	†	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	5.3×10^{2}	3.5×10^{11}	1.8×10^{-6}
	HE^{a}_{21}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	1.3×10^{3}	5.9×10^{10}	2.0×10^{-6}
	TM_{01}	†	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	6.2×10^{2}	2.1×10^{11}	1.4×10^{-6}
	Spurious	†	$1.438619086 - j7.903 \times 10^{-4}$	2.5×10^{13}	9.1×10^{1}	1.5×10^{3}
	Spurious		$1.438389654 + j1.066 \times 10^{-3}$	2.1×10^{13}	5.5×10^{1}	2.2×10^{3}
	Spurious		$1.441003255 + j5.779 \times 10^{-3}$	5.3×10^{13}	1.5×10^{1}	1.1×10^{4}

表 3.5　低次モードの実効屈折率

	SSM						Broyden method [38]
Mode	Γ [a]	n_{eff}	C_l	cond($[T(\gamma)]$)	Residual$\|\|[T(\gamma)]\{b\}\|\|_2$	Group	n_{eff}
HE^{a}_{11}	†	$1.445395346 - j3.151 \times 10^{-8}$	9.0	1.4×10^{15}	2.4×10^{-10}	1	$1.445395345 - j3.15 \times 10^{-8}$
HE^{b}_{11}	†	$1.445395346 - j3.151 \times 10^{-8}$	6.5	1.6×10^{15}	2.0×10^{-10}	1	
Spurious	†	$1.445590201 + j4.962 \times 10^{-4}$	1.2×10^{14}	4.0×10^{2}	8.1×10^{1}	2	
Spurious	†	$1.445584295 - j8.914 \times 10^{-4}$	1.2×10^{14}	2.8×10^{2}	5.8×10^{1}	2	
Spurious	†	$1.445364564 - j8.019 \times 10^{-4}$	1.5×10^{14}	2.3×10^{2}	1.2×10^{2}	2	
Spurious		$1.442541064 - j6.385 \times 10^{-4}$	1.5×10^{14}	4.4×10^{1}	1.2×10^{3}	2	
Spurious		$1.444754414 + j1.207 \times 10^{-3}$	9.1×10^{13}	1.5×10^{2}	2.1×10^{2}	2	
Spurious		$1.445348359 + j1.029 \times 10^{-3}$	1.4×10^{14}	2.6×10^{2}	8.6×10^{1}	2	
TE_{01}	†	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	7.9	4.1×10^{14}	5.1×10^{-10}	1	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$
HE^{a}_{21}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	7.8	4.0×10^{14}	3.0×10^{-10}	1	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$
HE^{b}_{21}	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	7.4	4.2×10^{14}	2.7×10^{-10}	1	
TM_{01}	†	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	8.0	1.2×10^{15}	2.0×10^{-10}	1	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$
Spurious	†	$1.438675258 + j9.790 \times 10^{-4}$	1.1×10^{14}	5.9×10^{1}	8.0×10^{2}	2	
Spurious		$1.443969202 + j8.040 \times 10^{-3}$	1.3×10^{14}	1.6×10^{1}	4.2×10^{3}	2	
Spurious		$1.434094692 - j2.993 \times 10^{-3}$	1.7×10^{14}	2.8×10^{1}	1.8×10^{3}	2	
Spurious		$1.435910897 + j1.492 \times 10^{-3}$	1.0×10^{14}	1.6×10^{1}	4.2×10^{3}	2	
$\mathrm{HE}^{'}_{31}$	†	$1.430414041 - j2.218 \times 10^{-5}$	1.0×10^{1}	1.7×10^{15}	2.9×10^{-10}	1	$1.430175 - j2.22 \times 10^{-5}$
EH^{a}_{11}	†	$1.429969412 - j1.577 \times 10^{-5}$	7.4	2.0×10^{14}	5.5×10^{-10}	1	$1.4299694 - j1.577 \times 10^{-5}$
EH^{b}_{11}	†	$1.429969412 - j1.577 \times 10^{-5}$	3.6×10^{1}	2.1×10^{14}	5.7×10^{-10}	1	
$\mathrm{HE}^{''}_{31}$	†	$1.429255296 - j9.337 \times 10^{-6}$	3.6	5.4×10^{14}	2.2×10^{-10}	1	$1.429255296 - j9.337 \times 10^{-6}$
Spurious		$1.429737661 + j4.251 \times 10^{-3}$	1.9×10^{14}	8.0	8.6×10^{3}	2	
Spurious		$1.431123334 + j1.205 \times 10^{-3}$	2.0×10^{14}	2.6×10^{1}	3.5×10^{3}	2	
Spurious		$1.429980552 - j1.585 \times 10^{-3}$	2.9×10^{14}	3.9×10^{1}	3.0×10^{3}	2	
Spurious		$1.429867003 + j1.117 \times 10^{-3}$	2.1×10^{14}	3.3×10^{1}	3.4×10^{3}	2	

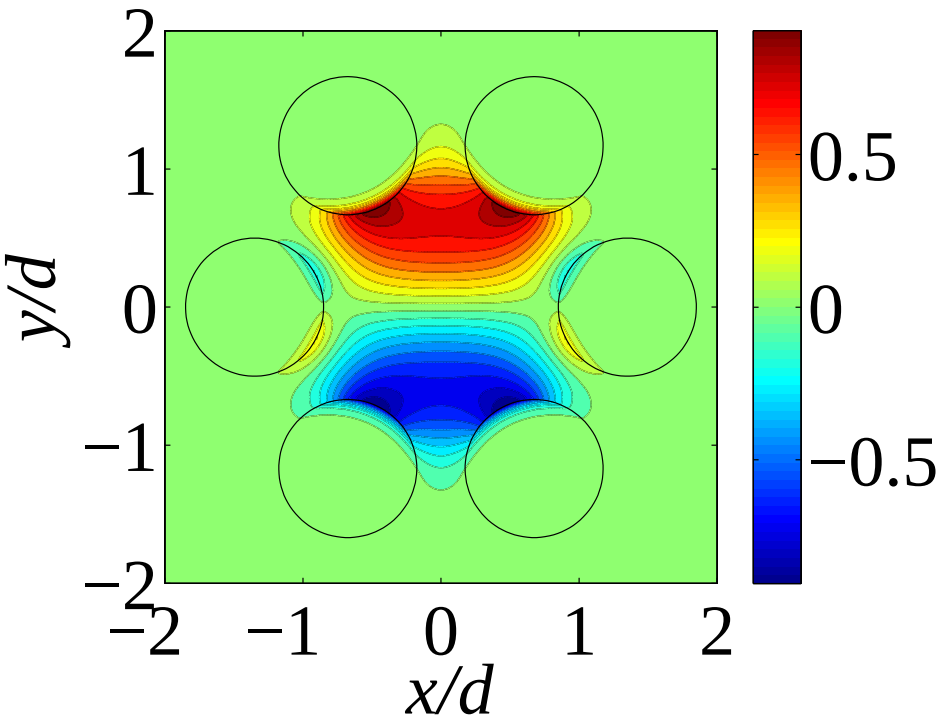


(a) HE_{11}^{a} モード

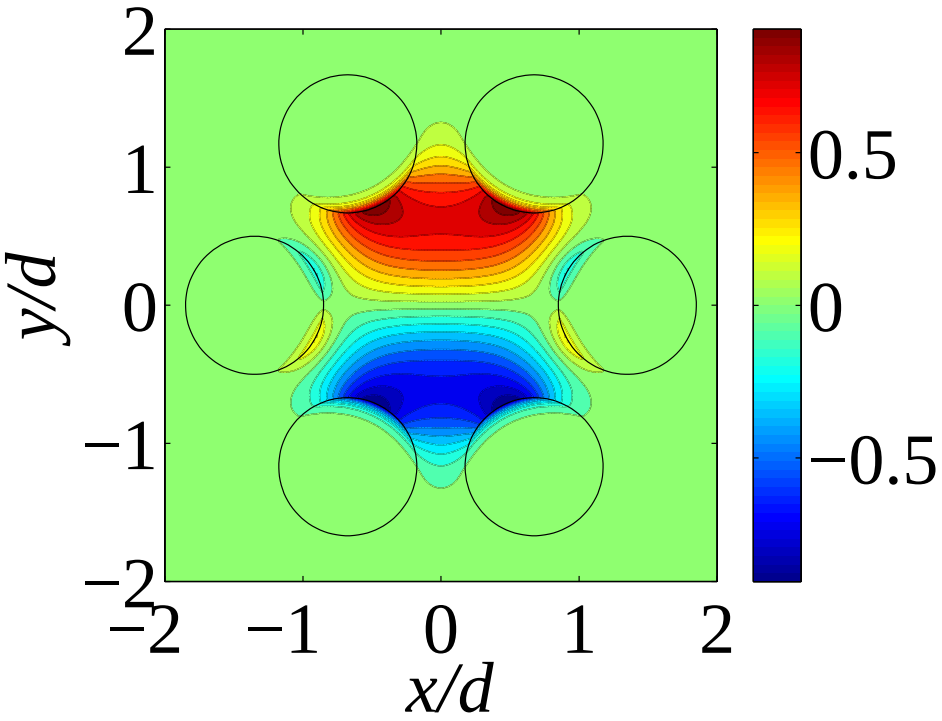


(b) HE_{11}^{b} モード

図 3.11　電磁界とポインティングベクトルの z 成分の分布

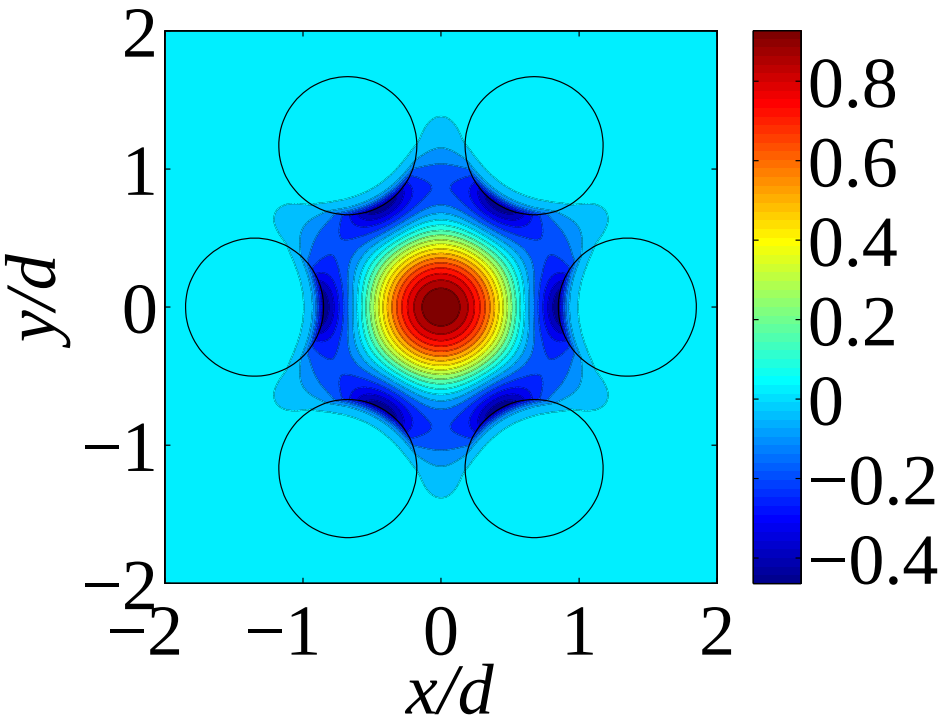


(a) SSM

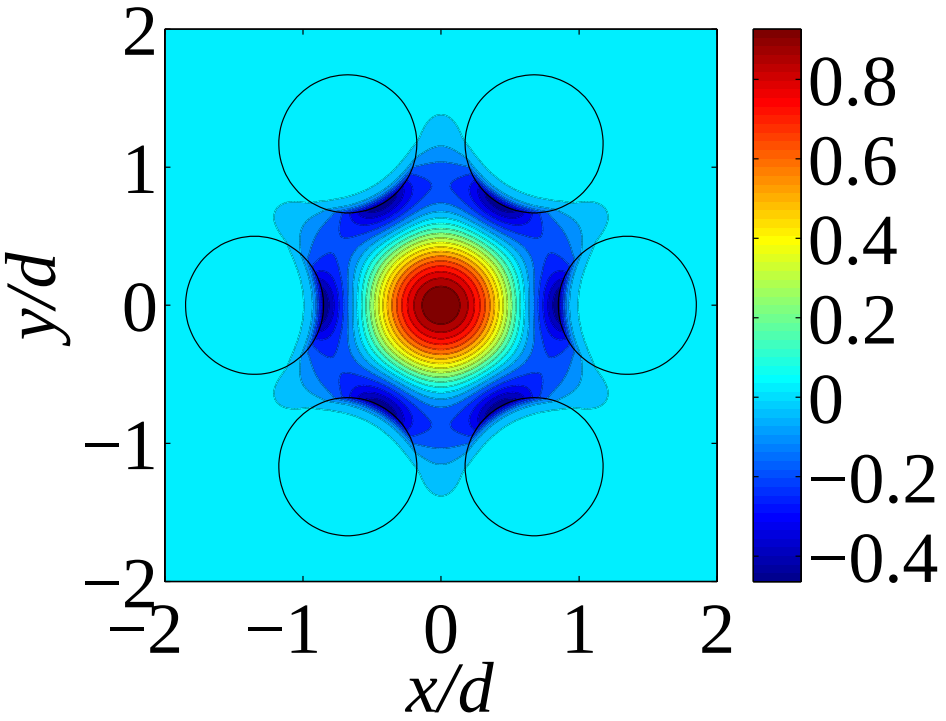


(b) DSM

図 3.12　HE_{11} モードの電界の z 成分



(a) SSM



(b) DSM

図 3.13　TM_{01} モードの電界の z 成分

表 3.6　HE_{21}^{a} モードの実効屈折率 n_{eff}^{a} と n_{eff}^{b} の差の N_s 依存性

L	N_s	$\mathrm{Re}\{n_{eff}^{a}\}$	$\mathrm{Im}\{n_{eff}^{a}\}$	$\lvert\mathrm{Re}\{n_{eff}^{a}-n_{eff}^{b}\}\rvert$	$\lvert\mathrm{Im}\{n_{eff}^{a}-n_{eff}^{b}\}\rvert$
2	8	1.43844617324908	-7.68013554030336×10^{-7}	3.53×10^{-4}	3.85×10^{-4}
	16	1.43844584209351	-9.92872363517664×10^{-7}	9.37×10^{-12}	1.32×10^{-11}
	32	1.43844584209345	-9.92872348449118×10^{-7}	2.03×10^{-13}	1.96×10^{-13}
	64	1.43844584209345	-9.92872348431689×10^{-7}	1.55×10^{-13}	1.53×10^{-13}
	128	1.43844584209345	-9.92872348383443×10^{-7}	1.64×10^{-13}	1.57×10^{-13}
	256	1.43844584209345	-9.92872348420888×10^{-7}	5.33×10^{-14}	5.68×10^{-14}
4	8	1.43844584235900	-9.93501136013654×10^{-7}	7.23×10^{-10}	7.03×10^{-10}
	16	1.43844584209345	-9.92872348434856×10^{-7}	2.22×10^{-16}	6.68×10^{-18}
	32	1.43844584209345	-9.92872348467995×10^{-7}	0	3.54×10^{-17}
	64	1.43844584209345	-9.92872348473599×10^{-7}	0	4.04×10^{-17}
	128	1.43844584209345	-9.92872348533279×10^{-7}	0	1.04×10^{-16}
	256	1.43844584209345	-9.92872348404375×10^{-7}	0	3.35×10^{-17}
8	8	1.43844584233805	-9.93098051612578×10^{-7}	6.86×10^{-10}	5.42×10^{-10}
	16	1.43844584209345	-9.92872348195993×10^{-7}	2.22×10^{-16}	2.13×10^{-16}
	32	1.43844584209345	-9.92872348473795×10^{-7}	2.22×10^{-16}	5.46×10^{-17}
	64	1.43844584209345	-9.92872348366740×10^{-7}	2.22×10^{-16}	6.03×10^{-17}
	128	1.43844584209345	-9.92872348252713×10^{-7}	6.66×10^{-16}	1.57×10^{-16}
	256	1.43844584209345	-9.92872348462600×10^{-7}	2.22×10^{-16}	2.38×10^{-17}

表 3.7　SSM により求めた実効屈折率と指標

Mode	$\check{\Gamma}$	n_{eff}	C_l	cond($[T(\gamma)]$)	Residual$\|\|[T(\gamma)]\{b\}\|\|_2$
HE_{11}^a	†	$1.445395346 - j3.151 \times 10^{-8}$	4.5×10^1	5.6×10^{14}	1.5×10^{-9}
HE_{11}^b	†	$1.445395346 - j3.151 \times 10^{-8}$	3.0×10^1	1.2×10^{15}	9.2×10^{-10}
TE_{01}	†	$1.438585801 - j4.986 \times 10^{-7}$	2.6×10^2	2.4×10^{13}	1.8×10^{-8}
HE_{21}^a	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	3.0×10^2	2.8×10^{13}	8.0×10^{-9}
HE_{21}^b	†	$1.438445842 - j9.929 \times 10^{-7}$	6.4×10^2	2.0×10^{13}	1.2×10^{-8}
TM_{01}	†	$1.438366726 - j1.374 \times 10^{-6}$	1.1×10^2	3.5×10^{13}	8.3×10^{-9}
$HE_{31}^{'}$	†	$1.430414041 - j2.218 \times 10^{-5}$	1.4×10^2	3.8×10^{13}	1.1×10^{-8}
EH_{11}^a	†	$1.429969412 - j1.577 \times 10^{-5}$	9.1×10^1	2.0×10^{14}	1.7×10^{-9}
EH_{11}^b	†	$1.429969412 - j1.577 \times 10^{-5}$	1.8×10^2	3.6×10^{13}	6.1×10^{-9}
$HE_{31}^{''}$	†	$1.429255296 - j9.337 \times 10^{-6}$	6.2×10^1	5.1×10^{14}	1.4×10^{-9}
HE_{12}^a	†	$1.426891656 - j3.517 \times 10^{-5}$	2.6×10^1	2.0×10^{14}	2.3×10^{-9}
HE_{12}^b	†	$1.426891656 - j3.517 \times 10^{-5}$	2.0×10^1	2.1×10^{14}	1.2×10^{-9}
Spurious	†	$1.435404169 + j9.516 \times 10^{-3}$	8.6×10^{14}	4.4	1.4×10^4
Spurious	†	$1.435762105 + j7.594 \times 10^{-3}$	9.7×10^{14}	5.5	1.3×10^4
Spurious	†	$1.435887637 + j6.066 \times 10^{-3}$	6.8×10^{14}	6.7	1.2×10^4
Spurious	†	$1.436283823 - j8.025 \times 10^{-3}$	1.7×10^{14}	2.4×10^2	1.5×10^2
Spurious	†	$1.442258732 + j1.231 \times 10^{-3}$	1.2×10^{14}	3.5×10^1	3.5×10^3
Spurious	†	$1.435805121 - j6.313 \times 10^{-4}$	1.0×10^{14}	2.3×10^1	3.3×10^3
Spurious		$1.440039344 + j1.895 \times 10^{-2}$	1.2×10^{15}	2.5	5.7×10^4
Spurious		$1.438628112 + j1.325 \times 10^{-2}$	9.1×10^{14}	3.8	2.8×10^4
Spurious		$1.442701139 + j1.216 \times 10^{-2}$	9.7×10^{14}	5.7	2.2×10^4
Spurious		$1.437140751 + j1.059 \times 10^{-2}$	7.1×10^{14}	4.5	1.7×10^4
Spurious		$1.444674731 - j1.200 \times 10^{-2}$	2.6×10^{14}	4.8×10^3	2.3
Spurious		$1.448227650 + j6.019 \times 10^{-4}$	3.1×10^{14}	3.2×10^4	5.6×10
Spurious		$1.439765453 - j1.037 \times 10^{-2}$	1.7×10^{12}	3.1×10^4	9.6
Spurious		$1.439787142 - j1.032 \times 10^{-2}$	1.9×10^{12}	5.6×10^4	7.9
Spurious		$1.442467816 - j8.435 \times 10^{-3}$	3.6×10^8	5.7×10^7	6.2×10^{-3}
Spurious		$1.442450805 - j8.421 \times 10^{-3}$	1.1×10^8	1.4×10^8	1.3×10^{-3}
Spurious		$1.442513175 - j8.379 \times 10^{-3}$	1.6×10^8	8.4×10^8	4.1×10^{-4}
Spurious		$1.442513176 - j8.379 \times 10^{-3}$	1.3×10^8	2.5×10^8	8.3×10^{-4}
Spurious		$1.439166614 - j9.808 \times 10^{-3}$	8.5×10^4	3.2×10^{11}	1.8×10^{-6}
Spurious		$1.439166614 - j9.808 \times 10^{-3}$	6.2×10^4	3.2×10^{12}	3.9×10^{-7}

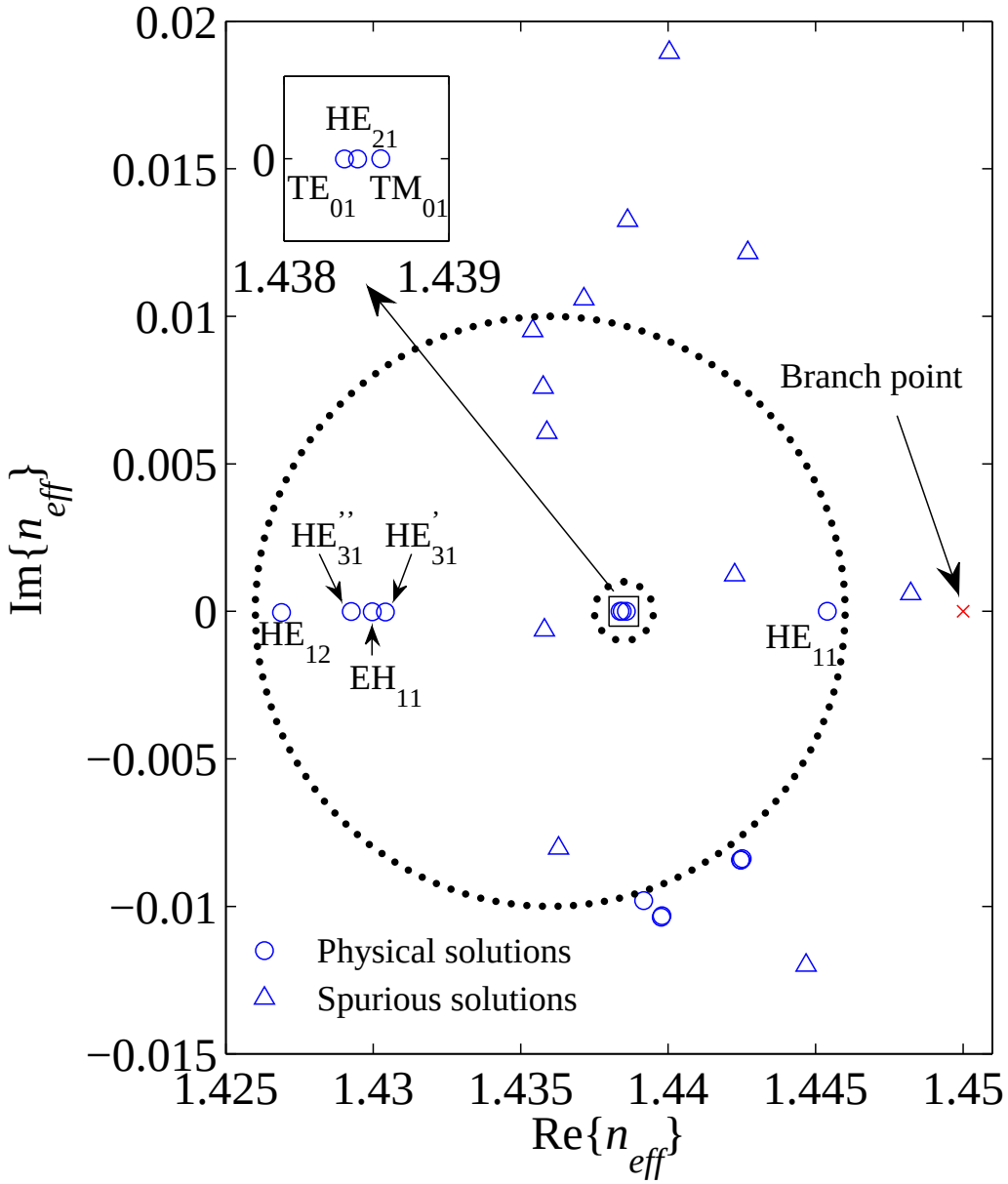


図 3.14　SSM により求めた固有値の分布

表 3.8　HE_{21}^{a} モードの実効屈折率，n_{eff}^{a} と n_{eff}^{b} の差の N_s 依存性

L	N_s	$\mathrm{Re}\{n_{eff}^{a}\}$	$\mathrm{Im}\{n_{eff}^{a}\}$	$\lvert\mathrm{Re}\{n_{eff}^{a}-n_{eff}^{b}\}\rvert$	$\lvert\mathrm{Im}\{n_{eff}^{a}-n_{eff}^{b}\}\rvert$
2	64	1.43846756509428	-4.26999807062678$\times10^{-5}$	8.35$\times10^{-4}$	8.75$\times10^{-3}$
	128	1.43844561377347	-8.45083123575611$\times10^{-7}$	6.51$\times10^{-4}$	5.37$\times10^{-4}$
	256	1.43844590166850	-9.49917946719141$\times10^{-7}$	5.97$\times10^{-8}$	4.28$\times10^{-8}$
	512	1.43844584209679	-9.92874526646277$\times10^{-7}$	2.03$\times10^{-10}$	1.08$\times10^{-9}$
4	64	1.43844587315592	-1.01019518297310$\times10^{-6}$	4.81$\times10^{-8}$	1.20$\times10^{-8}$
	128	1.43844584209332	-9.92872622695972$\times10^{-7}$	5.33$\times10^{-15}$	3.06$\times10^{-13}$
	256	1.43844584209339	-9.92872317588776$\times10^{-7}$	6.84$\times10^{-14}$	3.81$\times10^{-14}$
	512	1.43844584209346	-9.92872352113842$\times10^{-7}$	4.66$\times10^{-15}$	1.20$\times10^{-14}$
8	64	1.43844584209375	-9.92872060088400$\times10^{-7}$	5.91$\times10^{-13}$	4.42$\times10^{-13}$
	128	1.43844584209344	-9.92872345820167$\times10^{-7}$	9.55$\times10^{-15}$	3.13$\times10^{-15}$
	256	1.43844584209345	-9.92872349958413$\times10^{-7}$	4.22$\times10^{-15}$	1.35$\times10^{-15}$
	512	1.43844584209345	-9.92872358261832$\times10^{-7}$	2.89$\times10^{-15}$	1.40$\times10^{-14}$
16	64	1.43844584209344	-9.92872343080071$\times10^{-7}$	2.46$\times10^{-14}$	5.46$\times10^{-15}$
	128	1.43844584209345	-9.92872348377422$\times10^{-7}$	2.22$\times10^{-16}$	1.77$\times10^{-16}$
	256	1.43844584209345	-9.92872346477299$\times10^{-7}$	8.88$\times10^{-16}$	1.78$\times10^{-15}$
	512	1.43844584209345	-9.92872348750235$\times10^{-7}$	1.55$\times10^{-15}$	5.57$\times10^{-17}$

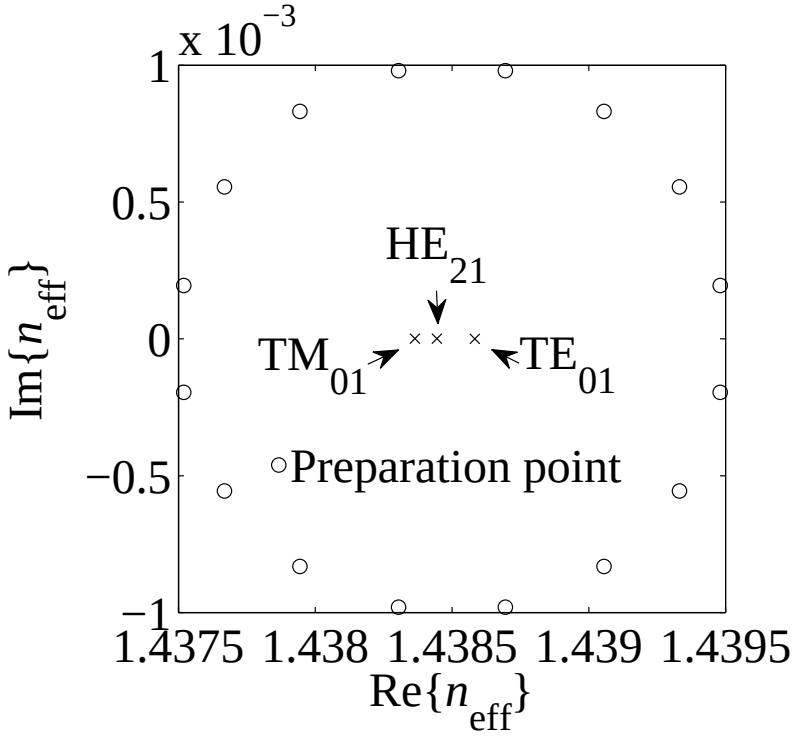


図 3.15　SSM の標本点と真の解

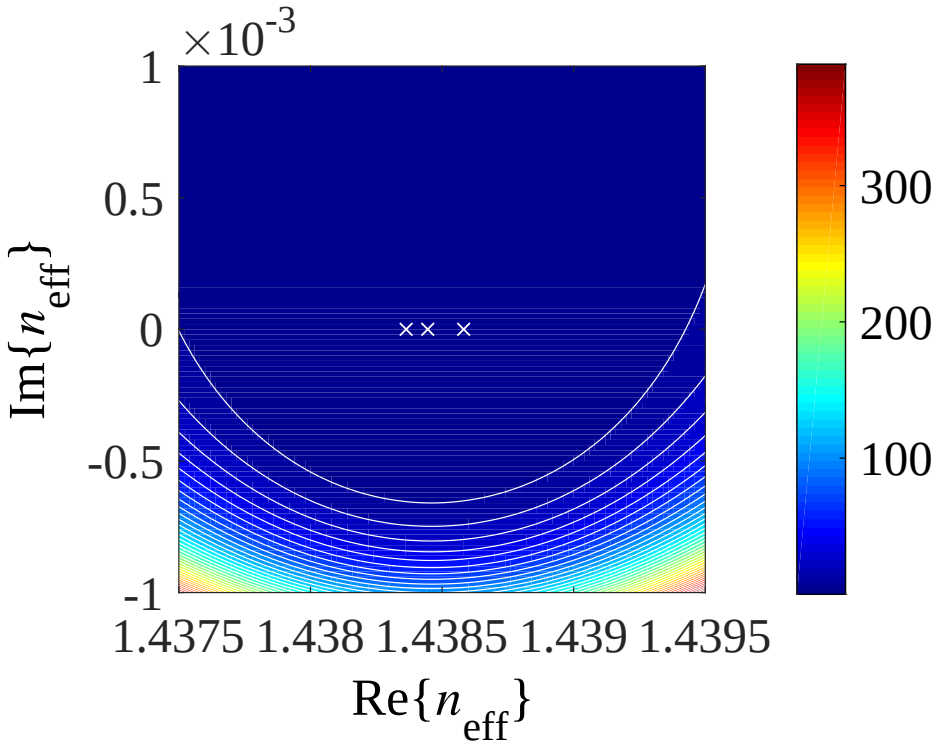
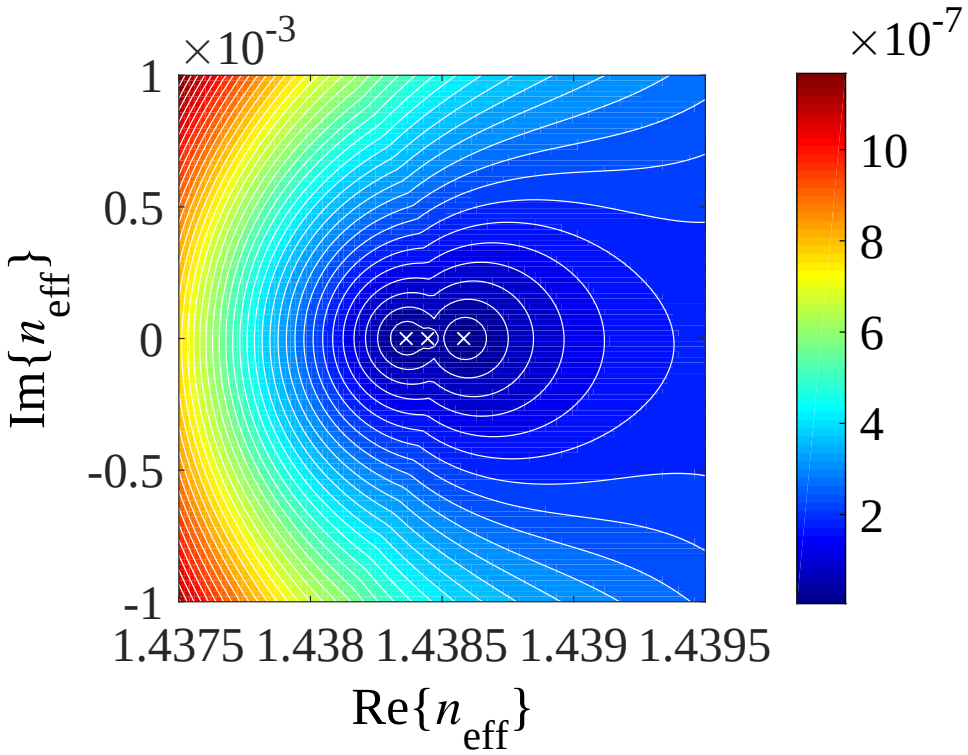
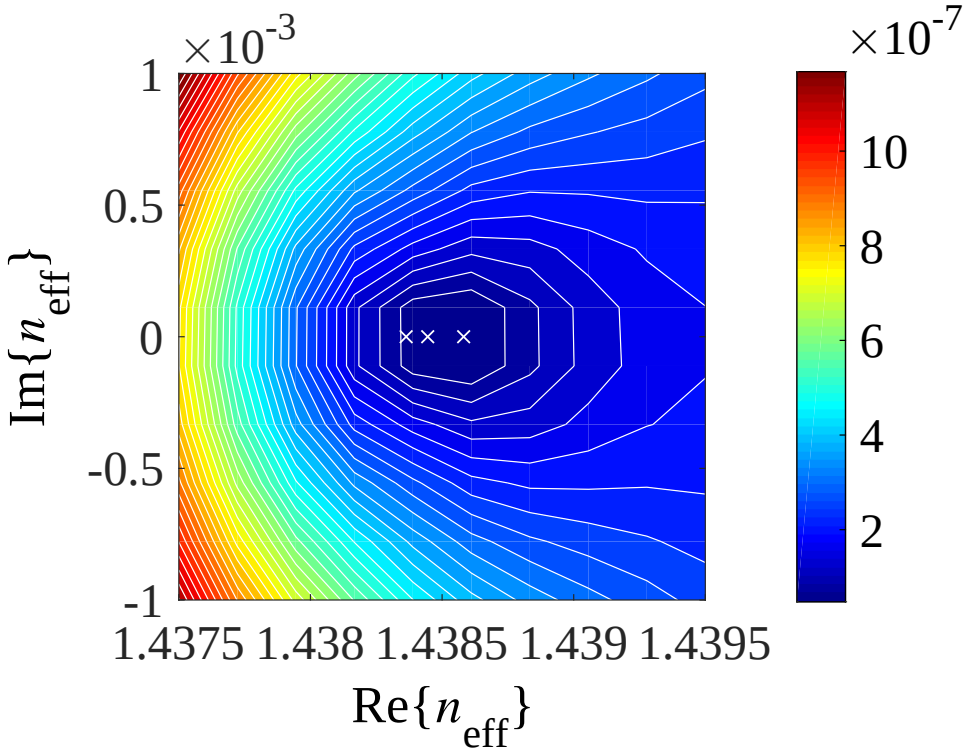


図 3.16　$|\det\{T(\gamma)]\}|$ の分布と真の解（$N_g = 100$）



(a) $N_g = 100$



(b) $N_g = 10$

図 3.17　条件数の逆数 $1/\mathrm{cond}\{[T(\gamma)]\}$ の分布と真の解

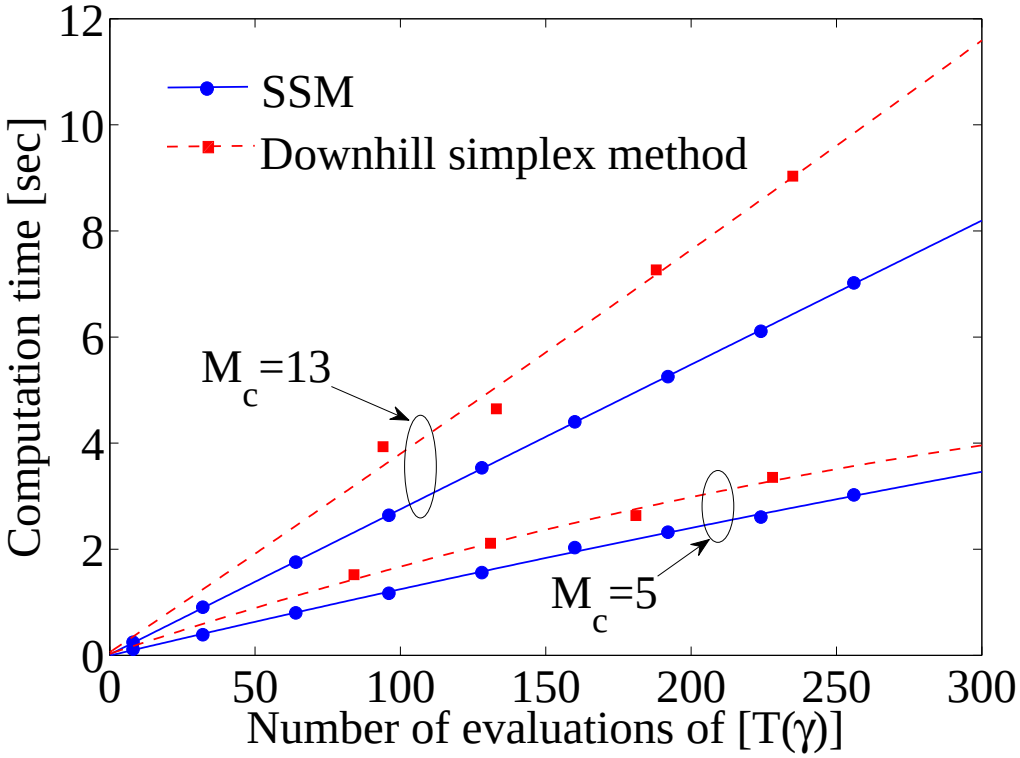


図 3.18　SSM と DSM の計算時間

4　ハイブリッドトレフツ有限要素解析法と SSM による導波路伝搬特性解析

4.1　まえがき

高速な自動最適設計を目的とした，電磁波導波路の伝搬特性解析法として新たに ハイブリッドトレフツ有限要素法 (HTFEM) の定式化を第 2 章で述べ，HTFEM の非線形固有値問題の高速解法として，Sakurai-Sugiura 射影法 (SSM) が有用であることを第 3 章に示した．本章では，まず，単純な構造で縮退モードを有する円筒誘電体導波路を例に数値計算を行い，解析解との比較により HTFEM 解析法の妥当性を示す．次に，ホーリーファイバを対象として，導波路伝搬特性解析用の HTFEM の開発を行い，数値解析例から解析精度と計算時間を検討する．ホールを含んだ円環状の不連続領域をベクトル要素で分割し，それ以外の一様領域をトレフツ要素で分割した数値計算結果を示す．この計算結果をベクトル要素を使用した文献値 [5]，[12]，[11]，Multipole Method による文献値 [38]，有限要素シミュレータである COMSOL Multiphysics®(COMSOL) を用いた計算結果と比較して，妥当性，有用性を示す．

4.2　伝搬方向に構造が一様な場合の HTFEM の数値計算例

まず，円筒誘電体導波路を解析対象として，トレフツ要素のみで導波路構造をモデル化した数値例を示している．次に，ホーリーファイバを解析対象として，トレフツ要素とベクトル要素を併用して導波路構造をモデル化した数値例を示している．なお，円筒誘電体導波路の場合は h-form，ホーリーファイバの場合では e-form で計算を行っている．

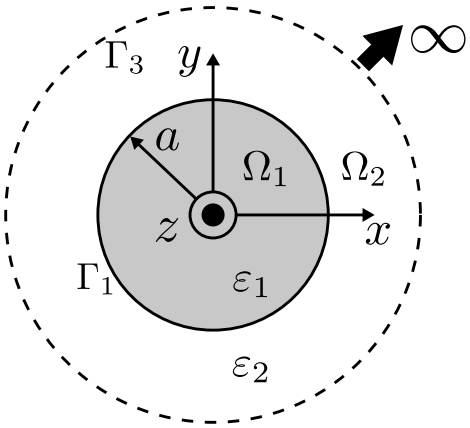


図 4.1　円筒誘電体導波路の断面図

4.2.1 円筒誘電体導波路

本節では，トレフツ要素のみで分割可能な構造で，縮退モードが伝搬し，解析解を有する図 4.1 に示す円筒誘電体導波路を考える．図 2.1 の導波路において，不連続領域を取除き（$a_1 = a_2 = a$），比誘電率 $\varepsilon_1 = 2.5$，$\varepsilon_2 = 1$ としたものである．ここで示す HTFEM の計算結果は，導波路の 2 領域をそれぞれ 1 個のトレフツ要素で分割した．SSM から導かれる固有値問題の係数行列では 0,1,2 次のモーメント（$M = 2$）を一次独立な 4 つの列ベクトル（$L = 4$）について計算した．なお，$L = 4$ は次のように定めた．構造の対称性から，ϕ 方向に 90 度だけ回転した界分布の固有値が縮退する．また調べる範囲で，TM_{01} と HE_{21} あるいは HE_{12} と HE_{31} が縮退する場合があることが分っているので，$L =$(対称性の 2) $\times$ (モード縮退数の 2)$= 4$ とする．本節では求めた界分布をモードの判定に利用しており，解析解の界分布と一致することを重なり積分により確かめている．

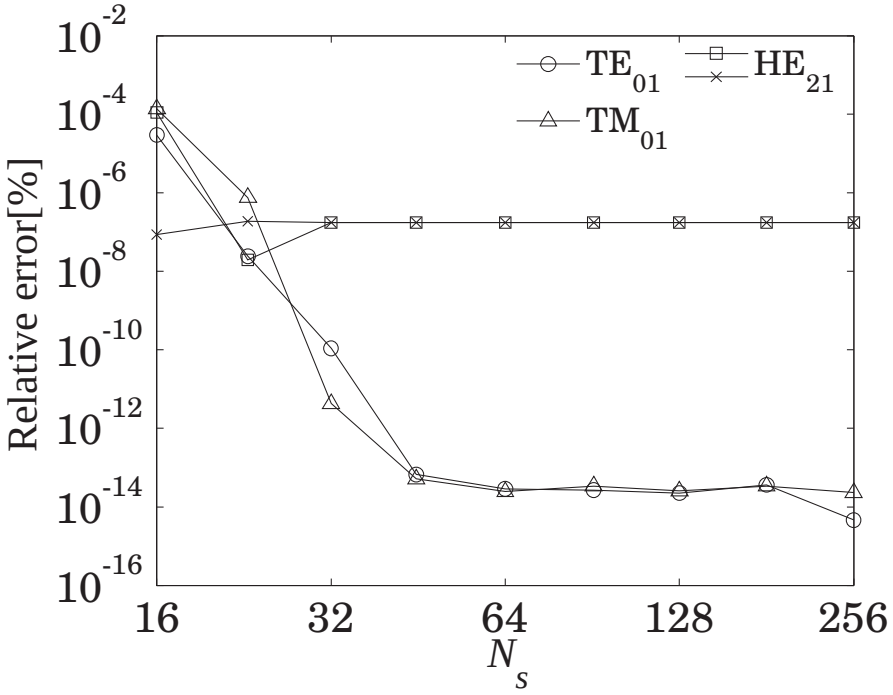
なお導波モードは減衰しないため，複素伝搬定数の虚部は解析的にゼロであり，実部である位相定数を求める問題であるが，SSM では複素伝搬定数平面で固有値を計算するため，小さな虚部を有する複素伝搬定数が求まる．

図 4.2 は，HTFEM で算出した位相定数 $\beta_h = \mathrm{Re}\{\hat{\gamma}_l\}$ と解析解の位相定数 γ_a との相対誤差 $|\frac{\beta_h}{\gamma_a} - 1|$ の積分点数 N_s 依存性を調べたものである．図 4.2(a) は TM_{01}，HE_{21} モードが縮退する $k_0 a = 3.0943817$ について調べたもので，図 4.2(b) は HE_{12}，HE_{31} モードが縮退する $k_0 a = 3.6870863$ について調べたものである．HTFEM の計算では，境界 Γ_1 を 64 等分割，空間高調波展開の打切り項数 M_c を 64 として，SSM では積分路の円の半径を $\rho/k_0 = 0.1$，中心を図 4.2(a) では $o/k_0 = 1.2$，図 4.2(b) では $o/k_0 = 1.12$ とした．求解範囲となる円内では，(a) では TE_{01}，TM_{01}，HE_{21} モード，(b) では EH_{01}，HE_{12}，HE_{31} モードが伝搬する．N_s が増加すると，HTFEM で求めた結果はいずれも，一定値に収束している．解が解析解に近づかないのは，トレフツ要素の接続境界 Γ_1 の分割数を $D = 64$，空間高調波展開の打ち切り項数を $M_\mathrm{c} = 64$ と一定値としたためである．とくに HE_{21} モードでは，図示した範囲の N_s に依らず一定となっているが，これは D，M_c が 64 での収束値に既に達しているためである．また，界分布を式 (2.4)，(2.5) で展開したので，左回りと右回りの界が存在するために HE_{21}，EH_{11}，HE_{12}，HE_{31} モードは 2 つの解が求まっている．

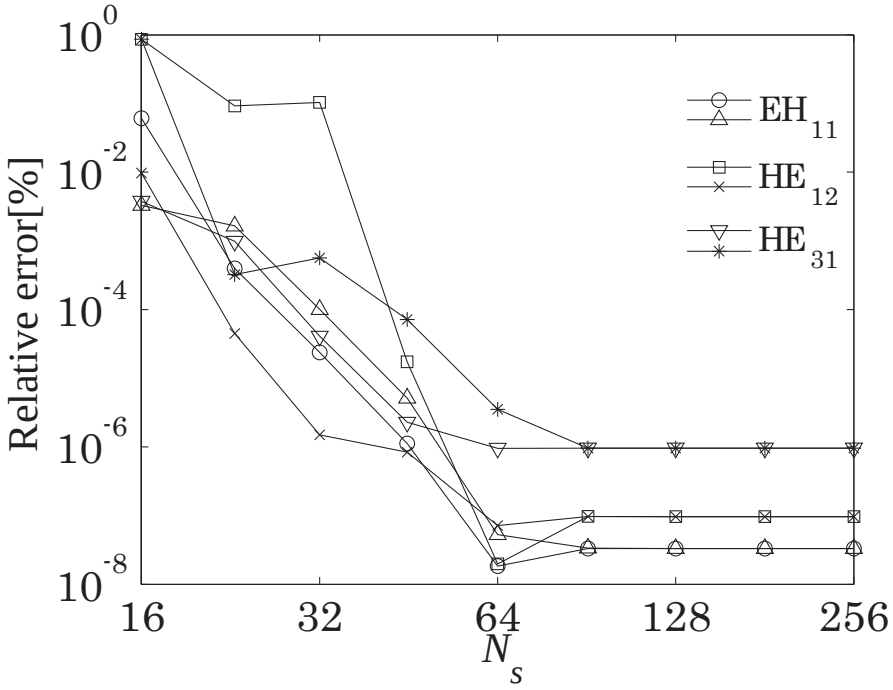
図 4.3，4.4 は HE_{21} モードと TE_{01} モードの磁界の z 成分である．HTFEM と解析解により求めた界分布が一致しており，矩形領域 $-2a \leq x, y \leq 2a$ の 200×200 格子点を用いて数値積分した界分布の重なり積分の値が 6 桁以上一致ことも確認している．

次に，図 4.2 に示したように，算出した位相定数が収束した $N_s = 128$ に積分点数を固定し，接続境界の分割数 D と打切りモード項数 M_c を同じ値として，値 $D = M_\mathrm{c}$ を変えて相対誤差 $|\frac{\beta_h}{\gamma_a} - 1|$ を調べた結果を図 4.5 に示す．なお積分路は，図 4.2 に示した場合と同一である．図 4.5(a) の TE_{01} と TM_{01} の縮退モードを除くと，残りの 4 つのモードの位相定数の誤差は，単調に減少している．図示した 5 点で直線近似すると，分割数 D のおよそ -5.2 乗で収束している．TE_{01}，TM_{01} の縮退モードの誤差は，D に依らず $10^{-13}\%$ 程度となっている．これは解の誤差が倍精度演算の誤差程度となっているためと考えられる．

図 4.6 は，分散曲線を調べたものである．ここで，$D = 64$，$M_{\mathrm{c}} = 64$，$N_s = 128$ として，積分路の円の中心と半径を，解が円内部に位置するように適宜変更した．位相定数 β の計算結果は，いずれのモードでも，解析解と一致している．

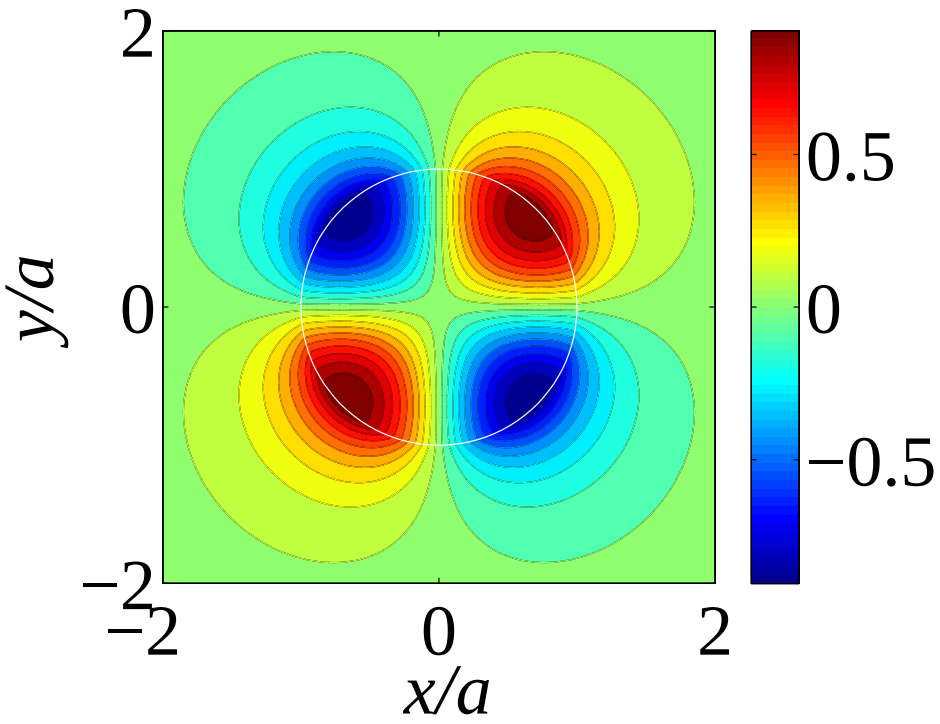


(a) $k_0a = 3.0943817$

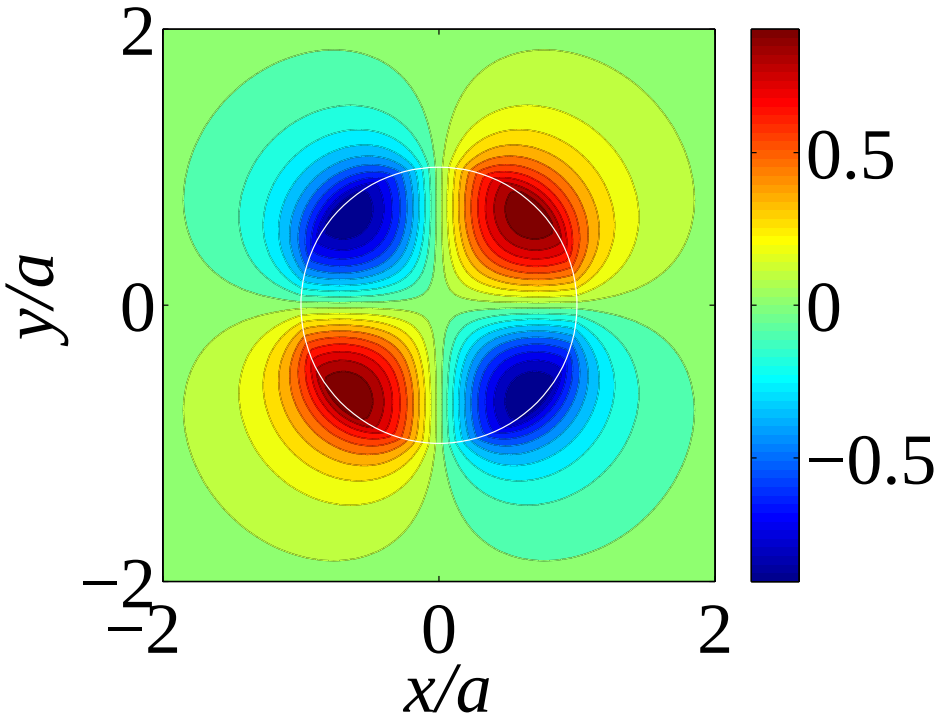


(b) $k_0a = 3.6870863$

図 4.2　位相定数 β の相対誤差の標本点数 N_s 依存性

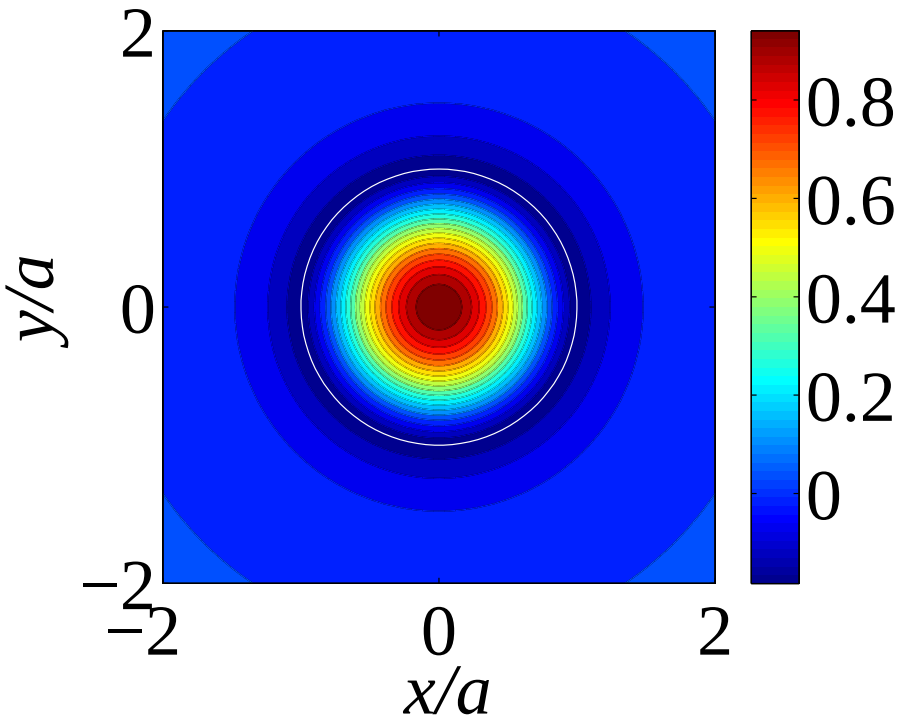


(a) HTFEM

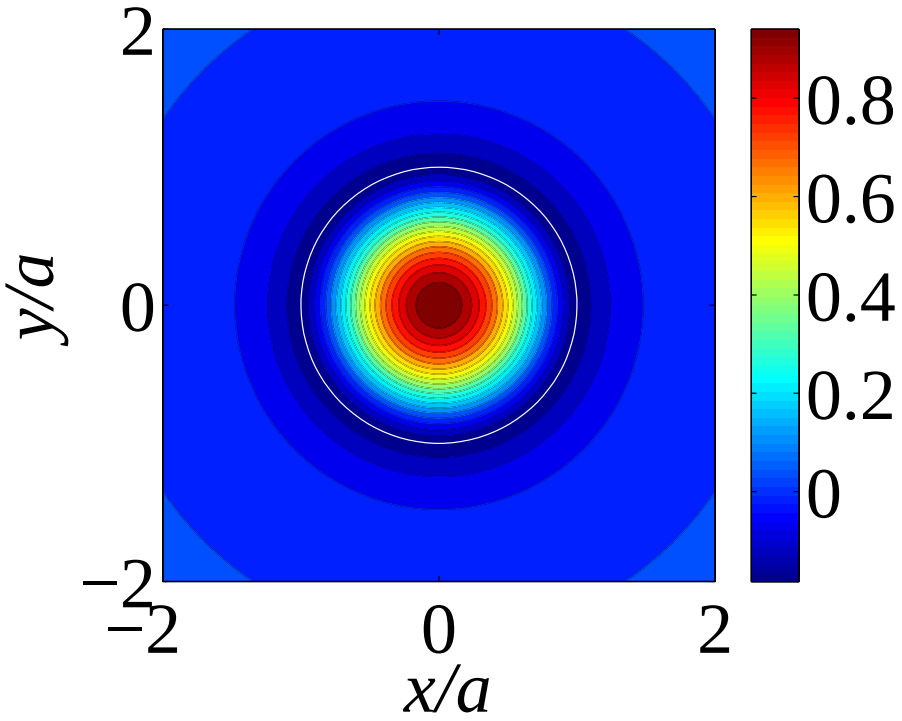


(b) 解析解

図 4.3　HE_{21} モードの磁界の z 成分

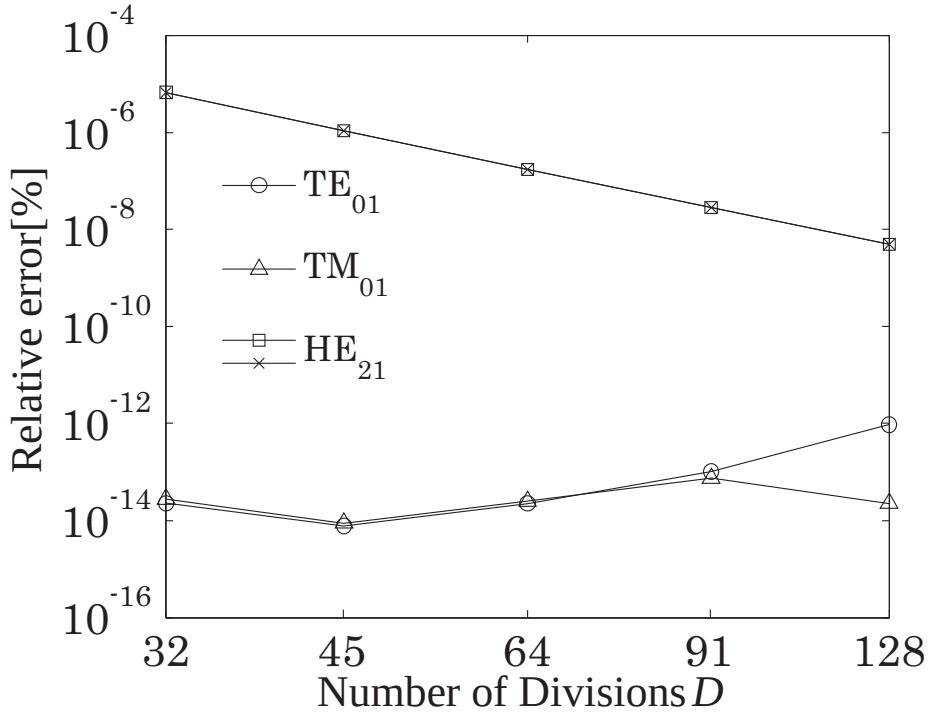


(a) HTFEM

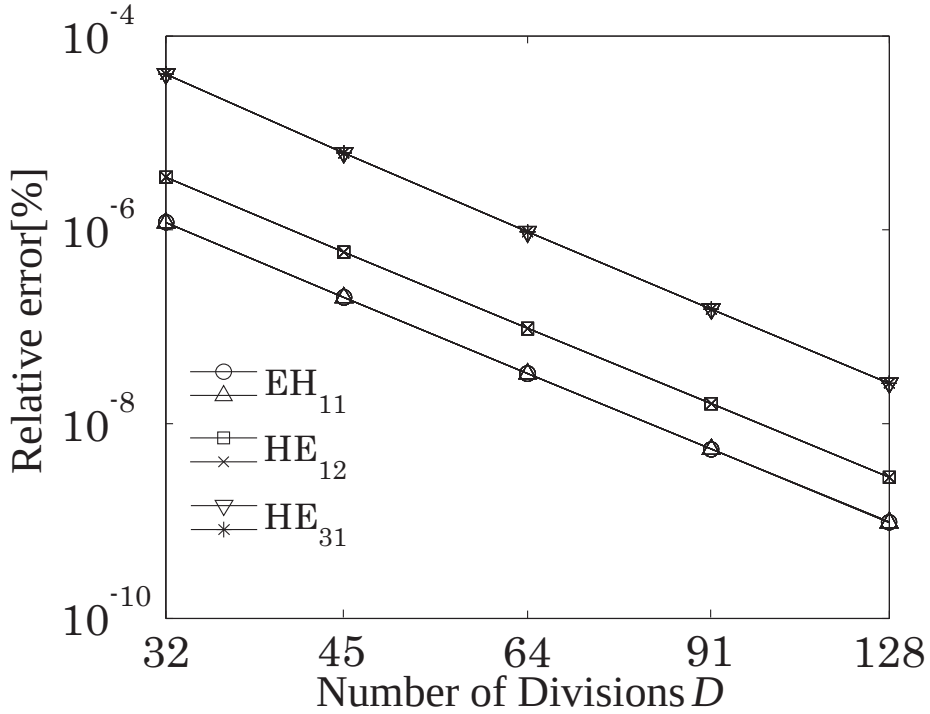


(b) 解析解

図 4.4　TE_{01} モードの磁界の z 成分

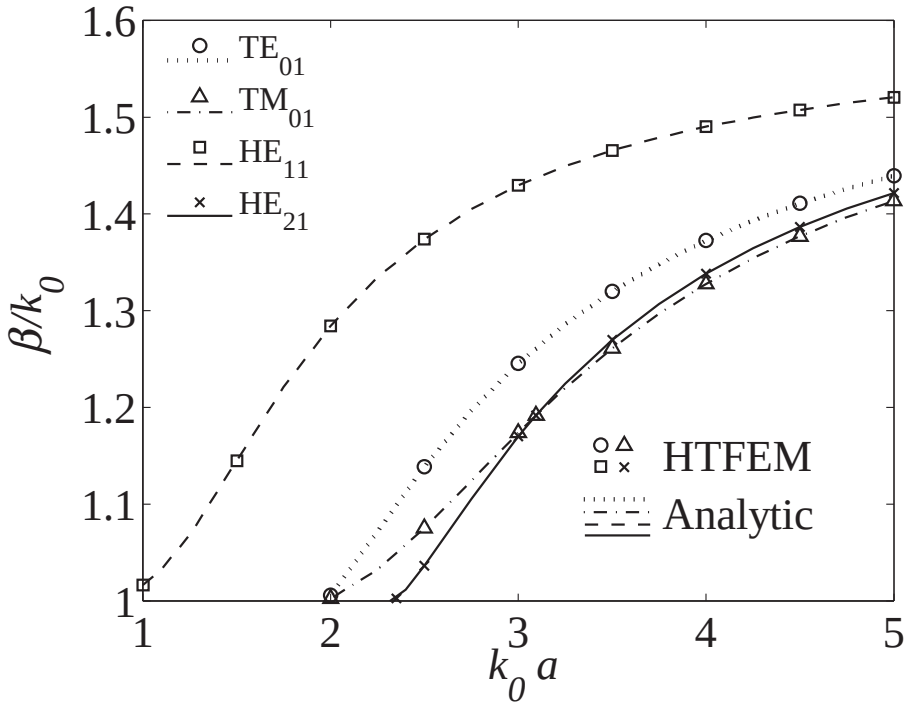


(a) $k_0a = 3.0943817$

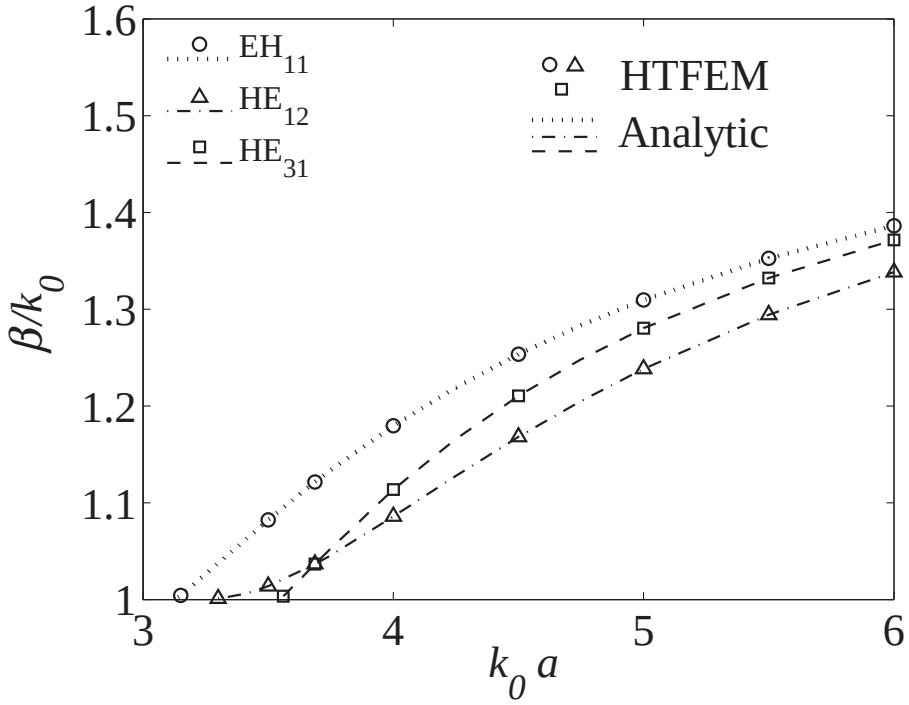


(b) $k_0a = 3.6870863$

図 4.5　位相定数 β の相対誤差の分割数 D 依存性



(a) HE_{11}，TE_{01}，TM_{11}，HE_{21} モード



(b) EH_{11}，HE_{12}，HE_{31} モード

図 4.6　円筒誘電体導波路の分散特性

表 4.1　規格化伝搬定数 $\hat{\gamma}/k_0$, F_l

(a) $k_0a = 3.0943817$, $o/k_0 = 1.2$, $\rho/k_0 = 0.1$

	HTFEM			Analytic
Mode		$\hat{\gamma}_l/k_0$	F_l	γ_a/k_0
TE_{01}	†	$1.26175 + j5.15948 \times 10^{-17}$	4.13×10^{-2}	1.26175
TM_{01}	†	$1.19173 - j3.03396 \times 10^{-16}$	3.56×10^{-2}	1.19173
HE_{21}	†	$1.19173 - j1.16663 \times 10^{-14}$	1.24×10^{-5}	1.19173
HE_{21}	†	$1.19173 + j3.42619 \times 10^{-15}$	2.53×10^{-5}	1.19173
-	†	$1.27748 + j1.14703 \times 10^{-2}$	1.73×10^{-30}	-
-	†	$1.22155 + j1.71083 \times 10^{-2}$	1.58×10^{-30}	-
-		$1.18852 + j2.33648 \times 10^{-1}$	7.80×10^{-31}	-
-		$1.07439 + j6.01875 \times 10^{-3}$	1.14×10^{-29}	-

(b) $k_0a = 3.6870863$, $o/k_0 = 1.12$, $\rho/k_0 = 0.1$

	HTFEM			Analytic
Mode		$\hat{\gamma}_l/k_0$	F_l	γ_a/k_0
EH_{11}	†	$1.12156 - j1.22282 \times 10^{-14}$	1.04×10^{-4}	1.12156
EH_{11}	†	$1.12156 - j7.42678 \times 10^{-15}$	2.22×10^{-4}	1.12156
HE_{12}	†	$1.03665 - j1.62447 \times 10^{-14}$	1.62×10^{-5}	1.03665
HE_{12}	†	$1.03665 - j1.29023 \times 10^{-15}$	2.02×10^{-3}	1.03665
HE_{31}	†	$1.03665 - j1.28905 \times 10^{-16}$	6.26×10^{-2}	1.03665
HE_{31}	†	$1.03665 - j1.73553 \times 10^{-14}$	2.24×10^{-5}	1.03665
-	†	$1.09302 - j4.96942 \times 10^{-2}$	6.182×10^{-30}	–
-		$1.22255 - j4.11396 \times 10^{-2}$	1.21×10^{-29}	–

u

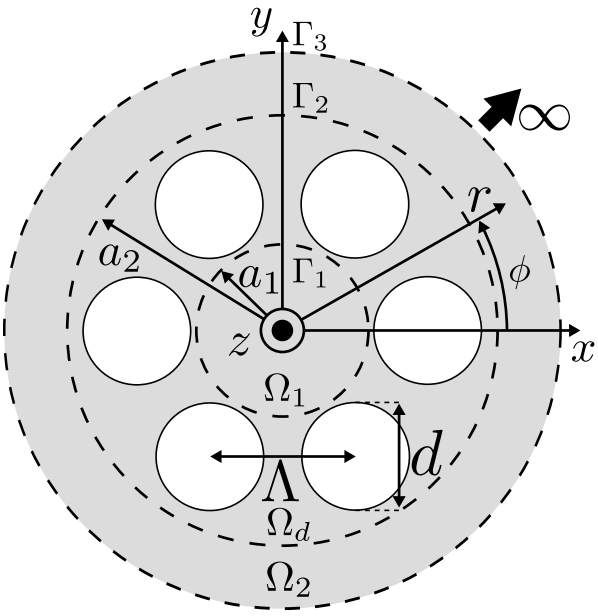


図 4.7　ホーリーファイバの断面図

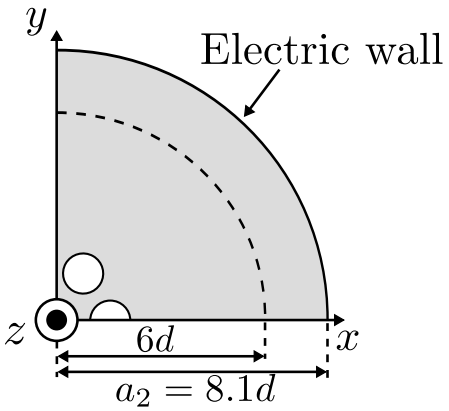


図 4.8　対称，反対称条件を用いたホーリーファイバの断面図

4.2.2　ホーリーファイバ

図 4.7 に示す z 方向へ無限に長いホーリーファイバを考える [5]．ホールは真空とし，ホール以外の領域の比誘電率 ε_r は，波長依存性を持つものとする．また，ホールの直径 d，隣り合うホールの中心間の長さ $\Lambda = 1.35d$ とする．

HTFEM を用いた解析では，$a_1 = 0.8d$，$a_2 = 2d$ として，ホールを含む不連続領域 Ω_d を図 2.2 のベクトル要素，一様領域 Ω_1, Ω_2 をそれぞれ一つのトレフツ要素で分割を行う．ベクトル要素とトレフツ要素の境界である Γ_1，Γ_2 の分割数と空間高調波の打ち切り項数 M_c を等しくしている．

SSM のパラメータは，$N_s = 128$，$M = 2$，$L = 4$ である．

表 4.2 は $k_0 d = \pi/0.145$, $\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$ の場合の実効屈折率 $n_{\mathrm{eff},l}(= \hat{\gamma}_l/k_0)$ の計算結果を示したものである．ここで, 離散化電界の未知数を 52128 とし, SSM の周回積分路の円の半径 $\rho/k_0 = 10^{-3}$ とし，中心 o/k_0 は求めるモードごとに適宜変更した．HTFEM による結果は他の解析法による文献値 [11]，[12]，[38] と実部が良く一致している．また，HE_{31}^b モードでは，表 3.7 の SSM を用いた Multipole method から求まる n_{eff} の実部が 1.430414041 であり，文献 [38] の結果である 1.430175 よりも HTFEM と近い値となっている．虚部は，文献 [12] の結果よりも Multipole Method[38]，Vector FDM-ABC[11] に近い値となっている．

$k_0 d = \pi/0.155$，$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$ とし，HE_{11}^a，HE_{11}^b モードを解析した結果を表 4.3 に示す．ここで，SSM のパラメータは，$\rho/k_0 = 10^{-4}$，$o/k_0 = 1.4448$ とした．モード名が $-$ のものは，ブロック版 SSM の求解時に混入する非物理解である．また HTFEM の結果中の括弧内の値は，式 (3.16) の F_l を計算したものである．非物理解に対応する F_l は物理解に対応する F_l よりも十分小さく，文献 [58] と同様に，これらを指標として解の判別が可能であることが確かめられる．比較のため，COMSOL を用いた結果を表 4.3 に示した．解析モデルは断面全体，あるいは対称性を用いて図 4.8 に示す 1/4 領域とし，文献 [5] と同様に，$a_2 = 8.1d$ を電気壁とする．完全整合層（Perfectly matched layer:PML）を使用する場合には，$6d \leq r \leq a_2$ を PML 材料とし，PML scaling factor を 2，PML order を 1 として，r 方向の coordinate stretching variable を

$$s_r = \frac{4\pi(1-j)(r-6d)}{2.1dk_0\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{4.1}$$

とした．図 2.2 に示したベクトル要素を用いて分割し, 一般化固有値問題を解いた．未知数 (DOF) は，各解析法で同程度になるように HTFEM では全断面 52128，COMSOL では，1/4 断面あるいは全断面上で，それぞれ，64461 と 64021 とした．表 4.3 から，HTFEM と COMSOL の実効屈折率の実部の計算結果は 7 桁一致していることがわかる．

図 4.9，4.10 は $k_0 d = \pi/0.145$，$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$ の場合での HE_{11} モードと TE_{01} モードの電界の z 成分を示したものである．HTFEM と COMSOL により求めた界分布が一致しており，正方形領域 $-2d \leq x, y \leq 2d$ の 200×200 の格子点を用いた数値積分により算出した重なり積分値の 5 桁以上の一致を確認している．また，他の表 4.3 中のモードの界分布も，HTFEM と COMSOL による計算結果が一致していることを重なり積分から確認している．なお，ベクトル要素で分割した領域を重なり積分で評価する際には，数値積分に必要となる要素内部の界の値を，固有ベクトルとベクトル要素の補間関数を用いて算出している．

図 4.11 は $k_0 d = \pi/0.155$，$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$ とし，縮退する 2 モード HE_{11}^a，HE_{11}^b の実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ の未知数依存性を調べたものである．文献 [5] の結果は，三角形アイソパラメトリック要素を用いて，1/4 領域を解析したものである．全断面を解析した HTFEM（■，×）と COMSOL（•，▲）の結果を比較すると，HTFEM の方が少ない未知数で収束値に近付いている．また HTFEM の結果は，COMSOL，文献値 [5] の対称性を利用した 1/4 領域の解析結果と同程度の未知数で収束している．ここでは示さないが，未知数が 117074 の HTFEM と未知数が 126029 の COMSOL の実効屈折率の実部は数値的に 7 桁一致していた．HTFEM の未知数が少ないと実

効屈折率が単調に増加しないのは，原因は明確ではないが，未知数が少ないため界分布の近似が不十分なためと考えられる．

図 4.12 は $k_0 d = \pi/0.155$，$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$ とし，縮退する 2 モード HE_{11}^a，HE_{11}^b の実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ の差の未知数依存性を調べたものである．未知数が増えると，いずれの計算結果でも誤差が減少している．未知数が 30000 程度までは同程度の誤差であるが，40000 を超えると HTFEM の計算結果の誤差が最も小さい．なお，30000 から 70000 の範囲では HTFEM の誤差は図 4.12 の下限の 10^{-16} よりも小さくなっていた．

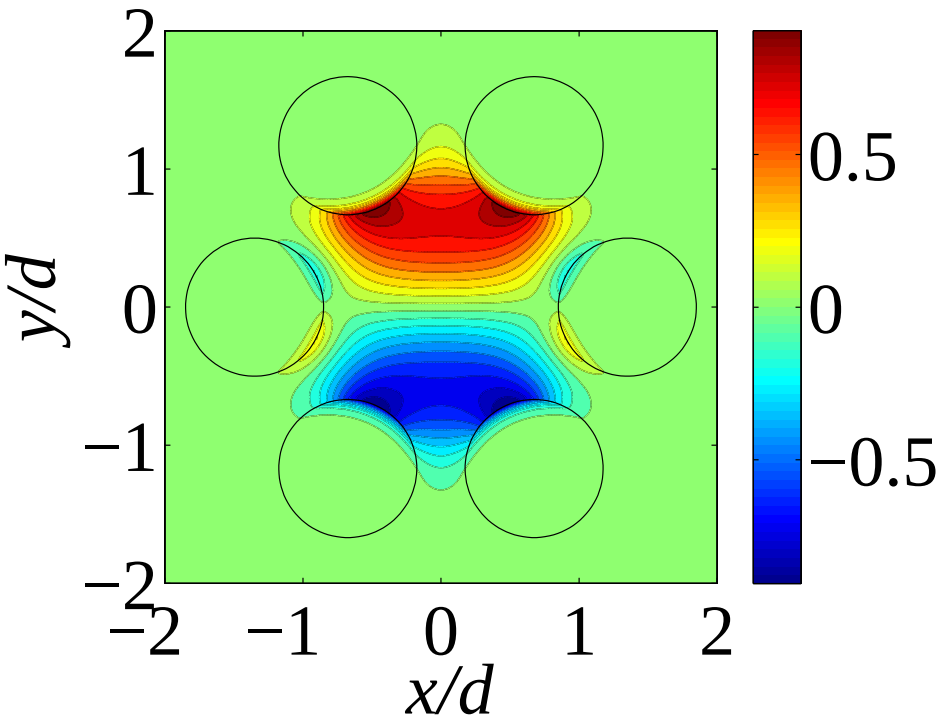
図 4.13 は誘電体を $\mathrm{SiO_2}$[101] として実効屈折率と損失の波長依存性を調べたものである．HTFEM の未知数は 52128 としている．SSM のパラメータ ρ/k_0，o/k_0，M，L は適宜変更した．分散曲線はいずれのモードでも文献値 [12] と一致している．損失は，TE_{01}，TM_{01}，HE_{21}，HE_{11} について傾向が一致しており，これらのモードより損失が大きい HE_{31}^a，HE_{31}^b，EH_{11}^a，EH_{11}^b モードでは文献 [12] と一致している．これは，表 4.2 に示したように，HTFEM の結果と文献値 [12] とでは，実効屈折率の実部の一致度に比べ，損失に対応する虚部の一致度が低いためであると考えられる．

表 4.2　ホーリーファイバの実効屈折率 $n_{\mathrm{eff},l}$（$k_0 d = \pi/0.145$）

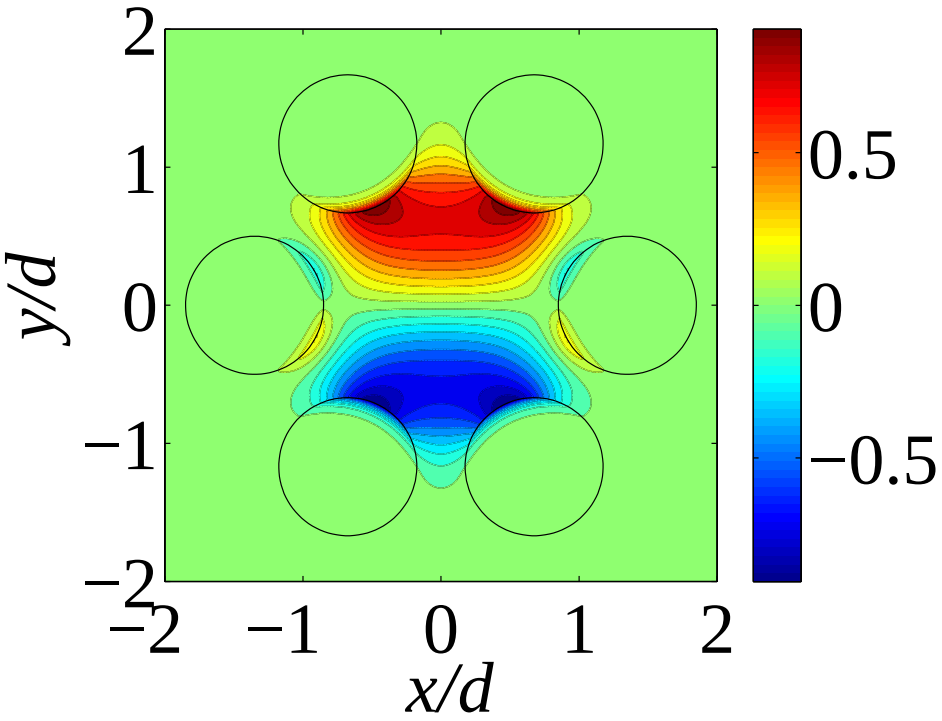
	HTFEM	FEM[12]	Multipole Method[38]	Vector FDM-ABC[11]
HE_{11}^{a}	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$	$1.4453935-j4.11\times10^{-8}$	$1.4453953-j3.15\times10^{-8}$	$1.4453954-j3.07\times10^{-8}$
HE_{11}^{b}	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$	$1.4453931-j4.12\times10^{-8}$		
TE_{01}	$1.4385838-j5.31\times10^{-7}$	$1.4385760-j3.97\times10^{-7}$	$1.4385858-j4.99\times10^{-7}$	$1.4385890-j5.43\times10^{-7}$
HE_{21}^{a}	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$	$1.4384419-j7.13\times10^{-7}$	$1.4384458-j9.93\times10^{-7}$	$1.4384442-j9.62\times10^{-7}$
HE_{21}^{b}	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$	$1.4384376-j7.11\times10^{-7}$		
TM_{01}	$1.4383648-j1.41\times10^{-6}$	$1.4383622-j1.03\times10^{-6}$	$1.4383667-j1.37\times10^{-6}$	$1.4383643-j1.38\times10^{-6}$
HE_{31}^{b}	$1.4304079-j2.15\times10^{-5}$	$1.4303848-j2.25\times10^{-5}$	$1.430175-j2.22\times10^{-5}$	
EH_{11}^{a}	$1.4299564-j1.59\times10^{-5}$	$1.4299517-j1.67\times10^{-5}$	$1.4299694-j1.58\times10^{-5}$	
EH_{11}^{b}	$1.4299564-j1.59\times10^{-5}$	$1.4299459-j1.68\times10^{-5}$		
HE_{31}^{a}	$1.4292498-j8.73\times10^{-6}$	$1.4292608-j9.17\times10^{-6}$	$1.4292553-j9.34\times10^{-6}$	

表 4.3　ホーリーファイバの実効屈折率 $n_{\mathrm{eff},l}$（$k_0 d = \pi/0.155$）

	HTFEM		COMSOL		
	Whole cross section		Quarter cross section		Whole cross section
DOF	52128		64461（PML）	64461	64021
HE_{11}^{a}	$1.44476742-j4.21430062\times10^{-8}$	(2.51×10^{-2})	$1.44476722-j4.11996394\times10^{-8}$	1.44476719	1.44476668
HE_{11}^{b}	$1.44476742-j4.21430062\times10^{-8}$	(3.92×10^{-2})	$1.44476722-j4.11996761\times10^{-8}$	1.44476719	1.44476668
-	$1.44607428+j3.21159451\times10^{-7}$	(8.70×10^{-26})	-	-	-
-	$1.44610146+j4.51839704\times10^{-6}$	(7.15×10^{-26})	-	-	-
-	$1.44451291+j8.59158003\times10^{-7}$	(3.99×10^{-26})	-	-	-
-	$1.44451516+j4.89098973\times10^{-7}$	(2.19×10^{-26})	-	-	-
-	$1.44509009-j1.34127797\times10^{-7}$	(2.02×10^{-26})	-	-	-
-	$1.44508935+j1.39800745\times10^{-6}$	(4.63×10^{-27})	-	-	-

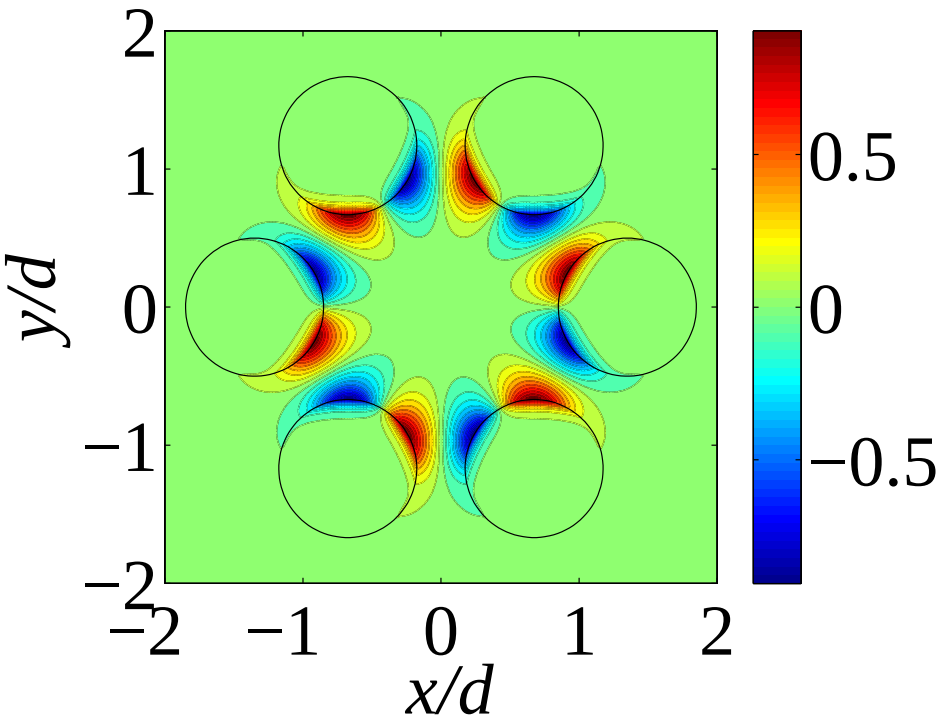


(a) HTFEM

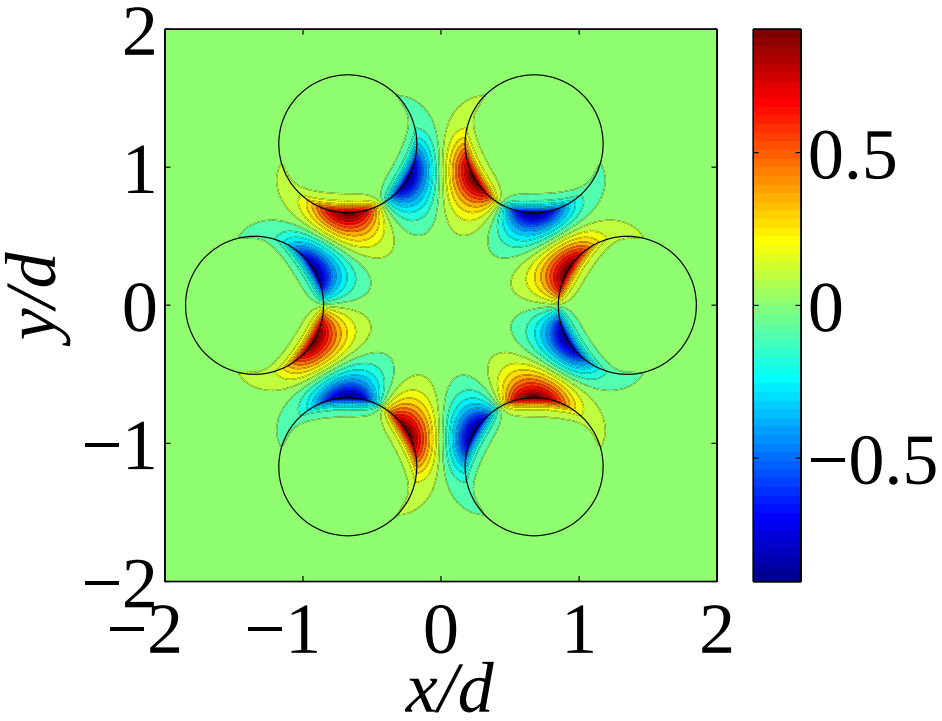


(b) FEM

図 4.9　HE_{11} モードの電界の z 成分



(a) HTFEM



(b) FEM

図 4.10　TE_{01} モードの電界の z 成分

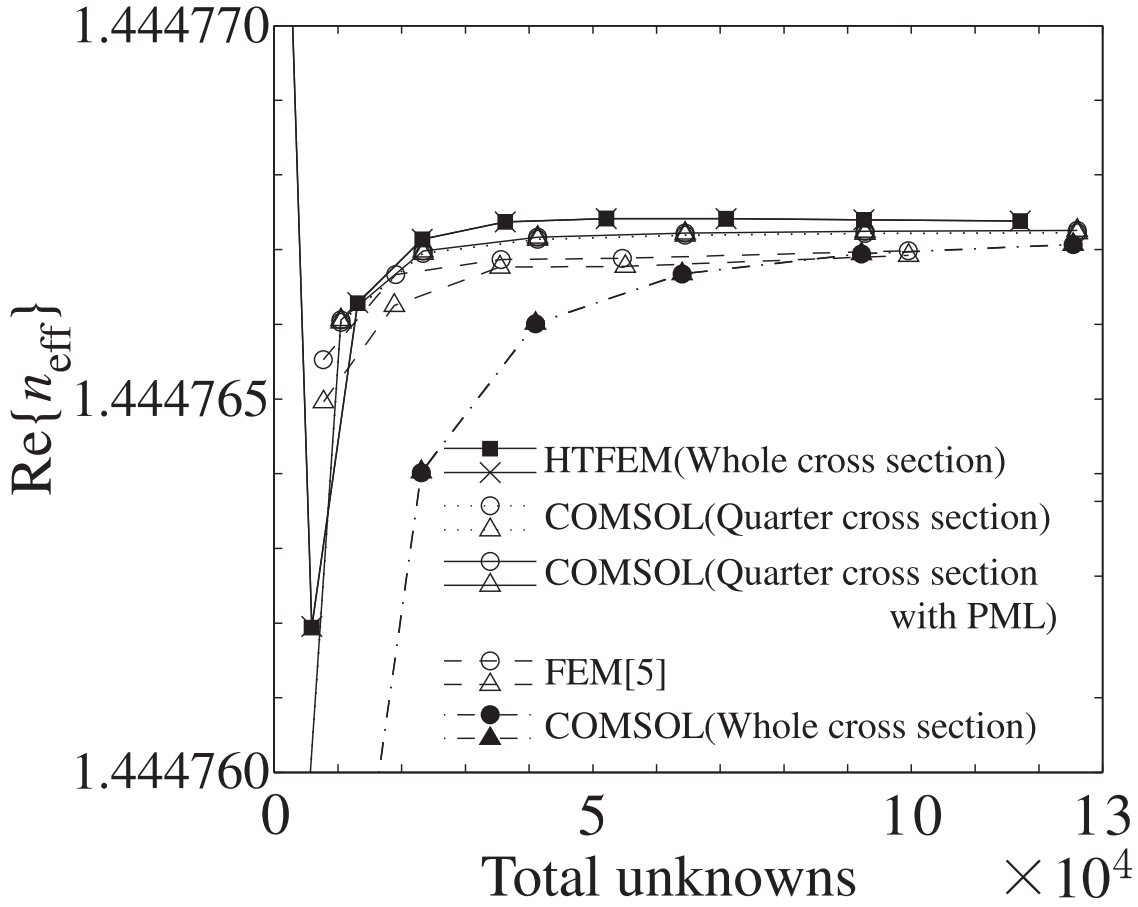


図 4.11　実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ の未知数依存性

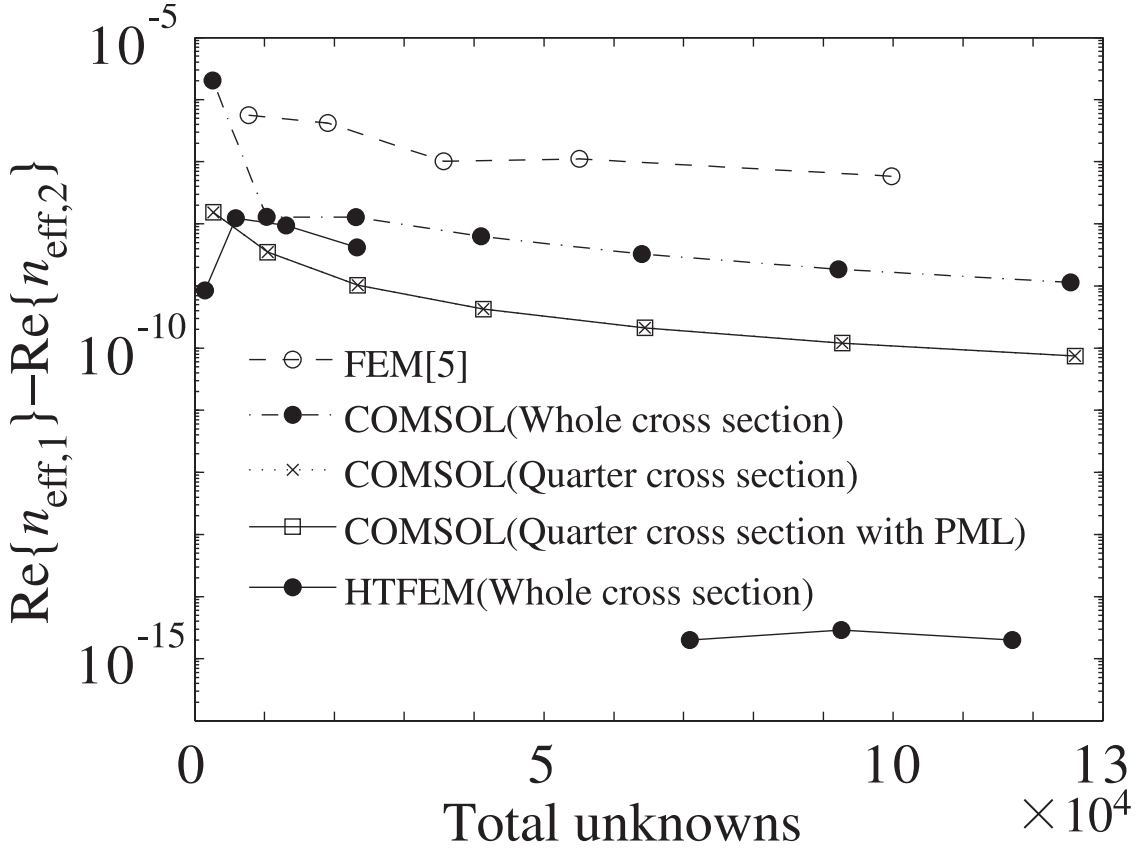
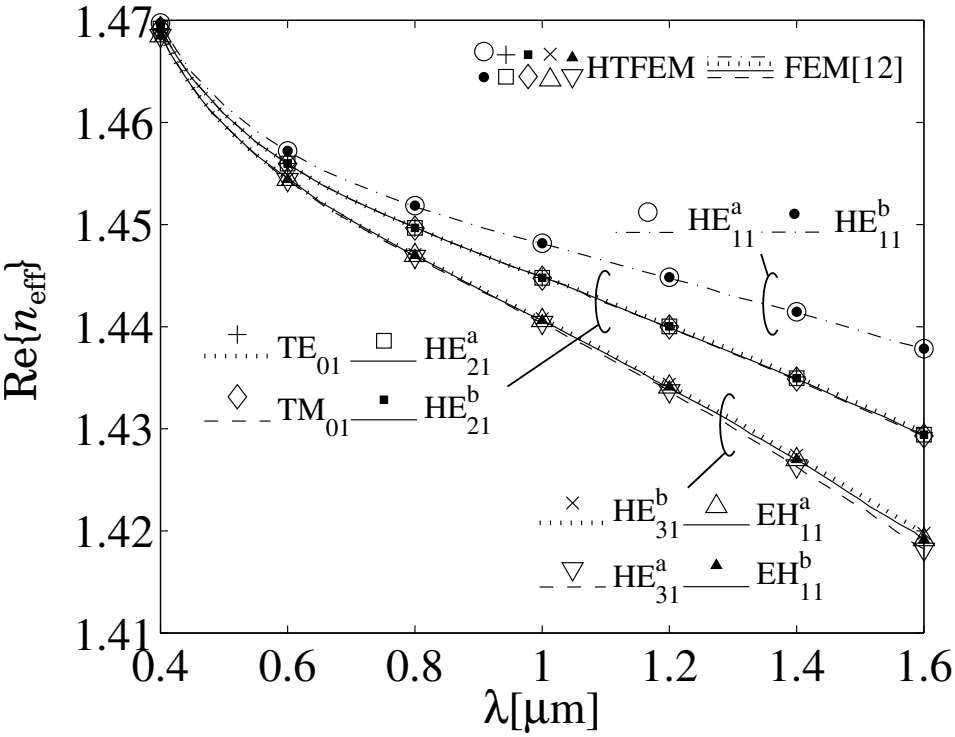
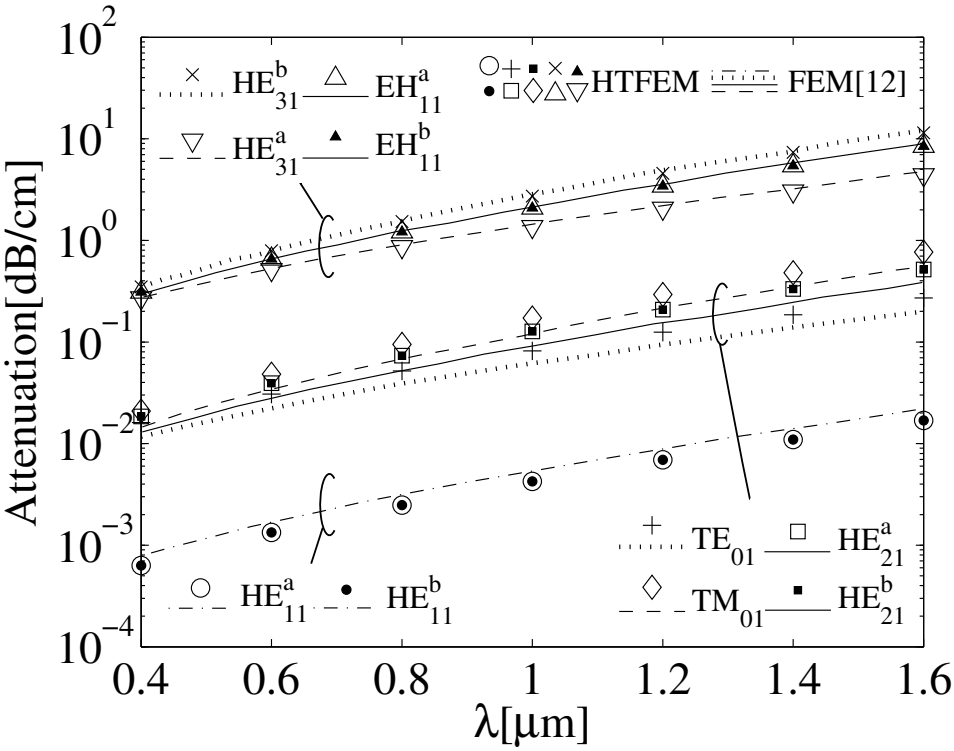


図 4.12　縮退実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ の差の未知数依存性



(a) 分散特性



(b) 損失の波長依存性

図 4.13　実効屈折率と損失の波長依存性

4.3 求解するモードの界分布を制約する HTFEM の数値計算例

図 4.7 に示す z 方向へ無限に長いホーリーファイバを考える．ここに $a_1 = 0.8d$，$a_2 = 2d$ とする．4.2.2 節では，導波路全断面を解析したが，本節では，界分布の回転対称性を用いて断面の 1/4 領域あるいは 1/12 領域を HTFEM 解析する．4.2.2 節と同様に，e-form で離散化を行い，ホールを含む不連続領域 Ω_d を図 2.2 のベクトル要素，一様領域 Ω_1, Ω_2 をそれぞれ一つのトレフツ要素で分割を行う．

4.3.1 1/4 領域での解析

$x = 0$，$y = 0$ の 2 面を対称面とし，解析領域は図 4.14 の斜線のない領域 ($r \leq a_1$，$a_1 \leq a_2$ かつ $0 \leq \phi \leq \pi/2$，$a_2 \leq r$）とした．$0 \leq \phi \leq \pi/2$ の範囲での Γ_1，Γ_2 の線要素分割数を D_s とし，空間高調波の展開項数 M_c を $M_c = 4D_s$ とする．なおトレフツ要素の外周である円周 Γ_1，Γ_2 の分割数は，自動分割の仮定により，$4D_s$ となる．対称性の制約を課さず全領域を解析する場合の要素分割は，対称性を用いた HTFEM 解析の領域分割を対称となるように折り返している．このため，円周 Γ_1，Γ_2 の分割数は，$4D_s$ であり，空間高調波の打ち切り項数を $M_{\mathrm{c}} = 4D_s$ とした．

表 4.4 は $k_0 d = \pi/0.145$，$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$，$D_s = 18$ とした場合の，実効屈折率 $n_{\mathrm{eff}} (= \hat{\gamma}/k_0)$ を調べたものである．文献 [12] の FEM は二次の三角形ノーダル要素で磁界の x, y 成分をそれぞれ離散化している．対称性の制約を課した HTFEM による結果は他の解析法による文献値 [12]，[38] と実部が良く一致している．虚部は，文献 [12] の結果よりも Multipole method[38] に近い値となっている．文献値 [12] と HTFEM の虚部が異なるのは，文献値 [12] では実効屈折率の実部が 10 進数で 4,5 桁，その虚部が非零となる桁までの精度で計算しているためだと考えられる．なお，ここでは示さないが，対称性の制約を課した HTFEM の結果と全領域を解析した結果は，実部の有効桁数 7 桁以上，虚部で 4 桁以上一致している．図 4.15，4.16 は HE_{11} モードと TM_{01} モードの電界の z 成分である．1/4 領域と全領域を解析する HTFEM により求めた界分布が一致しており，正方形領域 $-2d \leq x, y \leq 2d$ の 200×200 の格子点を用いた数値積分により算出した重なり積分値の 7 桁以上の一致している．また，他のモードの界分布の一致も重なり積分から確認している．

以上，実効屈折率ならびに界分布から，本論文で示したトレフツ要素の対称条件組込み方法が妥当であることが確められた．

次に，このホーリーファイバの誘電体を $\mathrm{SiO_2}$[101] に変更し，対称条件を課して実効屈折率と損失の波長依存性を調べた結果を図 4.17 に示す．図 4.17(a) の分散曲線はいずれのモードでも文献値 [12] と一致している．図 4.17(b) の損失は，TE_{01}，TM_{01}，HE_{21}，HE_{11} について傾向が一致しており，これらのモードより損失が大きい HE^a_{31}，HE^b_{31}，EH^a_{11}，EH^b_{11} モードでは文献 [12] と一致している．これは，文献値 [12] と HTFEM の虚部に差がある理由と同じであり，文献値 [12] では実効屈折率の実部が 10 進数で 4,5 桁，その虚部が非零となる桁までの精度で計算しているため，実効屈折率の実部の一致度に比べ，損失に対する虚部の一致度が低くなっているからである．次に，実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ の未知変数の数依存性を調べる．$k_0 d = \pi/0.155$，$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$

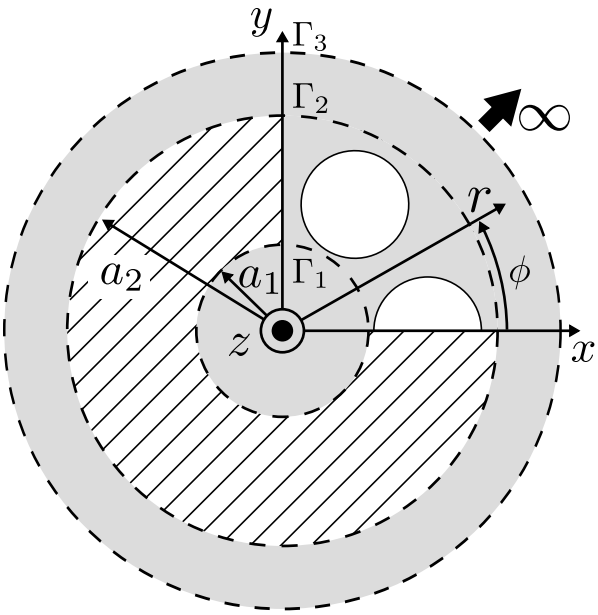


図 4.14　ホーリーファイバの HTFE モデル（1/4 領域）

とし，縮退する 2 つの HE_{11}^{a}，HE_{11}^{b} モードを解析した結果を図 4.18 に示す．対称性の制約を課した二つの HTFEM の結果と全断面を解析した結果から，対称性の制約を課した HTFEM の方が少ない未知変数の数で解の収束値に近付くことが確かめられる．ここでは示さないが，図示した未知変数の数が最大の場合に，対称性の制約を課した HTFEM の結果と 1/4 領域を解析対象とした COMSOL の実効屈折率の実部は，有効桁数で 7 桁が一致していた．HTFEM の未知変数の数が少ないと実効屈折率が単調に増加しないのは，原因は明確ではないが，未知変数の数が少ないため界分布の近似が不十分なためと考えられる．

図 4.19 は図 4.18 に示した HE_{11}^{a}，HE_{11}^{b} モードの実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff},1}\}$，$\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff},2}\}$ の差の未知変数の数依存性を調べたものである．対称性を課した HTFEM の結果ならびに全領域を解析する HTFEM の結果の一部と 1/4 領域を解析する二つの HTFEM の結果が図示されていないのは，固有値の実部が浮動小数点表示で 15 桁一致しており，差の値が図の範囲外であったためである．未知変数の数が増えると COMSOL の計算結果では誤差が減少していることが確かめられる．図示した未知変数の数の範囲では，他の計算法に比べると，HTFEM による実効屈折率の計算誤差が最も小さいことがわかる．

図 4.20 は計算時間を調べたものである．用いた計算機は，Intel® Xeon（基本周波数 3.47GHz，6 コア，12 スレッド），主記憶 96GB を備えている．SSM の複素モーメント行列の算出に必要である $[T(\gamma)]^{-1}[V]$ の計算は、連立一次方程式ソルバーである PARDISO を用いて求めている．1/4 領域での COMSOL の 6 点，HTFEM それぞれの 4 点で直線近似した場合，傾きは 1.1，1.0 であった．同じ未知数では COMSOL よりも HTFEM の方が高速である．また，一定の値に収束している未知数として，COMSOL で 92609，HTFEM で 13014 のとき，HTFEM の計算速度は

COMSOL の 18 倍であった．

4.3.2 不必要なモードを求解しない解析

本節では，ホーリーファイバの誘電体の屈折率を $\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$ とし，規格化周波数 $k_0 d = \pi/0.145$ における複素伝搬定数と界分布を調べる．

はじめに，図 4.21 の斜線のない 1/12 領域 ($r \leq a_1$，$a_1 \leq a_2$ かつ $0 \leq \phi \leq \pi/6$，$a_2 \leq r$) を解析領域とした HTFEM 解析を行う．$0 \leq \phi \leq \pi/6$ の範囲での Γ_1，Γ_2 の線要素分割数を $D_{s'}$ とし，空間高調波の展開項数 M_c を $M_c = 12D_{s'}$ とする．なおトレフツ要素の外周である円周 Γ_1，Γ_2 の分割数は，自動分割の仮定により，$12D_{s'}$ となる．$D_{s'} = 6$ とした場合の，実効屈折率 $n_{\mathrm{eff}}(= \hat{\gamma}/k_0)$ を調べたものを表 4.5 に示す．1/12 領域を HTFEM 解析した実効屈折率と 1/4 を解析したものとが一致している．図 4.22，4.23 は TM_{01} モードと TE_{01} モードの電界の z 成分を図示したものである．HTFEM 解析領域を 1/12 領域として求めた界分布は 1/4 領域とした界分布と一致しており，正方形領域 $-2d \leq x, y \leq 2d$ の 200×200 の格子点を用いた数値積分により算出した重なり積分値の 7 桁以上の一致を確認している．また，HE_{31} モードの界分布の重なり積分の値も 7 桁以上の一致を確認している．

次に，不必要なモードを求解しない HTFEM を考える．求めるモードは，HE_{11} モードと HE_{21} モードである．$x = 0$，$y = 0$ の 2 面を対称面とし，前述したように解析領域を図 4.14 の斜線のない領域 ($r \leq a_1$，$a_1 \leq a_2$ かつ $0 \leq \phi \leq \pi/2$，$a_2 \leq r$) とした．空間高調波の展開項数 M_c を $M_c = 4D_s$ とする．$D_s = 18$ とした場合の，実効屈折率 $n_{\mathrm{eff}}(= \hat{\gamma}/k_0)$ を調べたものを表 4.6 に示す．各モードでの実効屈折率が一致している．しかし，不必要なモードを求解しない HTFEM には 1/4 領域での HTFEM では求まっていない解が存在している．この解の混入原因を調査するために，この解に対応する界分布と，トレフツ要素を用いずに Γ_1，Γ_2 を磁気壁とした FEM 解析による界分布を図 4.24 に示す．HTFEM に混入する解と FEM により求めた界分布が一致しており，Ω_d 内に閉じこもる共振解となっている．この共振解混入の原因は，通常要素で分割する領域で，不必要なモードが取り除けていないためであると考えられる．図 4.25 は HE_{21} モードの電界の z 成分である．正方形領域 $-2d \leq x, y \leq 2d$ の 200×200 の格子点を用いた数値積分により算出した重なり積分値の 7 桁以上の一致を確認している．

4.4 むすび

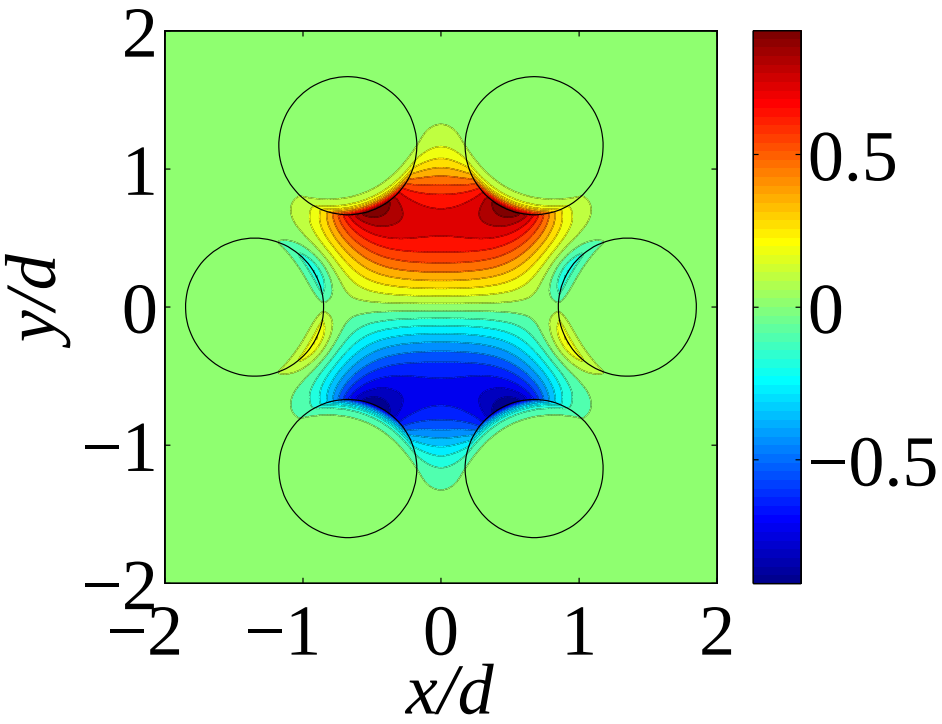
伝搬方向に一様な電磁波導波路伝搬特性の HTFEM 解析法の適用を行った.

まず，円筒誘電体導波路を例に解析解との比較により，その妥当性を確認した.

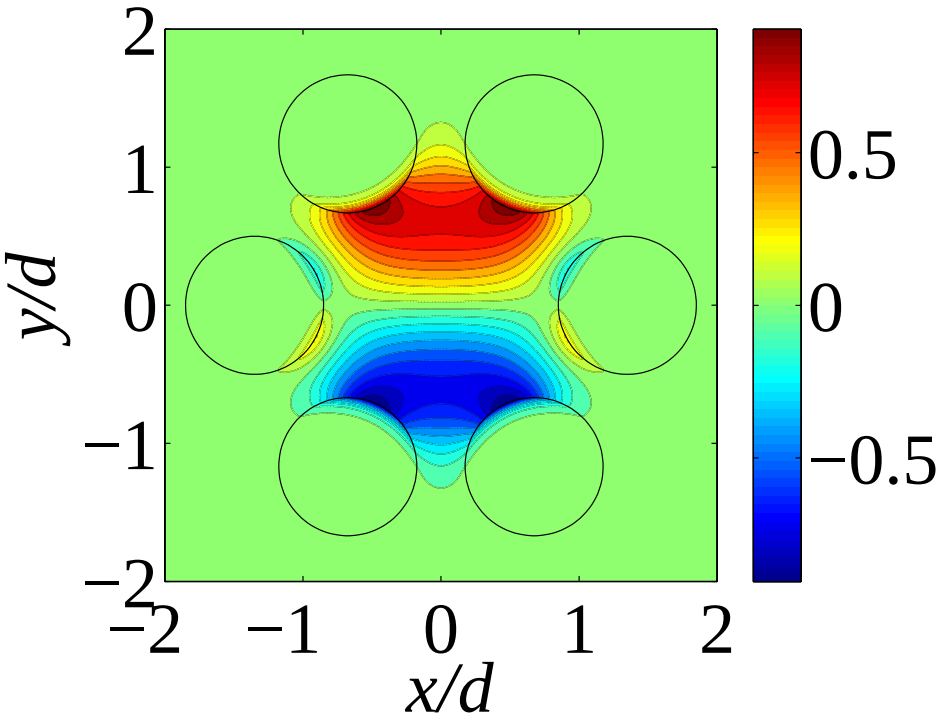
次に，解析対象をホーリーファイバとし，全断面領域を解析する HTFEM による計算結果を COMSOL による計算結果ならびに文献値 [5]，[11]，[38] と比較して，妥当性，有用性を確認した. HTFEM は導波路断面全体を解析領域としても，電磁界の対称性を利用した 1/4 構造を解析領域としたベクトル要素を用いた文献値 [5] ならびに COMSOL による計算結果と，同程度の未知数であれば，ほぼ同程度の精度の固有値が求まっている．また，ホーリーファイバの対称な界分布を有する導波路固有モードの解析を対象として，界分布の対称性の制約を課した HTFEM 解析を行った．対称性の制約を課さない HTFEM による結果，COMSOL を用いたベクトル要素のみによる結果，文献値 [12]，[38] と比較して，妥当性，有用性を確認した．さらに，求解不要なモードを抑制する HTFEM 解析を行いその妥当性を示した.

表 4.4　実効屈折率 n_{eff}（1/4 領域）

	HTFEM(Quarter cross section)	FEM[12]	Multipole Method[38]
HE_{11}^{a}	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$	$1.4453935-j4.11\times10^{-8}$	$1.4453953-j3.15\times10^{-8}$
HE_{11}^{b}	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$	$1.4453931-j4.12\times10^{-8}$	
TE_{01}	$1.4385838-j5.31\times10^{-7}$	$1.4385760-j3.97\times10^{-7}$	$1.4385858-j4.99\times10^{-7}$
HE_{21}^{a}	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$	$1.4384419-j7.13\times10^{-7}$	$1.4384458-j9.93\times10^{-7}$
HE_{21}^{b}	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$	$1.4384376-j7.11\times10^{-7}$	
TM_{01}	$1.4383648-j1.41\times10^{-6}$	$1.4383622-j1.03\times10^{-6}$	$1.4383667-j1.37\times10^{-6}$
HE_{31}^{b}	$1.4304079-j2.15\times10^{-5}$	$1.4303848-j2.25\times10^{-5}$	$1.430175-j2.22\times10^{-5}$
EH_{11}^{a}	$1.4299564-j1.59\times10^{-5}$	$1.4299517-j1.67\times10^{-5}$	$1.4299694-j1.58\times10^{-5}$
EH_{11}^{b}	$1.4299564-j1.59\times10^{-5}$	$1.4299459-j1.68\times10^{-5}$	
HE_{31}^{a}	$1.4292498-j8.73\times10^{-6}$	$1.4292608-j9.17\times10^{-6}$	$1.4292553-j9.34\times10^{-6}$

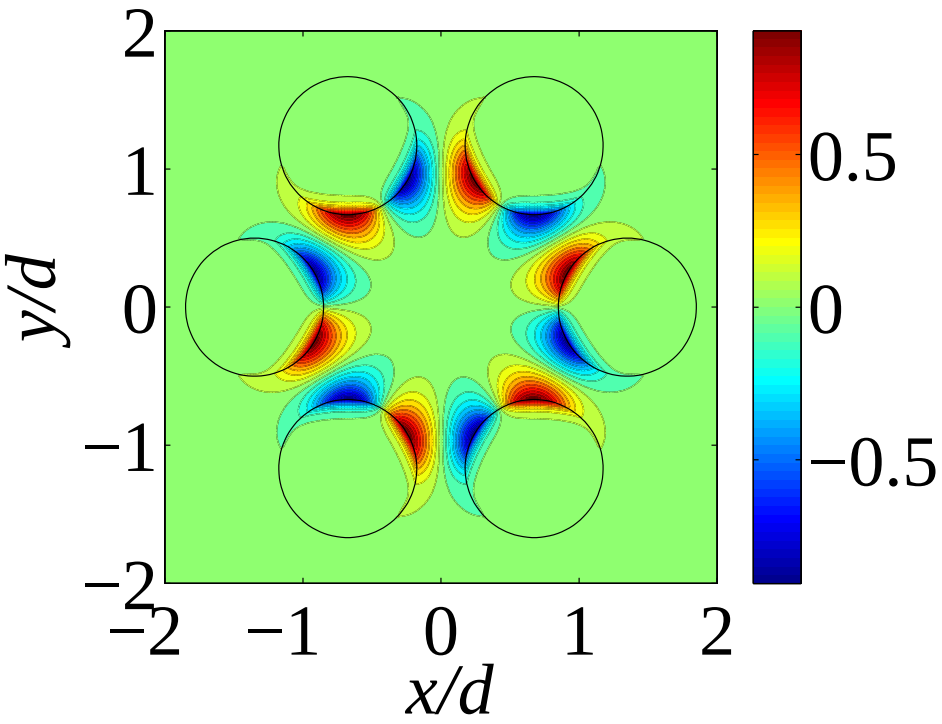


(a) HTFEM(1/4 領域)

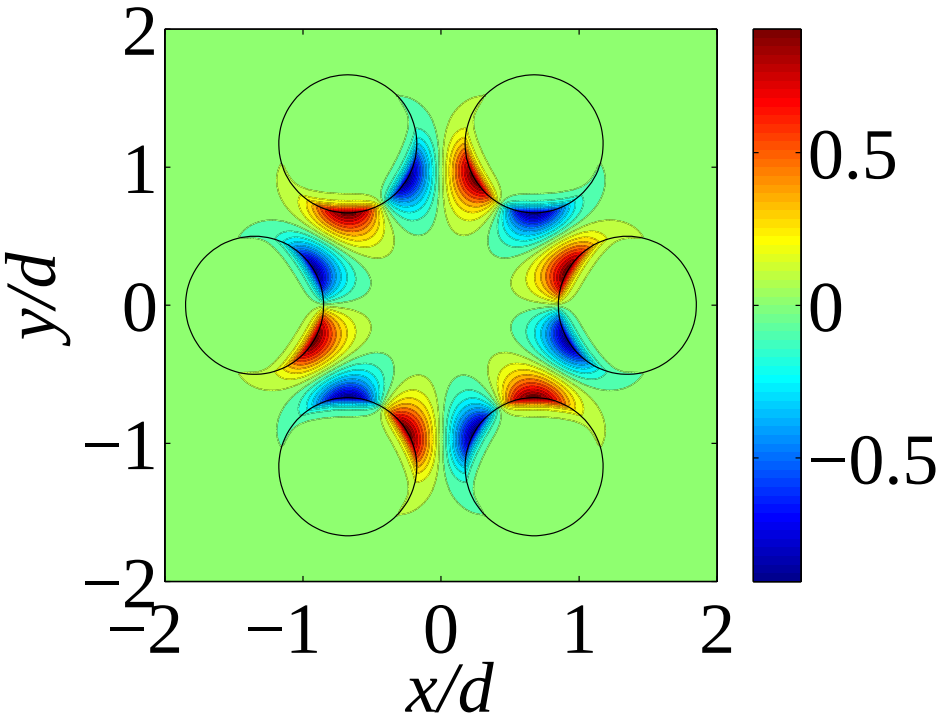


(b) HTFEM(全領域)

図 4.15　HE_{11} モードの電界の z 成分

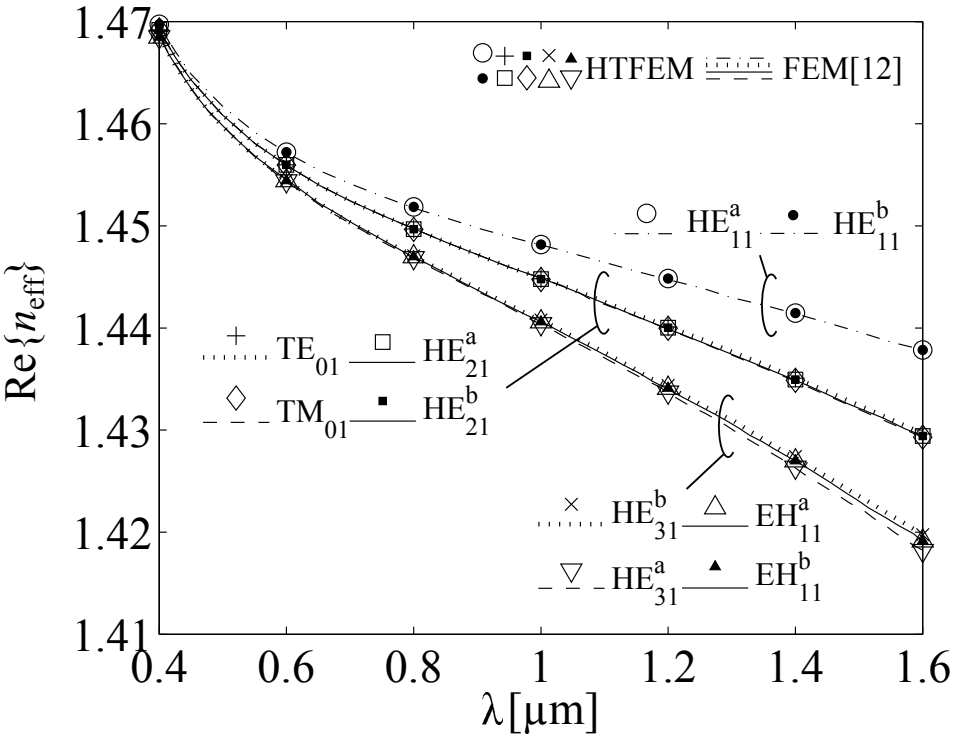


(a) HTFEM(1/4 領域)

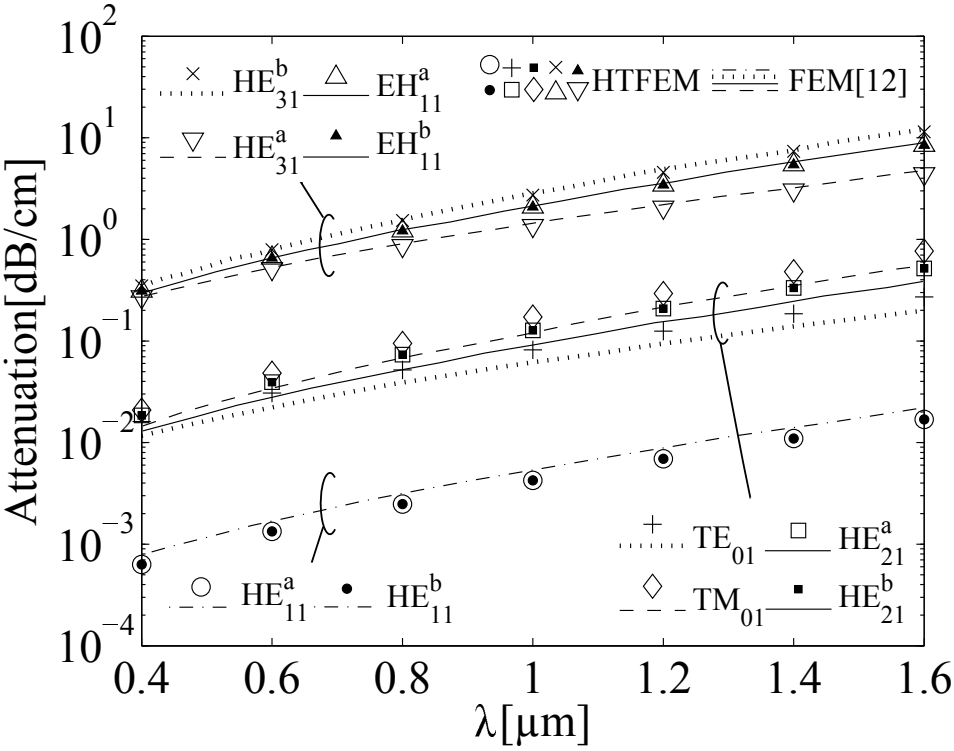


(b) HTFEM(全領域)

図 4.16　TE_{01} モードの電界の z 成分



(a) 分散特性



(b) 波長の損失依存性

図 4.17　実効屈折率と損失の波長依存性

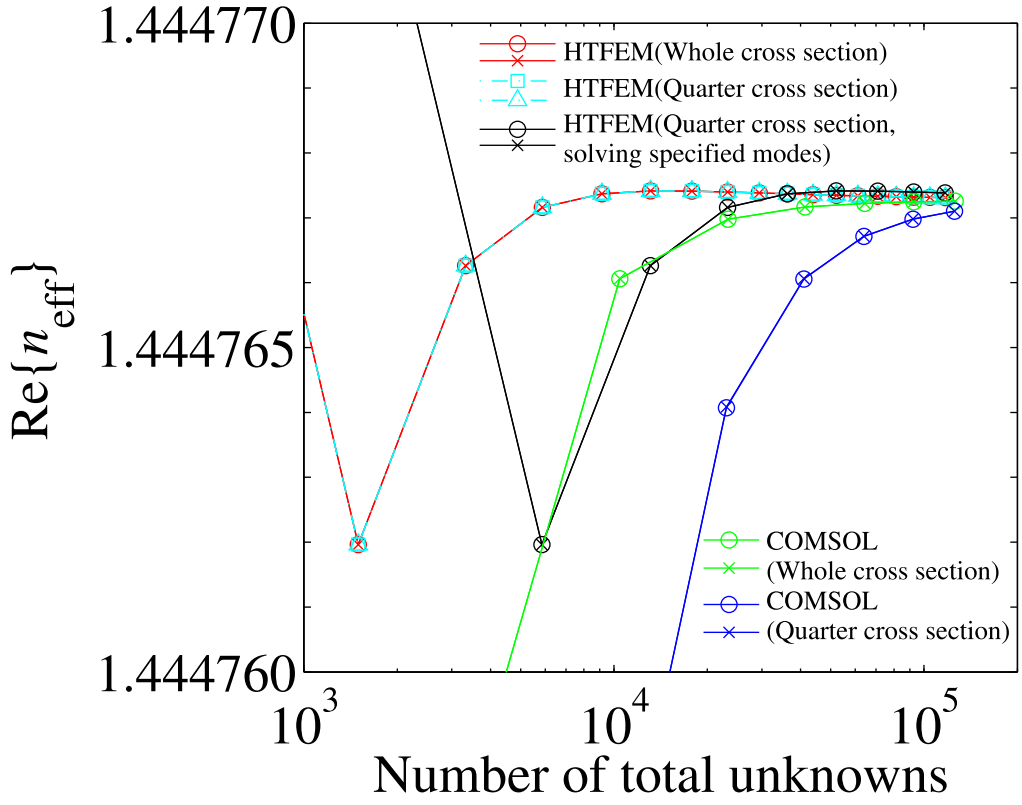


図 4.18　実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ の未知数依存性

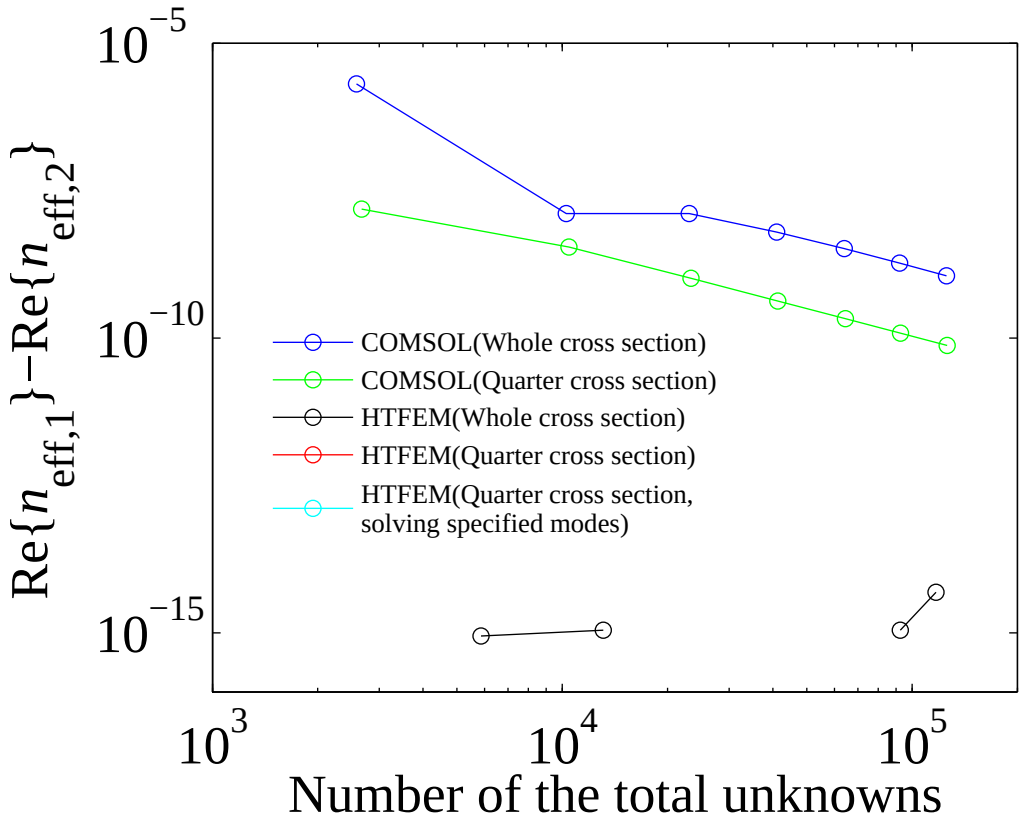


図 4.19　縮退している実効屈折率 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ の実部の差の未知数依存性

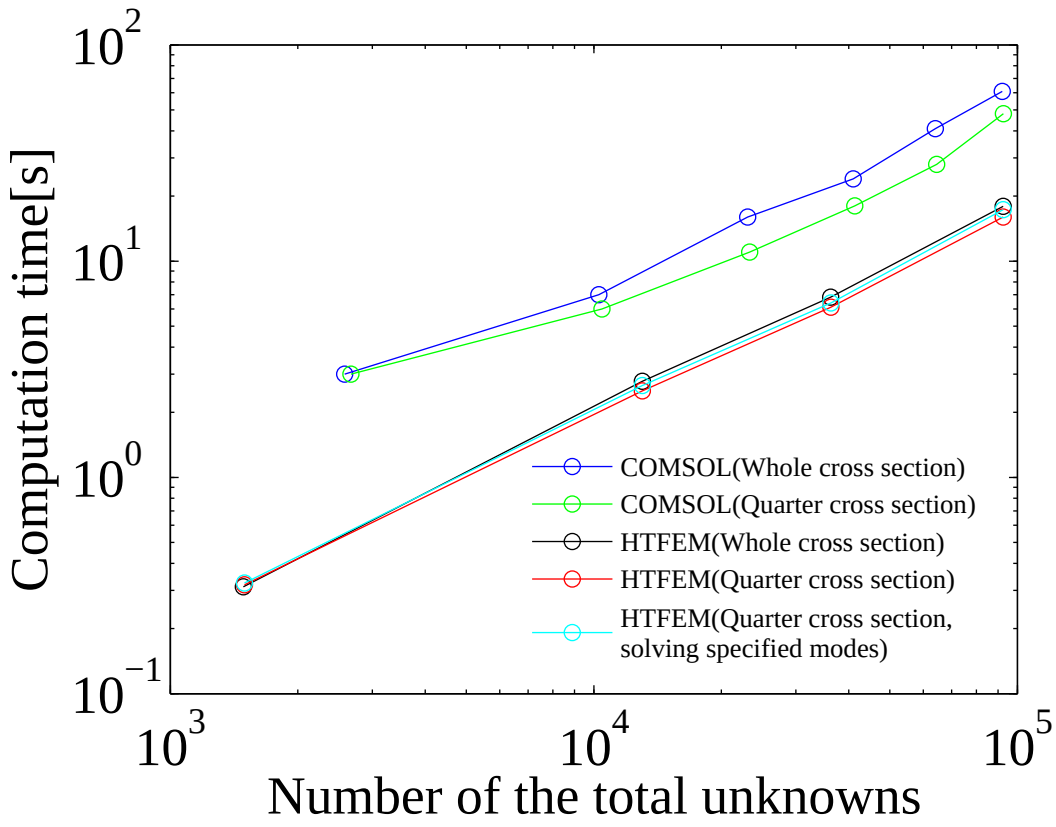

Computation time[s]
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{3}
10^{4}
10^{5}
Number of the total unknowns
COMSOL(Whole cross section)
COMSOL(Quarter cross section)
HTFEM(Whole cross section)
HTFEM(Quarter cross section)
HTFEM(Quarter cross section,
solving specified modes)

図 4.20　計算時間

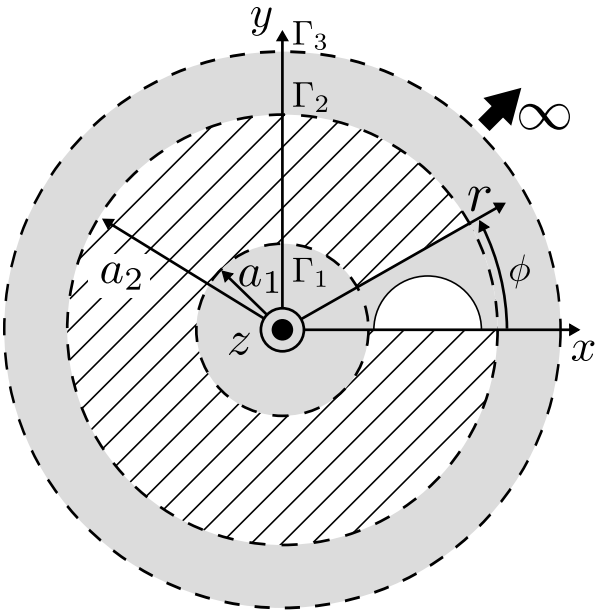


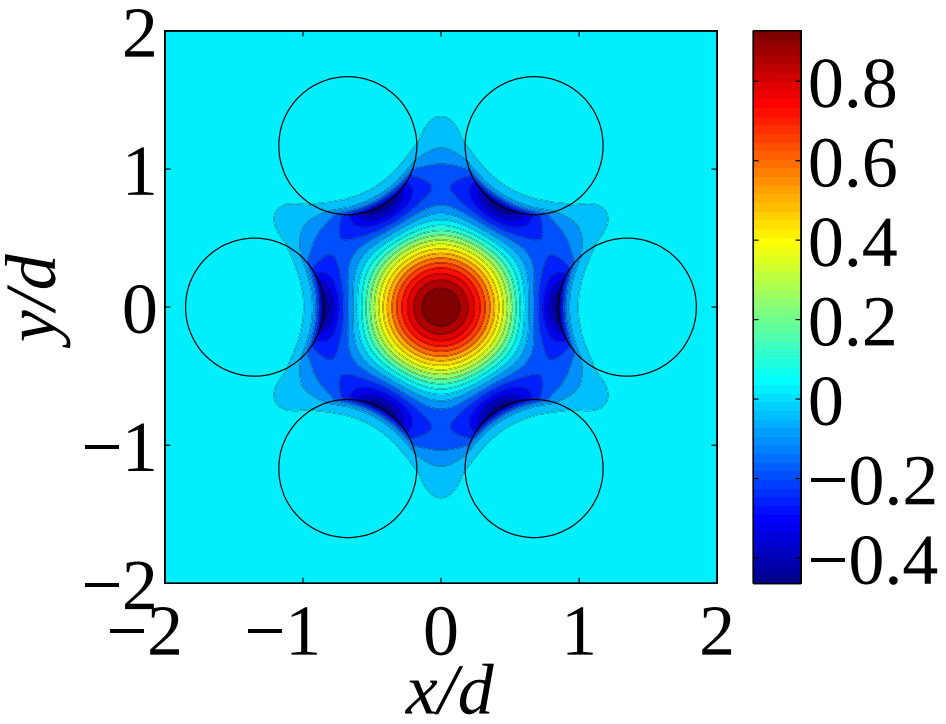
図 4.21　ホーリーファイバの HTFE モデル（1/12 領域）

表 4.5　実効屈折率 n_{eff}（1/12 領域）

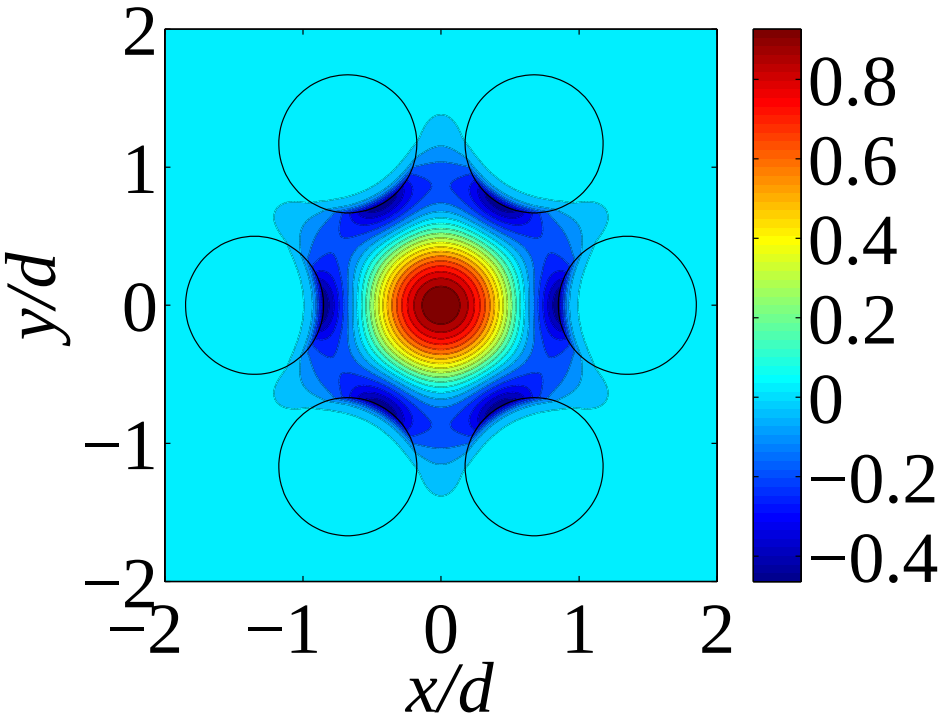
	HTFEM(1/12 cross section)	HTFEM(Quarter cross section)
TE_{01}	$1.4385838-j5.31\times10^{-7}$	$1.4385838-j5.31\times10^{-7}$
TM_{01}	$1.4383648-j1.41\times10^{-6}$	$1.4383648-j1.41\times10^{-6}$
HE_{31}^{b}	$1.4304079-j2.15\times10^{-5}$	$1.4304079-j2.15\times10^{-5}$
HE_{31}^{a}	$1.4292498-j8.73\times10^{-6}$	$1.4292498-j8.73\times10^{-6}$

表 4.6　実効屈折率 n_{eff}（1/4 領域，特定のモードを求解）

	HTFEM(1/12 cross section, solving specified modes)	HTFEM(Quarter cross section)
HE_{11}^{a}	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$
HE_{11}^{b}	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$
HE_{21}^{a}	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$
HE_{21}^{b}	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$
-	$1.4399066-j6.71\times10^{-18}$	-

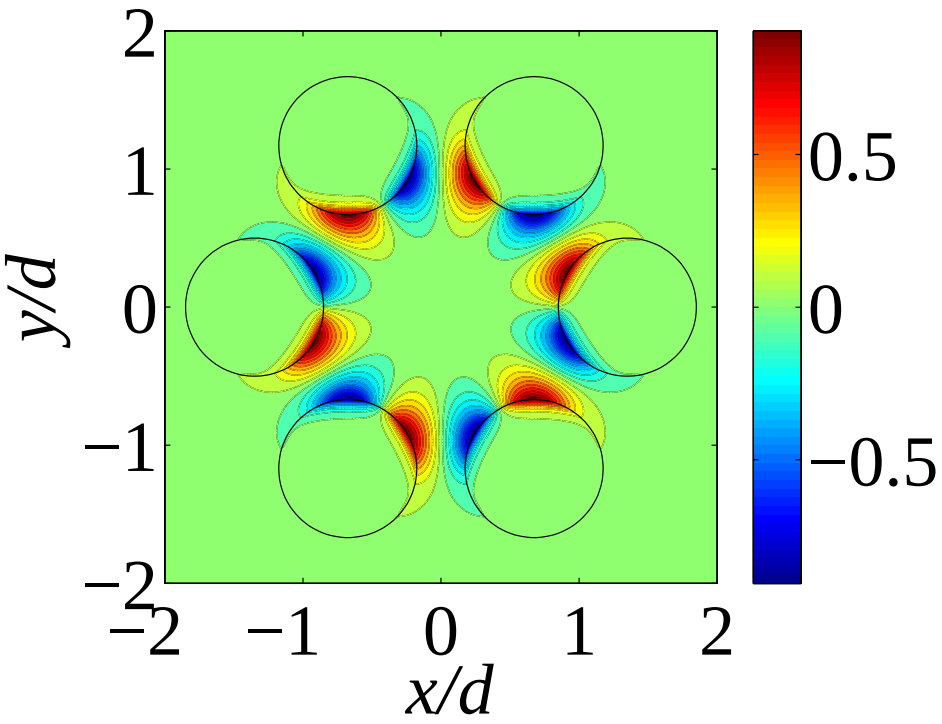


(a) HTFEM(1/12 領域)

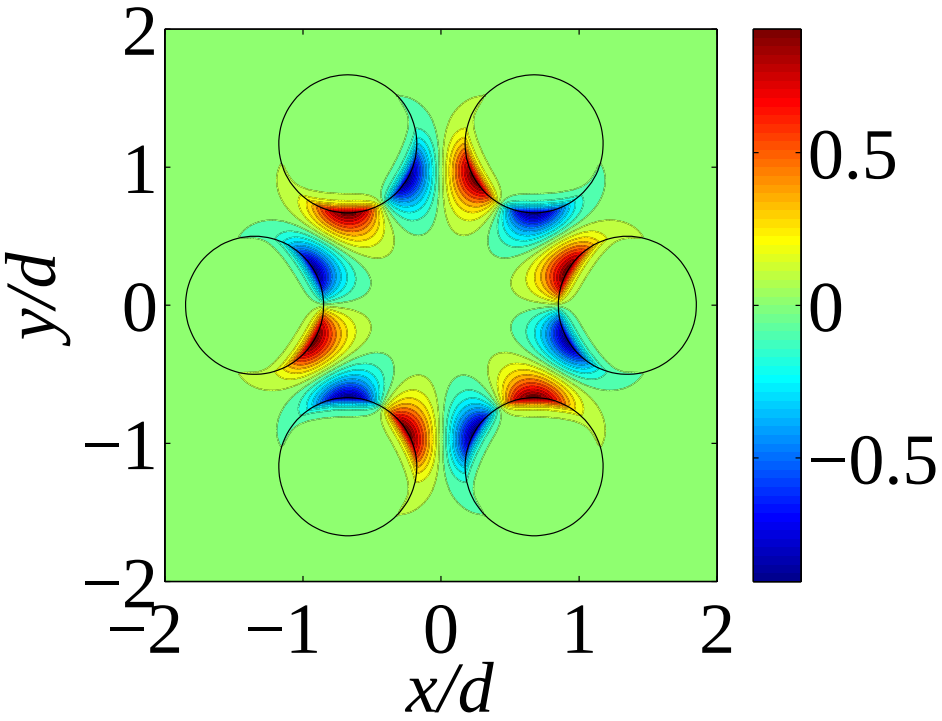


(b) HTFEM(1/4 領域)

図 4.22　TM_{01} モードの電界の z 成分

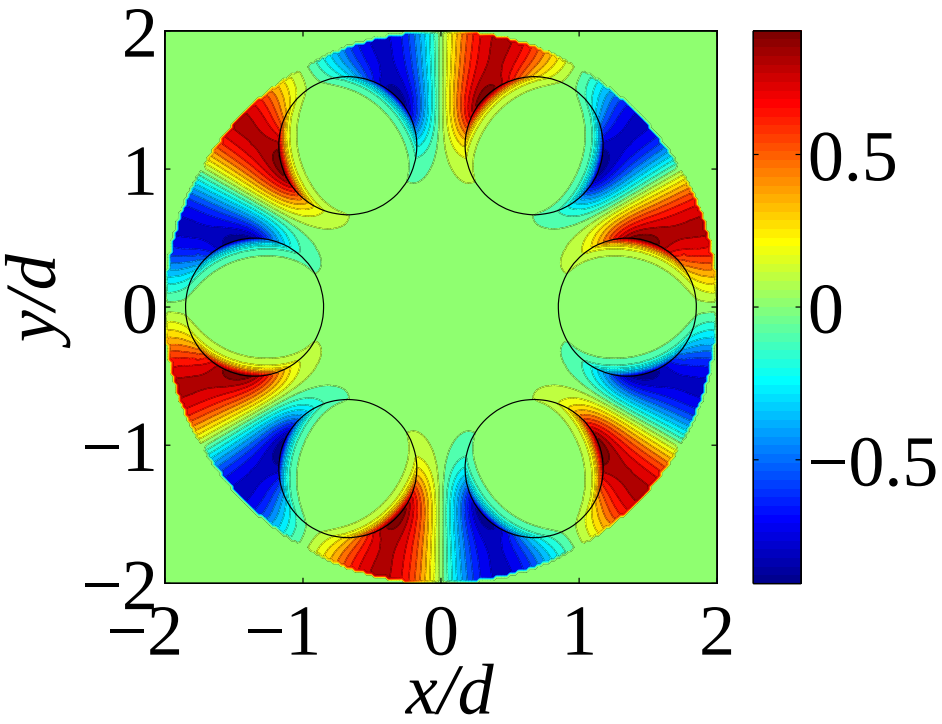


(a) HTFEM(1/12 領域)

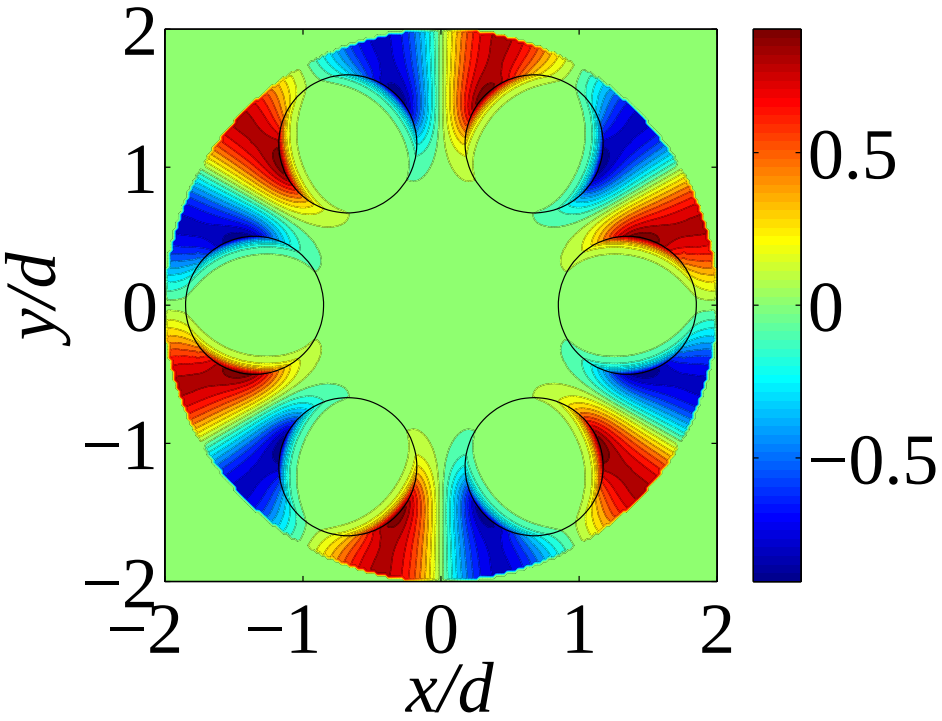


(b) HTFEM(1/4 領域)

図 4.23　TE_{01} モードの電界の z 成分

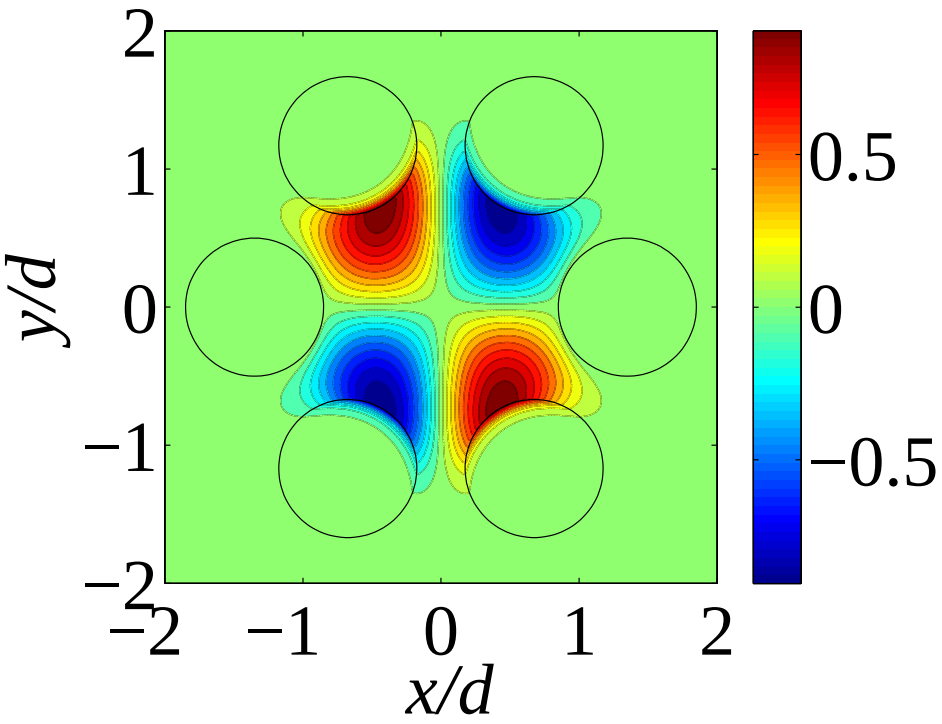


(a) HTFEM

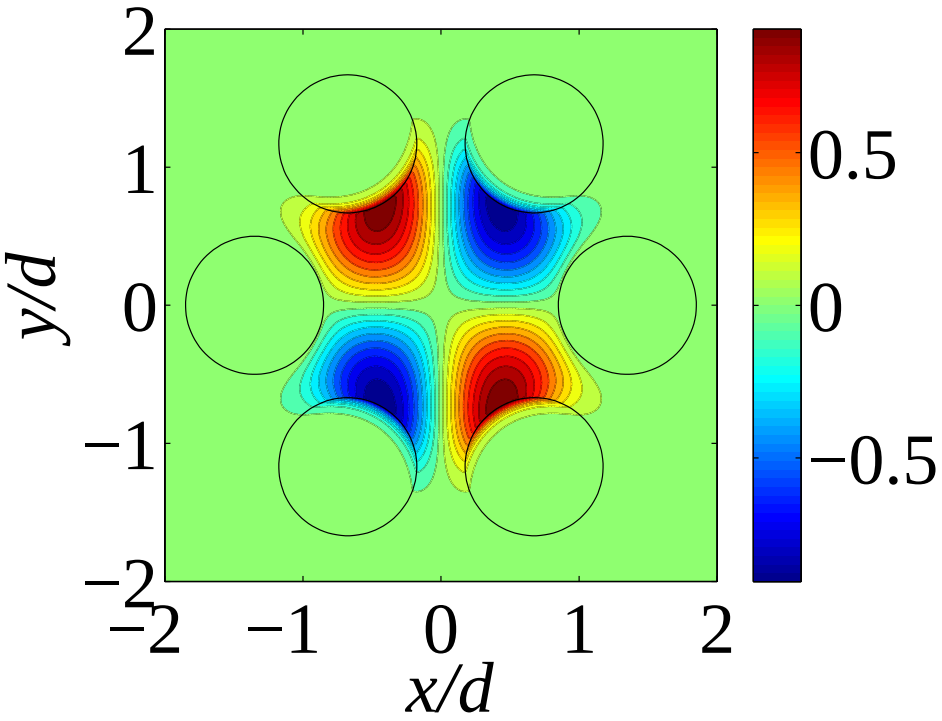


(b) FEM

図 4.24　共振解の電界の z 成分



(a) HTFEM(1/4 領域, 特定のモードを求解)



(b) HTFEM(1/4 領域)

図 4.25　HE_{21} モードの電界の z 成分

5　結論

本論文では, 電磁波導波路伝搬特性の高精度数値解析法の開発を目的として, 開放領域の扱いが容易で, 任意形状の取扱いが可能なハイブリッドトレフツ有限要素法（Hybrid Trefftz finite element method: HTFEM）の開発を行った [61]．従来，求解が困難であった HTFEM が帰着する非線形固有値問題（Nonlinear eigenvalue problem: NEP）を Sakurai-Sugiura 射影法（Sakurai-Sugiura projection method: SSM）を用いて，高速かつ高精度に求解が可能であることを示すとともに SSM に起因して混入する不要解の除去方法を検討した [54]，[57]，[58]，[59]．また，解析対象が限定されるが，ホーリーファイバの高精度伝搬特性析法である Multipole method（MM）から得られる NEP に SSM を適用し，SSM を利用することで MM が高速解析法として利用可能であることを確認した [43].

はじめに，伝搬方向に一様な電磁波導波路伝搬特性の数値解析法を示した．トレフツ要素の補間関数として円筒座標系の変数分離解であるベッセル関数からなる波動関数を用いた HTFEM の定式化を示した．また，電磁界分布の対称性の制約を課した HTFEM の定式化，求めるモードを制限して求解できる HTFEM の定式化を示した.

次に，SSM による NEP の解法を示した．SSM に起因する不要解の判別指標を新たに見出した．非ブロックバージョン SSM を，周期構造導波路の伝搬特性の HTFEM 解析が帰着する NEP に適用し，数値解析例から求解の妥当性を示した．また，ブロックバージョン SSM を，ホーリーファイバの MM 解析から最終的に得られる NEP の求解に適用し，SSM の有用性を示した．さらに，NEP の求解を滑降シンプレックス法で探索する場合と比較し，SSM の高速性を示した．また，SSM の判別指標のグループ化にクラスタ分析を用いた自動判別法を適用し，SSM 法の求解の自動化可能性について肯定的見通しを得た.

最後に，2 章で定式化を行った HTFEM と SSM による数値計算例を示し，SSM を用いた HTFEM が伝搬特性の高精度高速解法であることを示した．まず，単純な構造である円筒誘電体導波路をトレフツ要素のみで分割した場合の数値計算を行い，解析解との比較により HTFEM 解析法の妥当性を示した．次に，解析対象をホーリーファイバとし，ホールを含んだ円環状の不連続領域をベクトル要素で分割し, それ以外の一様領域をトレフツ要素で分割した数値計算結果を示した．この計算結果をベクトル要素を使用した文献値 [5]，[12]，[11]，MM による文献値 [38]，有限要素シミュレータ COMSOL Multiphysics®(COMSOL) を用いた計算結果と比較して，妥当性，有用性を示した.

謝辞

本研究を進めるにあたり，多大な御指導，御鞭撻をいただきました研究指導教員である室蘭工業大学大学院工学研究科しくみ情報系領域　長谷川弘治教授に感謝いたします．また同じく，御指導，御助言をいただきました本学大学院工学研究科しくみ情報系領域　鏡愼教授，辻寧英教授，佐藤慎悟助教，津山工業高等専門学校電気電子工学科　嶋田賢男助教に心から感謝致します．

そして，日頃，御討論，御助言をいただきました本研究室の皆様に感謝致します．また，同じ研究分野であった安藤匠矢氏，對馬康雄氏に心から感謝致します．

参考文献

[1] M. Koshiba, K. Saitoh, and Y. Kokubun, “ Heterogeneous multi-core fibers: proposal and design principle, ” IEICE Trans. Electron., vol.E97-C, no.7, pp.625-635, July 2014.

[2] M. Koshiba, K. Saitoh, K. Takenaga, and S. Matsuo,“ Multi-core fiber design and analysis: coupled-mode theory and coupled-power theory, ”Optics Express, vol.19, no.26, pp.B102-B110, Dec. 2011.

[3] 大橋正治，小柴正則,“ 空間多重を実現するマルチコア光ファイバ技術，” 信学誌，vol.97, no.2，pp.102-107，Feb. 2014.

[4] M. Koshiba, “ Full-vector analysis of photonic crystal fibers using the finite element method, ” IEICE Trans. Electron., vol.E85-C, no.4, pp.881-888, April 2002.

[5] M. Koshiba and K. Saitoh, “ Numerical verification of degeneracy in hexagonal photonic crystal fibers, ” IEEE Photnics Technol. Lett., vol.13, no.12, pp.1313-1315, Dec. 2001.

[6] T. Fujisawa, and M. Koshiba, “ Finite element characterization of chromatic dispersion in nonlinear holey fibers, ” Optics Express, vol.11, no.13, pp.1481-1489 June 2003.

[7] D. Ghosh, S. Roy, and S. K. Bhadra, “ Determination of modal effective indices and dispersion of microstructured fibers with different configurations: a variational approach, ” Journal of Modern Optics, vol.57, no.8, pp.607-620, May 2010.

[8] E. Eguchi, and Y. Tsuji, “ Single-Polarization elliptical-hole lattice core photonic-bandgap fiber, ” J. Lightwave Technol., vol.31, no.1, pp.177-182, Jan. 2013.

[9] M. Midrio, M. P. Singh, and C. G. Someda, “ The space filling mode of holey fibers: an analytical vectorial solution, ” J. Lightwave Technol., vol.18, no.7, pp.1031-1037, July 2000.

[10] T. Hasegawa, E. Sasaoka, M. Onishi, M. Nishimura, Y. Tsuji, and M. Koshiba, “ Hole-assisted lightguide fiber for large anomalous dispersion and low optical loss, ” Optics Express, vol.9, no.13, pp.681-686, Dec. 2001.

[11] N.A. Issa, and L. Poladian, “ Vector wave expansion method for leaky modes of microstructured optical fibers, ” J. Lightwave Technol., vol.21, no.4, pp.1005-1012, April 2003.

[12] H.P. Uranus, and H.J.W.M. Hoekstra, “ Modelling of microstructured waveguides using a finite-element-based vectorial mode solver with transparent boundary conditions, ”Optics Express, vol.12, no.12, pp.2795-2809, June 2004.

[13] S. Guo, F. Wu, and S. Albin, “ Loss and dispersion analysis of microsructred fibers by finite-difference method, ” Optics Express, vol.12, no.15, pp.3341-3352 July 2004.

[14] P.-J. Chiang, and H.-C. Chang, “ A high-accuracy pseudospectral full-vectorial optical waveguide mode solver with carefully implemented UPML absorbing boundary condi-

tions, ” Optics Express, vol.19, no.2, pp.1594-1608 Jan. 2011.

[15] P. Yeh, and A. Yariv, “ Theory of Bragg fiber, ” J. Opt. Soc. Am., vol.68, no.9, pp.1196-1201, Sept. 1978.

[16] G. Ouyang, Y. Xu, and A. Yariv, “ Comparative study of air-core and coaxial Bragg fibers: single-mode transmission and dispersion characteristics, ” Optics Express, vol.9, no.13, pp.733-747, Dec. 2001.

[17] S. Guo, and S. Albin, “ Comparative analysis of Bragg fibers, ” Optics Express, vol.12, no.1, pp.198-206, Jan. 2004.

[18] N. Song, J. Mu, and W.P. Huang, “ Application of the complex coupled-mode theory to optical fiber grating structures, ” J. Lightwave Technol., vol.28, no.5, pp.761-767, March 2010.

[19] H. Rogier, and D.D. Zutter, “ Berenger and leaky modes in optical fibers terminated with a perfectly matched layer, ” J. Lightwave Technol., vol.20, no.7, pp.1141-1148, July 2002.

[20] D.V. Ginste, H. Rogier, and D.D. Zutter,“ Efficient computation of TM- and TE-polarized leaky modes in multilayered circular waveguides, ” J. Lightwave Technol., vol.28, no.11, pp.1661-1669, June 2010.

[21] 山内良三, “ 光ファイバの 40 年, ” 信学論（C），vol.J92-C，no.8，pp.331-337, Aug. 2009.

[22] 丸山眞示，小柴正則, “ エッジ/ノーダルハイブリッド要素を用いた 3 次元キラル導波路の有限要素法解析, ” 信学論（C），vol.J77-C-I，no.10，pp.511-518, Oct. 1994.

[23] J. Jin, The Finite Element Method in Electromagnetics, IEEE Press, 2002.

[24] M. Koshiba, and Y. Tsuji,“ Curvilinear hybrid edge/nodal elements with triangular shape for guided-wave problems, ” J. Lightwave Technol., vol.18, no.5, pp.737-743, may 2000.

[25] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu, The Finite Element Method Its Basis & Fundamentals 6th Edition，Butterworth-Heinemann, 2005.

[26] M. Koshiba, “ Optical waveguide theory by the finite element method, ” IEICE Trans. Electron., vol.E97-C, no.7, pp.625-635, July 2014.

[27] X.Q. Sheng and S. Xu, “ An efficient high-order mixed-edge rectangular-Element mehtod for lossy anisotropic dielectric waveguides, ” IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol.45, no.7, pp.1009-1013, July 1997.

[28] W.C. Chew and W.H. Weedon, “ A 3D perfectly matched medium form modified Maxwell’s equations with stretched coordinates, ”Microw. Opt. Technol. Lett., vol.7, no.13, pp.599-604, Sept. 1994.

[29] J.P. Berenger, “ A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, ” Journal of Computational Physics, vol.114, no.2, pp.185-200, Oct. 1994.

[30] W.C. Chew, J.M. Jin, and E. Michielssen,“ Complex coordinate stretching as a generalized absorbing boundary condition, ” Microw. Opt. Technol. Lett., vol.15, no.6, pp.363-369, Aug. 1997.

[31] F.L. Teixeira and W.C. Chew, “ Systematic derivation of anisotropic PML absorbing media in cylindrical and spherical coordinates, ” IEEE Microw. guided wave Lett., vol.7, no.11, pp.371-373, Nov. 1997.

[32] F.L. Teixeira, and W.C. Chew, “ Unified analysis of perfectly matched layers using differential forms, ” Microw. Opt. Technol. Lett., vol.20, no.2, pp.124-126, Jan. 1999.

[33] S. B. Gaál, H. J. M. Hoekstra, and P. V. Lambeck, “ Determining PML modes in 2-D stratified media, ” J. Lightwave Technol., vol.21, no.1, pp.293-298, Jan. 2003.

[34] 嶋田賢男，長谷川弘治，佐藤慎悟, “ 有限要素法における完全整合層の平面電磁波吸収特性, ” 計算数理工学論文集，vol.9，pp.19-24，Dec. 2009.

[35] B. Vial, F. Zolla, A. Nicolet, M. Commandré and S. Tisserand, “ Adaptive perfectly matched layer for Wood’s anomalies in diffraction gratings, ” The International Online Journal of Optics, vol.20, no.27, pp.28094-28105, Dec. 2012.

[36] A.Z. Elisherbeni, and A.A. Kishk, “ Modeling of cylindrical objects by circular dielectric and conducting cylinders, ”IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol.40, no.1, pp.96-99, Jan. 1992.

[37] D. Felbacq, G. Tayeb, and D. Maystre, “ Scattering by a random set of parallel cylinders, ” J. Opt. Soc. Am. A, vol.11, no.9, pp.2526-2538, Sept. 1994.

[38] T.P. White, B.T. Kuhlmey, R.C. McPhedran, D. Maystre, G. Renversez, C. Martijn de Sterke, and L.C. Botten, “ Multipole method for microstructured optical fibers. I. Formulation, ” J. Opt. Soc. Am. B, vol.19, no.10, pp.2322-2330, Oct. 2002.

[39] B.T. Kuhlmey, T.P. White, G. Renversez, D. Maystre, L.C. Botten, C. Martijn de Sterke, and R.C. McPhedran, “ Multipole method for microstructured optical fibers. II. Implementation and results, ” J. Opt. Soc. Am. B, vol.19, no.10, pp.2331-2340, Oct. 2002.

[40] 安元清俊，賈洪廷，遠山博, “ 多層円柱アレーからなる二次元電磁波結晶の解析, ”信学論（C），vol.J88-C，no.3，pp.135-143，March 2005.

[41] K. Yasumoto, Electromagnetic Theory and Applications for Photonic Crystals, CRC Press, Boca Raton, 2006.

[42] V. Jandieri, K. Yasumoto, A. Sharma, and H. Chauhan, “ Model analysis of specific microstructured optical fibers using a model of layered cylindrical arrays of circular rods, ” IEICE Trans. Electron., vol.E93-C, no.1, pp.17-23, Jan. 2010.

[43] 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治, “ 電磁波導波路固有値問題の Multipole method 解析における求解法の検討, ” 信学技報，vol.115，no.141，pp.111-116，July 2015.

[44] A.P. Zielnski, and O.C. Zienkiewicz, “ Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution functions, ”Appl. Mechanics Rev., vol.58, no.5, pp.316-336, Sept. 1985.

[45] 長谷川弘治，小柴正則, “ 周期構造誘電体導波路のハイブリッド有限要素法解析, ” 1998 信学ソ大（エレクトロニクス），C-1-7，Sept. 1998.

[46] Q.-H. Qin, The Trefftz Finite and Boundary Element Method, WIT Press, 2000.

[47] 嶋田賢男，長谷川弘治，“ 電磁波導波路伝搬特性の Hybrid Trefftz 有限要素法解析，” 平 16 北海度連大，p.146，公演番号 114，Oct. 2004.

[48] 佐藤慎悟，長谷川弘治，“ ハイブリッド・トレフツ有限要素法に基づく回折格子の散乱特性解析法，” 境界要素法論文集，vol.21，pp.53-58，Dec. 2004.

[49] Q.-H. Qin，“ Trefftz finite element method and its applications，” International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.21, no.3, pp.509-528, March 2005.

[50] 佐藤慎悟，長谷川弘治，“ 多層格子による平面波散乱特性のハイブリッド・トレフツ有限要素法解析，” 計算数理工学論文集，vol.5，no.2，pp.113-118，Dec. 2005.

[51] 佐藤慎悟，長谷川弘治，“ 三次元入射する平面波の回折格子散乱特性のハイブリッドトレフツ有限要素法解析，” 信学論（C），vol.J89-C，no.1，pp.1-10，Jan. 2006.

[52] S. Sato and K. Hasegawa，“ Analysis of scattering characteristics of diffraction gratings using hybrid Trefftz finite element method，”International Journal of Microwave and Optical Technology, vol.1, no.2, pp.889-904, Aug. 2006.

[53] 佐藤慎悟，長谷川弘治，“ 多層周期構造による平面波散乱特性の有限要素解析法の比較，” 計算数理工学論文集，vol.7，no.2，pp.219-224，March 2008.

[54] 森田好人，嶋田賢男，長谷川弘治，佐藤慎悟，“ 開放型電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッド・トレフツ有限要素解析法，” 計算数理工学論文集，vol.10，pp.87-92，Dec. 2010.

[55] 森田好人, 長谷川弘治, 佐藤慎悟, 嶋田賢男,“ 電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 信学技報，vol.111，no.147，pp.183-188，July 2011.

[56] 佐藤慎悟，長谷川弘治，平山浩一，“ 二重周期構造による平面波散乱特性の三次元ハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 信学論（C），vol.J94-C，no.10，pp.277-287，Oct. 2011.

[57] 嶋田賢男，森田好人，長谷川弘治，佐藤慎悟，“ 電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解法への混入解，” 計算数理工学論文集，vol.11，pp.1-6，Dec. 2011.

[58] 佐藤慎悟，森田好人，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 電磁波導波路非線形固有値問題の解の判別法（線形化問題の固有値あるいは固有値の感度を用いる方法），” 計算数理工学論文集，vol.12，pp.31-36，Dec. 2012.

[59] 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 縮退モードを有する電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 計算数理工学論文集，vol.13，pp.73-78，Nov. 2013.

[60] 森田好人，長谷川弘治，佐藤慎悟，嶋田賢男，“ 伝搬方向に一様な電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 信学技報，vol.114，no.141，pp.181-186，July 2014.

[61] 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 電磁波導波路の対称あるいは反対称固有モードのハイブリッドトレフツ有限要素解析，” 計算数理工学論文集，vol.14，pp.49-54，Dec. 2014.

[62] P. Kravanja, T. Sakurai and M. Van Barel，“ On locating clusters of zeros of analytic functions，” BIT Numerical Mathematics, vol.39, no.4, pp.646-682, Dec. 1999.

[63] T. Sakurai and H. Sugiura, “ A projection method for generalized eigenvalue problems using numerical integration, ”Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.159, no.1, pp.119-128, Oct. 2003.

[64] P. Kravanja, T. Sakurai, H. Sugiura, and M.V. Barel, “ A perturbation result for generalized eigenvalue problems and its application to error estimation in a quadrature method for computing zeros of analytic functions, ”Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.161, no.2, pp.339-347, Dec. 2003.

[65] 櫻井鉄也，朝倉順子，多田野寛人，池上努，木村欣司，“ 周回積分に基づく非線形固有値問題の解法，” 数理解析研究所講究録，no.1638，pp.73-82，April 2009.

[66] 櫻井鉄也，“ 非線形固有値問題の数値解法とその応用，” 計算数理工学レビュー，no.2009-2，pp.31-39，Sept. 2009.

[67] 宮田考史，杜磊，曽我部知広，山本有作，張紹良，“ 多重連結領域の固有値問題に対する Sakurai-Sugiura 法の拡張，”日本応用数理学会論文誌，vol.19，no.4，pp.537-550，Dec. 2009.

[68] J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura, “ A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, ” Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters, vol.1, pp.52-55, Aug. 2009.

[69] T. Sakurai, J. Asakura, H. Tadano, and T. Ikegami, “ Error analysis for a matrix pencil of Hankel matrices with perturbed complex moments, ” Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters, vol.1, pp.76-79, Dec. 2009.

[70] T. Ikegami, T. Sakurai, and U. Nagashima, “ A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method, ” Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.233, no.8, pp.1927-1936, Feb. 2010.

[71] T. Ikegami and T. Sakurai, “ Contour integral eigensolver for non-Herimitian system: a Rayleigh-Ritz-type approach, ”Taiwanese Journal of Mathematics, vol.14, no.3A, pp.825-837, June 2010.

[72] T. Sakurai and H. Tadano, “ A parallel eigensolver using contour integration for generalized eigenvalue problems in molecular simulation, ” Taiwanese Journal of Mathematics, vol.14, no.3A, pp.855-867, June 2010.

[73] J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura, “ A numerical method for polynomial eigenvalue problems using contour integral, ” Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, vol.27, no.1, pp.73-90, June 2010.

[74] H. Ohno, Y. Kuramashi, T. Sakurai, and H. Tadano, “ A quadrature-based eigensolver with a Krylov subspace method for shifted linear systems for Hermitian eigenproblems in lattice QCD, ” Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters, vol.2, pp.115-118, Dec. 2010.

[75] Y. Futamura, H. Tadano, and T. Sakurai, “ Parallel stochastic estimation method of eigenvalue distribution, ” Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters,

vol.2, pp.127-130, Dec. 2010.

[76] Y. Maeda, Y. Futamura, and T. Sakurai, " Stochastic estimation method of eigenvalue density for nonlinear eigenvalue problem on the complex plane, "Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters, vol.3, pp.61-64, Oct. 2011.

[77] H. Gao, T. Matsumoto, T. Takahashi, and T. Yamada, " Eigenvalue analysis for 2D acoustic problem by BEM with block SS method, "Transactions of the Japan Society for Computational Methods in Engineering, vol.11, pp.107-110, Dec. 2011.

[78] A. Imakura, T. Sakurai, K. Sumiyoshi, and H. Matsufuru, " A parameter optimization technique for a weighted Jacobi-type preconditioner, " Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters, vol.4, pp.41-44, Dec. 2012.

[79] A. Leblanc, and A. Lavie, " Solving acoustic nonlinear eigenvalue problems with a contour integral method, "Engineering Analysis with Boundary Elements, vol.37, no.1, pp.162-166, Jan. 2013.

[80] S. Yokota, and T. Sakurai, " A projection method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, " Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters, vol.5, pp.41-44, March 2013.

[81] H. Gao, T. Matsumoto, T. Takahashi, and H. Isakari, " Eigenvalue analysis for acoustic problem in 3D by boundary element method with the block Sakurai-Sugiura method, " Engineering Analysis with Boundary Elements, vol.37, no.6, pp.914-923, June 2013.

[82] I. Yamazaki, H. Tadano, T. Sakurai, and T. Ikegami, " Performance comparison of parallel eigensolvers based on a contour integral method and a Lanczos method, " Parallel Computing, vol.39, no.6, pp.280-290, June 2013.

[83] Y. Nagai, Y. Shinohara, Y. Futamura, Y. Ota, and H. Tadano, " Numerical construcion of a low-Energy effective Hamiltonian in a self-consistent Bogoliubov-de gennes approach of super conductivity, " Journal of Physical Society of Japan, vol.82, no.094701, pp.1-10, July 2013.

[84] T. Sakurai, Y. Futamura, and H. Tadano, " Efficient parameter estimation and implementation of a contour integral-based eigensolver, " Journal of Algorithms & Computational Technology, vol.7, no.3, pp.249-270, Sept. 2013.

[85] S. Sato, T. Shimada, and K. Hasegawa, " Extraction of all propagation constants in a specified region from the transcendental equation of a dispersion relation by using the Sakurai-Sugiura projection method, "J. Opt. Soc. Am. A, vol.32, no.7, pp.1216-1221, July 2015.

[86] G.H. Golub, and J. Sun, Matrix Perturbation Theory, Academic, 1990.

[87] P.R. McISAAC, " Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides-I: summary of results, "IEEE Trans. Microw. theory Tech., vol.MTT-23, no.5, pp.421-429, May 1975.

[88] P.R. McISAAC, “ Symmetry-induced modal characteristics of uniform waveguides-II: theory, ” IEEE Trans. Microw. theory Tech., vol.MTT-23, no.5, pp.429-433, May 1975.

[89] J. A. Nelder and R. Mead, “ A simplex method for function minimization, ” Comput. J., vol.7, issue.4, pp.308-313, 1965.

[90] J.C. Lagarias, J.A. Reeds, M.H. Wright, and P.E. Wright, “ Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions, ” SIAM J. Optim., vol.9, no.1, pp.112-147, Dec. 1998.

[91] J.J. Michalski, and P. Kowalczyk, “ Efficient and systematic solution of real and complex eigenvalue problems employing simplex chain vertices searching procedure, ”IEEE Trans. Microw. theory Tech., vol.59, no.9, pp.2197-2205, Sept. 2011.

[92] L. Cairo and T. Kahan, Variational Techniques in Electromagnetism, Gordon and Breach, 1965.

[93] L. M. Delves and J. N. Lyness, “ A Numerical method for locating the zeros of an analytic function, ” Math. Comput., vol.21, no.100, pp.543-560, Oct. 1967.

[94] E. Anemogiannis and E. N. Glytsis, “ Multilayer waveguides: efficient numerical analysis of general structures, ” J. Lightwave Technol., vol.10, no.10, pp.1344-1351, Oct. 1992.

[95] M. Abramowitz and P. Vincent, Handbook of Mathematical Functions, Dover publications, New York, 1965.

[96] J.H. Wilkinson, “ Kronecker’s canonlcal form and the QZ algorithm, ”Linear Algebra and its Applications, vol.28, pp.285-303, Dec. 1979.

[97] G.H. Golub, and C.F. Van Loan, Matrix Computations, Johns Hopkins University Press, 1989.

[98] M. Matsumoto and M. Tsutsumi, “ Radiation characteristics of a dielectric slab waveguide periodically loaded with thick metal strips, ”IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol.MTT-35, no.2, pp.89-95, Feb. 1987.

[99] C.G. Broyden, “ A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations, ”Math. Comput., vol.19, no.92, pp.577-593, Oct. 1965.

[100] 宮本定明, “ クラスタ分析入門, ” 森北出版株式会社，東京，2006.

[101] I.H. Malitson, “ Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica, ”J. Opt. Soc. Am., vol.55, no.10, pp.1205-1209, Oct. 1965.

論文目録

原著論文（査読付き）

1. 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 電磁波導波路の対称あるいは反対称固有モードのハイブリッドトレフツ有限要素解析，” 計算数理工学論文集，vol.14，pp.49-54，Dec. 2014.
2. 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 縮退モードを有する電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 計算数理工学論文集，vol.13，pp.73-78，Nov. 2013.
3. 佐藤慎悟，森田好人，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 電磁波導波路非線形固有値問題の解の判別法（線形化問題の固有値あるいは固有値の感度を用いる方法），” 計算数理工学論文集，vol.12，pp.31-36，Dec. 2012.
4. 嶋田賢男，森田好人，長谷川弘治，佐藤慎悟，“ 電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解法への混入解，” 計算数理工学論文集，vol.11，pp.1-6，Dec. 2011.
5. 森田好人，嶋田賢男，長谷川弘治，佐藤慎悟，“ 開放型電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッド・トレフツ有限要素解析法，” 計算数理工学論文集，vol.10，pp.87-92，Dec. 2010.

学会発表

学会講演

1. ◯ 森田好人，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 円筒誘電体導波路の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 電気・情報関係学会北海道支部連合大会講演論文集，Oct. 2013
2. ◯ 森田好人，嶋田賢男，長谷川弘治，“ 非線形固有値問題の数値解法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素法，” 電気・情報関係学会北海道支部連合大会講演論文集，Oct. 2010

シンポジウム，研究会

1. ◯ 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，“ 電磁波導波路固有値問題の Multipole method 解析における求解法の検討，” 信学技報，vol.115，no.141，pp.111-116，July 2015.
2. ◯ 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 電磁波導波路の対称あるいは反対称固有モードのハイブリッドトレフツ有限要素解析，” 計算数理工学論文集，vol.14，pp.49-54，Dec. 2014.
3. ◯ 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 伝搬方向に一様な電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 信学技報，pp.181-186，July 2014
4. ◯ 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男，“ 縮退モードを有する電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 計算数理工学論文集，vol.13，pp.73-78，Nov. 2013.
5. 嶋田賢男，森田好人，◯ 長谷川弘治，佐藤慎悟，“ 電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解法への混入解，” 計算数理工学論文集，vol.11，pp.1-6，Dec. 2011.
6. ◯ 森田好人, 長谷川弘治, 佐藤慎悟, 嶋田賢男,“ 電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解析法，” 信学技報，pp.183-188，July 2011.
7. ◯ 森田好人, 嶋田賢男, 長谷川弘治, 佐藤慎悟,“ 開放型電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッド・トレフツ有限要素解析法，” 計算数理工学論文集，vol.10，pp.87-92，Dec. 2010.

国際会議

口頭発表

1. S. Sato, ◯Y. Morita, K. Hasegawa, T. Shimada, “ Removing nonphysical solutions of electromagnetic waveguide nonlinear eigenvalue problems (by using the eigenvalues or the sensitivity of the eigenvalue of the linearized problems), ”Abstracts of the 4th Asia-Pacific International Conference on Computational Methods in Engineering, Dec. 2012

ポスター発表

1. ◯Y. Morita, S. Sato, K. Hasegawa,“ A Hybrid Trefftz Finite Element Analysis of Eigenmodes Propagating in a Holey Fiber, ” Progress In Electromagnetics Research Symposium, July 2015

（◯ は発表者）