有限要素ビーム伝搬解析の領域分割に基づく効率化に関する検討

社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

有限要素ビーム伝搬解析の領域分割に基づく効率化に関する検討

河井　翔平†　　辻　　寧英†

† 室蘭工業大学情報電子工学系専攻　〒 050–8585 北海道室蘭市水元町 27-1
E-mail: †{16043017,y-tsuji}@mmm.muroran-it.ac.jp

あらまし　伝搬方向への構造変化が緩やかで反射波を無視できる光導波路の解析にはビーム伝搬法 (BPM) が有効であり，様々なビーム伝搬法が開発されてきた．その中で，横方向の界の離散化に有限要素法 (FEM) を用いる有限要素ビーム伝搬法 (FE-BPM) は任意形状導波路への適用性に優れているが，伝搬方向に有限要素メッシュを更新する必要があることに加えて一般に連立一次方程式を解く必要があるため，伝搬方向に構造が連続的に変化する導波路に対して必ずしも計算が効率的とは言えない．本研究では，横方向の離散化に用いる FEM 解析を領域分割法を用いて並列化することで FE-BPM 解析を高速化するための検討を行なっている．領域分割法では，境界成分を厳密に求める方法と，領域同士を重ねることにより境界成分の計算を省略する方法の 2 通りについて検討している．

キーワード　ビーム伝搬法，有限要素法，領域分割法，光導波路解析

Study on Efficient Finite Element Beam Propagation Analysis Using Domain Decomposition

Shohei KAWAI† and Yasuhide TSUJI†

† Muroran Institute of Technology　Mizumoto 27–1,
Muroran, Hokkaido, 050–8585 Japan
E-mail: †{16043017,y-tsuji}@mmm.muroran-it.ac.jp

Abstract　Beam Propagation Method (BPM) is effective for the analysis of the waveguide which is longitudinally varying and could ignore the reflection wave. Therefore various BPM had developed now. Finite Element Beam Propagation Method (FE-BPM) which use Finite Element Method (FEM) has applicability for arbitrary shape of waveguides. However, FE-BPM is not enough efficient for the waveguides which is longitudinally varying, because Finite Element mesh need to be updated and generally, this method need to solve the primary simultaneous equations. In this study, FEM analysis which is used for discretization waveguides to transverse direction is parallelized by domain decomposition method to speed up FE-BPM analysis. In domain decomposition method, two approaches are concerned, one way is strict calculating the boundary fields, another is omitting the strict calculation boundary fields by iterating between domains.

Key words　Beam propagation method, Finite element method, Domain decomposition method, optical waveguide analysis

1. まえがき

高速光通信を実現するための高性能な光デバイスの開発が活発に行われている．伝搬方向に構造の変化が緩やかで反射がほとんど生じない導波路型光デバイスの効率的な解析・設計にはビーム伝搬法 (Beam Propagation Method; BPM) [1] が有効であり広く用いられている．BPM は横方向の界の離散化の違いにより様々な方法が考案されており，高速フーリエ変換を用いる高速フーリエ変換 BPM (Fast Fourier Transform BPM; FFT-BPM) は離散化に横方向伝搬解を用いるため比較的広角ビーム伝搬に適しているが，スプリットステップ法を基礎とするため，最近の強導波路デバイスに用いることは一般に難しい．一方，横方向の界の離散化に差分法を用いる有限差分 BPM (Finite Difference BPM; FD-BPM) [2] や，有限要素法を用いた有限要素 BPM(Finite Element BPM; FE-BPM) [3] は強導波路を扱うことができる．そのうち FD-BPM は ADI 法を用いることで計算を効率化できることから現在最も広く用いられている．それに対して，FE-BPM は大規模な行列計算を必要

とするため，特に 3 次元光導波路の解析においては計算規模が増大しやすい．しかしながら，FE-BPM は任意形状への適用性に優れている FEM を用いているため曲辺境界まで含めて媒質境界を精度よく扱うことが可能であり，不均一メッシュを用いることで計算の効率化も図れることから，フォトニック結晶ファイバのような複雑な断面形状を有する光導波路の解析においては FE-BPM 解析が有効であると考えられ，その計算の効率化と解析の安定化は非常に重要である．

本研究では，FE-BPM 解析の高速化を目指して，領域分割法を用いた並列計算のための検討を行っている．ここでは，FEM 解析に領域分割法を適用する際に，境界成分を厳密に求める方法と，領域同士を重ねることにより境界成分の計算を省略する方法の 2 通りの方法について検討を行っている．

2. 有限要素ビーム伝搬法

2.1 基　本　式

光導波路解析のための基本式は，マクスウェルの方程式から以下のように与えられる．

$$\nabla \times (p \nabla \times \boldsymbol{\Phi}) - k_0^2 q \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

ここに k_0 は自由空間波数であり，p，q は未知変数 $\boldsymbol{\Phi}$ を電界 $\boldsymbol{E}$ とするか磁界 $\boldsymbol{H}$ とするかにより，それぞれ以下のように定義される．

$$\begin{cases} p = 1, \quad q = n^2 \quad \boldsymbol{\Psi} = \sqrt{\mu_0}\boldsymbol{H} \quad \text{for} \quad \boldsymbol{\Phi} = \sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{E} \\ p = 1/n^2, \quad q = 1 \quad \boldsymbol{\Psi} = -\sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{E} \quad \text{for} \quad \boldsymbol{\Phi} = \sqrt{\mu_0}\boldsymbol{H} \end{cases} \tag{2}$$

2.2 有限要素法による固有モード解析の定式化

図 1 に示すような伝搬方向 z に構造変化のない直線導波路中を z 方向に伝搬定数 β で一様伝搬している固有モードを考えるとき，電磁界 $\boldsymbol{\Phi}$ は以下の形で表すことができる．

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y,z) = \boldsymbol{\phi}(x,y)\exp(-j\beta z) \tag{3}$$

FEM では，導波路断面を有限要素に分割し，電磁界 $\boldsymbol{\phi}(x,y)$ を各要素において形状関数 $\{\boldsymbol{N}\}$ を用いて以下のように近似する．

$$\boldsymbol{\phi}(x,y) = \{\boldsymbol{N}\}^T\{\phi_e\} \tag{4}$$

式 (3)，(4) を式 (1) に代入し，ガラーキン法に基づく FEM を適用し，全ての要素について重ね合わせることによって，最終的に以下の一般化固有値方程式を得る．

$$([K] - \beta^2[M])\{\phi\} = \{0\} \tag{5}$$

FEM による光導波路解析では，1 次元線要素を用いた 2 次元導波路解析，三角形節点要素を用いた 3 次元導波路のスカラ波近似解析，三角形辺/節点混合要素を用いた 3 次元導波路のフルベクトル解析のいずれの場合にも最終的に式 (5) の形の一般化固有値方程式に帰着させることができる．したがって，以下の定式化は全ての場合に対して共通に考えることができる．

2.3 有限要素法ビーム伝搬解析の定式化

次に図 2 に示すような伝搬方向 z に構造が変化する導波路を

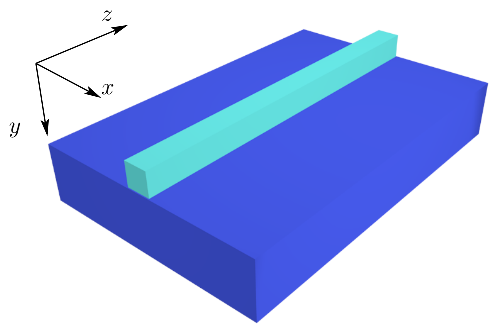


図 1　一様導波路

考える．このとき導波路中を伝搬する光波は導波路断面の分布を変化させながら z 方向に伝搬していく．いま，z 方向に位相定数 $k_0 n_0$ で振動する伝搬項成分と緩慢変化する包絡線振幅 ϕ にわけ，電磁界 $\boldsymbol{\Phi}$ を以下のように表す．

$$\boldsymbol{\Phi}(x,y,z) = \boldsymbol{\phi}(x,y,z)\exp(-jk_0 n_0 z) \tag{6}$$

ここで，n_0 は参照屈折率と呼ばれる．このとき，前節で得られた固有値方程式 (5) において

$$-j\beta \to -jk_0 n_0 + \frac{\partial}{\partial z}$$

とすることで，ビーム伝搬法の基本式を導出することができ，以下の FE-BPM 解析の基本式が得られる．

$$\begin{aligned}[M]\frac{\partial^2\{\phi\}}{\partial z^2} - j2k_0 n_0 [M]\frac{\partial\{\phi\}}{\partial z} \\ +([K] - k_0^2 n_0^2 [M])\{\phi\} = \{0\}\end{aligned} \tag{7}$$

さらに，式 (7) にパデ (1,1) 近似を用いると以下の z に関する 1 階微分方程式が得られる．

$$-j2k_0 n_0 \left[\tilde{M}\right]\frac{\partial\{\phi\}}{\partial z} + ([K] - k_0^2 n_0^2 [M])\{\phi\} = \{0\} \tag{8}$$

$$\left[\tilde{M}\right] = [M] + \frac{1}{4k_0^2 n_0^2}([K] - k_0^2 n_0^2 [M])$$

式 (8) を θ 法を用いて z 方向に差分化することによって，最終的に以下の逐次計算式を導き出すことができる．

$$[A]_{i+\frac{1}{2}}\{\phi\}_{i+1} = [B]_{i+\frac{1}{2}}\{\phi\}_i \tag{9}$$

ここに $[A]_i$，$[B]_i$ はそれぞれ以下のように定義される．

$$\begin{aligned}[A]_i &= -j2k_0 n_0 \left[\tilde{M}\right]_i + \theta\Delta z([K]_i - k_0^2 n_0^2 [M]_i) \\ [B]_i &= -j2k_0 n_0 \left[\tilde{M}\right]_i + (\theta - 1)\Delta z([K]_i - k_0^2 n_0^2 [M]_i)\end{aligned}$$

式 (9) より，入射端での電磁界 $\{\phi\}_0$ が与えられると逐次計算により任意の位置 $z = i\Delta z$ での電磁界振幅 $\{\phi\}_i$ が求まることがわかる．

3. 領域分割法

領域分割法は解析領域全体を少領域に分割し，分割された小領域ごとに解析を行うことで行列計算の規模を縮小し，かつ計算の並列化を図る手法である．領域分割法によって 3 次元光導

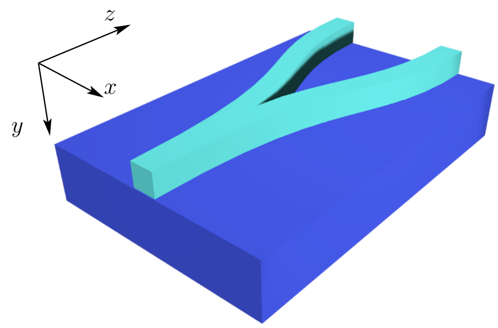


図 2　伝搬方向に構造変化のある導波路

波路の断面を分割したときのイメージを図 3(a) に示す．領域を分割する際には分割された境界面の取り扱いが重要となるが，ここでは，図 3(a) に示すように領域を重ねずに分割し，領域の内点を消去して境界のみの方程式に縮小して解を求める方法と，図 3(b) に示すように分割小領域を少しずつ重ねることで境界条件を近似的に取り扱う方法について検討する．

3. 1　境界項を厳密に計算する場合

FE-BPM の逐次計算式 (9) は以下のように書き換えることができる．

$$[A]\{\phi\} = \{u\} \qquad (\{u\} = [B]\{\phi\}) \tag{10}$$

ここに表記を簡単にするため下添字 i，$i+1$ 等は省略している．

いま，解析領域全体を N 個の少領域に分割することを考える．簡単のため，式 (10) の行と列を部分領域ごとおよび境界上の節点に関する量の順に並べ替え，以下のように表す．

$$\begin{bmatrix} [A_{11}] & & & 0 & [A_{1b}] \\ & [A_{22}] & & & [A_{2b}] \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & [A_{NN}] & [A_{Nb}] \\ [A_{b1}] & [A_{b2}] & \cdots & [A_{bN}] & [A_{1b}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_1\} \\ \{\phi_2\} \\ \vdots \\ \{\phi_N\} \\ \{\phi_b\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{u_1\} \\ \{u_2\} \\ \vdots \\ \{u_N\} \\ \{u_b\} \end{bmatrix} \tag{11}$$

ここに $\{\phi_b\}$ は境界上の成分，$\{\phi_i\}$ $(i=1,2,\cdots N)$ は領域 i から境界上の成分を除いた成分を表す．このとき，$\{\phi_i\}$，$\{\phi_b\}$ に関して

$$\{\phi_i\} = [A_{ii}]^{-1}(\{u_i\} - [A_{ib}]\{\phi_b\}) \quad (i=1,2,\cdots N)$$

$$[A_{bb}]\ \{\phi_b\} = \{u_b\} - \sum_{i=1}^{N}[A_{bi}]\{\phi_i\}$$

と書けるので，$\{\phi_i\}$ を消去すると $\{\phi_b\}$ に関する以下の方程式を得る．

$$[S_{bb}]\{\phi_b\} = \{f_b\} \tag{12}$$

ここに $[S_{bb}]$，$\{f_b\}$ は

$$[S_{bb}] = [A_{bb}] - \sum_{i=1}^{N}[A_{bi}][P_{ii}]^{-1}[A_{ib}] \tag{13}$$

$$\{f_{bb}\} = [A_{bb}] - \sum_{i=1}^{N}[A_{bi}][P_{ii}]^{-1}\{u_i\} \tag{14}$$

である．この方法をここでは DDM1 とする．式 (12) の $[S_{bb}]$ は密行列化するが，FE-BPM 解析では現在の伝搬ステップの界を初期解として反復法を用いることで計算を効率化できると考えられる．

3. 2　分割小領域を重ねて境界項の計算を省略する場合

境界項を厳密に評価することで式 (10) を厳密に解くことができるが，境界項の方程式は密行列となるため，必ずしも効率よく解けるとは限らない上，計算手順が 2 段階になるため並列化する際にはその境界項の計算も含めた並列化が必要になる．ここでは，分割小領域同士をわずかに重ねることで境界項の計算を省略する方法について 2 通りの方法を示す．

3. 2. 1　境界振幅を伝搬前界分布から与える場合

分割小領域に関する計算を内点と境界上の点に分けて以下のように表す．

$$\begin{bmatrix} [A_{11,00}] & [A_{11,0b}] \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi_{1,0}\} \\ \{\phi_{1,b}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{u_{1,0}\} \\ \{\phi_{1,b}\} \end{bmatrix} \tag{15}$$

ここで $\{\phi_{1,0}\}$，$\{\phi_{1,b}\}$ はそれぞれ小領域の内点，境界点に関する振幅からなるベクトル，$[A_{11,00}]$，$[A_{11,0b}]$ は行列 $[A_{11}]$ の部分行列，$[I]$，$[0]$ はそれぞれ単位行列，零行列であり，右辺の $\{\phi_{1,b}\}$ は現在の伝搬界分布をそのまま用いる．これは領域境界の振幅を現在の界分布に固定する強制境界条件を課すことに等しい．ここでは，この方法を DDM2A とする．

3. 2. 2　境界積分項を伝搬前界分布から与える場合

FEM を部分領域に適用した場合には，実際には領域境界 Γ_i における境界条件が必要になる．この境界条件に関する境界積分項は第 i 領域に対して

$$\{v_{i,b}\} = -jk_0 \sum_{\Gamma_i} \iint_{\Gamma_i} \{\boldsymbol{N}\}_\Gamma \cdot (\boldsymbol{i}_n \times \boldsymbol{\Psi})|_{\Gamma_i}\, dS \tag{16}$$

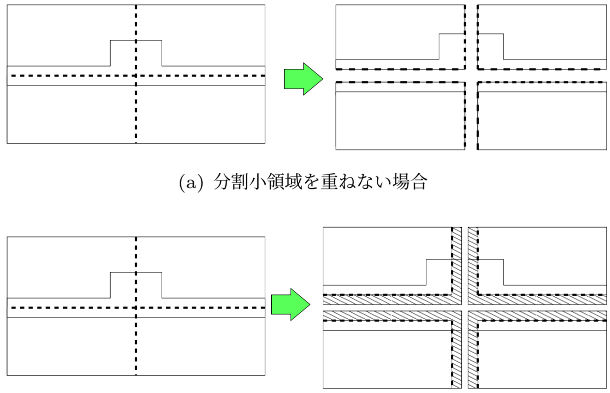
で与えられるため，これを考慮することにより境界項からの反射波を低減できる．この境界条件は領域境界付近での放射条件を仮定するといわゆる透明境界条件 (Transparent Boundary Condition; TBC) になるが，分割された領域の境界においては放射界とはならないため，ここでは現在の界分布を基にこの境界項を作成する．ここでは，この方法を DDM2B とする．

4.　数値計算例

4. 1　2 次元導波路解析の FE-BPM 解析

領域分割法の妥当性を確認するため，まず，図 4 に示すような 2 次元 Y 分岐光導波路を解析例として，領域分割 FE-BPM の解析精度を領域分割しない通常の FE-BPM の解析結果との比較により確かめる．材料パラメータを $n_1 = 1.45$，$n_2 = 1.445$ とし，構造パラメータは導波路幅を $w = 5\ \mu$m，分岐後の導波路中心間距離を $d = 40\ \mu$m，解析領域幅を $W_x = 100\ \mu$m，伝搬距離パラメータを $L_Y = 800\ \mu$m，$l = 100\ \mu$m としている．有限要素分割には 2 次要素を用いた．

境界項の厳密計算を行った FE-BPM 解析の伝搬界分布を図 5 に示す．図を見ると境界項を厳密に計算していることから，分割位置での界の乱れはなく，領域分割をしない通常の FE-BPM



(a) 分割小領域を重ねない場合

(b) 分割小領域を重ねる場合

図 3　領域分割の概念図

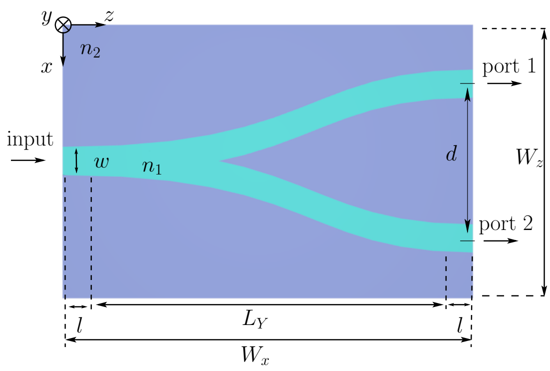


図 4　2 次元 Y 分岐光導波路

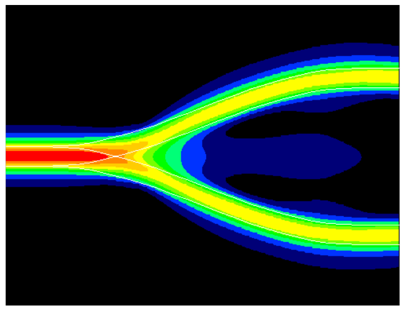


図 5　DDM1 を用いた FE-BPM 解析による Y 分岐光導波路の伝搬界分布

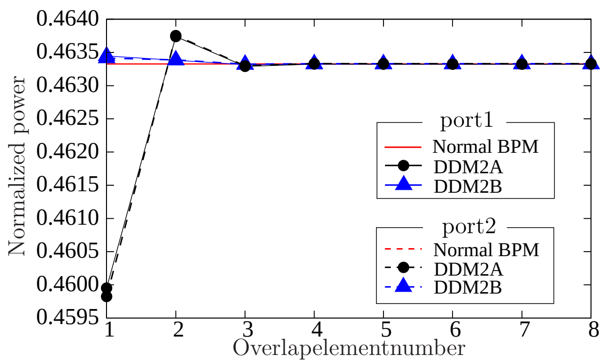


図 6　DDM2A と DDM2B における重ねる要素数と解析精度の比較

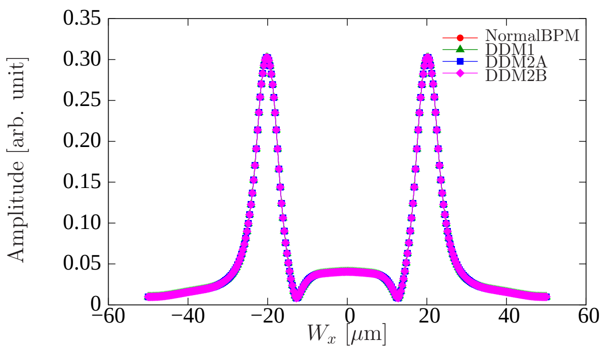


図 7　各領域分割法での出力端における界分布の比較

と伝搬界分布，出力パワーともにまったく同じであることを確認している．

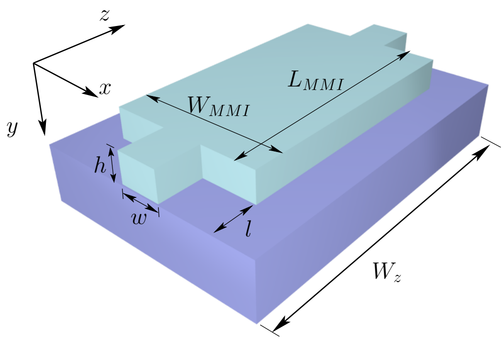
次に，分割小領域を重ねて境界方程式の計算を省略した場合の解析結果を示す．図 6 に重ねる要素数を変化させたときの各ポートの出力パワーの変化の様子を示す．図には領域分割しない通常の FE-BPM 解析による結果も示している．また，ここでは全体の要素数を 150 とし，領域を 2 つに分割した場合の結果を示している．図を見ると，小領域の境界条件として境界積分項を近似的に評価した場合の結果の方がわずかに解の収束が早いことがわかるが，いずれの場合にも 2 要素程度を重ねることで相対誤差約 0.1%以下を実現できていることがわかる．図 7 に重ねる要素数を 2 としたときの出力端における界分布を比較して示す．領域分割しない通常の FE-BPM 解析の結果とよく一致しており，領域分割法に基づく FE-BPM 解析ではわずかに領域を重ねることで境界処理を省略できることがわかる．

4. 2　3 次元光導波路のスカラ波近似 FE-BPM 解析

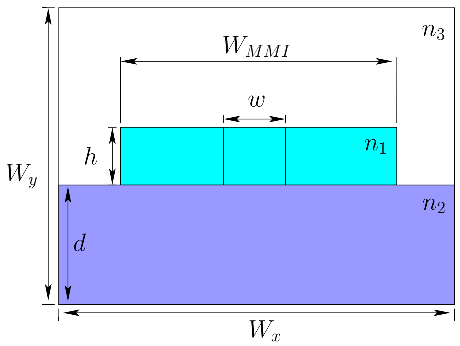
ここまで，2 次元導波路の FE-BPM 解析において境界処理方法の違いと領域分割法の精度について検討を行った．ここでは 3 次元導波路の FE-BPM 解析に領域分割法を適用したときの解析例を示す．解析例として図 8 に示す MMI カプラを考え，材料定数を $n_1 = 1.48$，$n_2 = n_3 = 1.445$ とし，構造パラメータは入出力導波路幅を $w = 4$ μm，高さを $h = 4$ μm，長さを $l = 50$ μm，MMI カプラの部の幅を $W_{\mathrm{MMI}} = 20$ μm，長を $L_{\mathrm{MMI}} = 450$ μm，基板の厚みを $d = 6$ μm，解析領域を $W_x = 30$ μm，$W_y = 16$ μm，$W_z = 550$ μm としている．入射光として動作波長を 1.55 μm の E^x 基本モードを考える．図 9 に，領域分割を行わない場合と，DDM2B を用いた場合の FE-BPM 解析により求まる伝搬界分布を示す．こでは DDM2B の領域分割を用い，領域分割数を 2，重ねる要素数を 2 としている．図を見ると分割境界での界の乱れもなく，領域分割をしない FE-BPM の伝搬界分布と良く一致した結果が得られていることがわかる．

5.　ま　と　め

FE-BPM において横方向の界の離散化に用いる FEM に領域分割法を適用し，計算を並列化するための検討を行った．ここでは，領域分割法として領域を重ねない場合と重ねる場合の 2 通りの方法について検討を行い，領域境界の界を厳密に解かなくても，数個程度の領域境界要素を重ねることで，十分な精度



(a) 全体構造



(b) xy 断面

図 8　MMI カプラ

で解析が行えることを確認した．今後はフルベクトル FE-BPM 解析の領域分割計算について検討する予定である．

文　献

[1] M. D. Feit and J. A. Fleck Jr., "Light propagation in graded-index optical fibers" *Appl. Opt.*, vol. 17, no. 24, pp. 3990-3998, Dec. 1978.

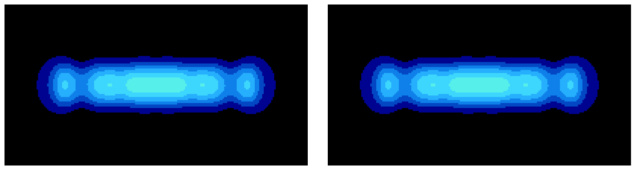
[2] Y. Chung and N. Dagli, "Analysis of integrated optical coner reflectors using a finite-difference beam propagation method" *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 3, no. 2, pp. 150-152, Feb. 1991.

[3] Y. Tsuji and M. Koshiba, "Adaptive mesh generation for full-vectorial guided-mode and beam propagation solutions" *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, vol. 6, no. 1, pp. 163-169, Jan. 2000.

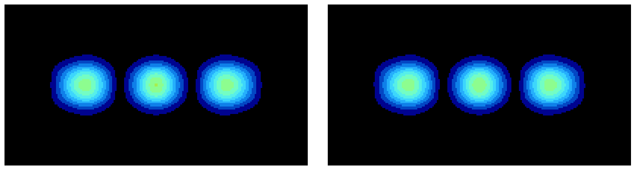
[4] Y. Arai, A. Maruta, and M. Matsuhara, "Transparent boundary for the finite-element beam-propagation method" *Opt. Lett.*, vol. 18, pp. 765-766, May 1993.

[5] G. R. Hadley, "Wide-angle beam propagation using Pade approximant operators", *Opt. Lett.*, vol 17, pp. 1426-1428, 1992.

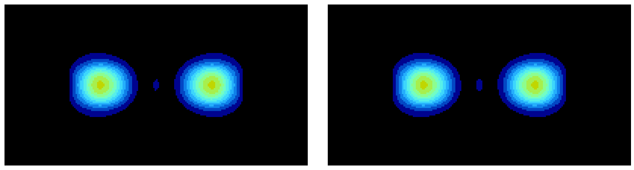
(a) $z = 50\ \mu$m



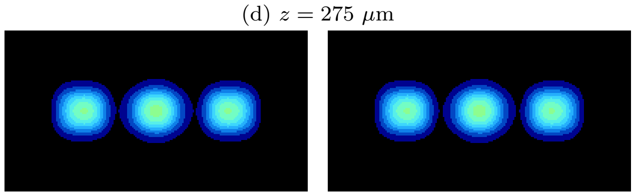
(b) $z = 125\ \mu$m



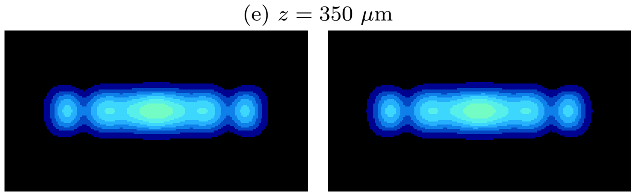
(c) $z = 200\ \mu$m



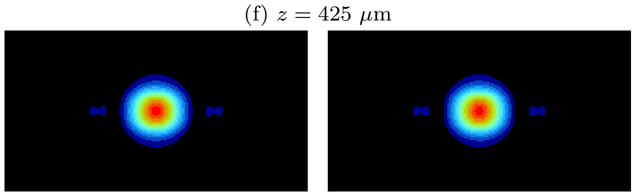
(d) $z = 275\ \mu$m



(e) $z = 350\ \mu$m



(f) $z = 425\ \mu$m



(g) $z = 500\ \mu$m

図 9　MMI 中の光の伝搬の様子 (左：通常の FE-BPM，右：領域分割 FE-BPM)