

## 周期入力制御系の数理構造と強制引き込み現象

梶原 秀一\*・花島 直彦\*・青柳 学\*

Mathematical Structure and Force Entrainment of Periodic Input Control System

Hidekazu KAJIWARA\*, Naohiko HANAJIMA\* and Manabu AOYAGI\*

When periodic external force is inputted to van der Pol equation, its self-excitation vibration is suppressed, and its oscillatory frequency synchronizes with frequency of the external force. This behavior is called forced entrainment. We proposed periodic input control method that can control energy of system using forced entrainment, and controlled periodic motion of various systems (such as pendulum, quasi passive walking robot and hopping robot). Because a periodic input control system whose energy is controlled by our method, vibrates without external force continuously, it is supposed that the system is a self-excitation vibration system. Therefore, we analyzed structure and characteristics of the system. First, we analyze whether periodic input system has characteristics as self-excitation vibration system. Next, we derive the condition that forced entrainment is caused by periodic external force. Finally, we show the result that inspected validity of our analysis by experiments.

**Key Words:** van der Pol's equation, synchronization, forced entrainment, periodic input control

### 1. はじめに

自励振動系である van der Pol (VDP) 方程式に周期的な外力を加えると自励振動が抑制されて外力の周期と同期する強制引き込み現象が起きる。著者らはこれまでに、パラメータ励振系であるブランコの振れ制御、多自由度振動系である鉄棒ロボットや回転型 2 重倒立振子の振り上げ制御などを通じ、VDP 方程式の強制引き込み現象を利用して周期入力と制御対象を一定の位相差で同期させて制御する方法を提案してきた<sup>1)~3)</sup>。さらに、同期させる周期入力の振幅や位相を目標エネルギーからの偏差に応じて変調することで、制御対象のエネルギーを制御する周期入力制御法を考案し<sup>4)</sup>、本手法を準受動的歩行ロボットの歩行制御<sup>5)</sup>、調教用スマートスーツのアシスト力制御<sup>6)</sup>、ホッピングロボットの跳躍高制御<sup>7)</sup>に応用してきた。以上のように著者らは、VDP 方程式の強制引き込み現象を利用してメカニカルシステムを制御する周期入力制御法を提案してきたが、本手法は 1 入力系にのみ適用可能であった。

自励振動系である VDP 方程式を相互に結合した結合 VDP 方程式では相互引き込み現象がおき、安定な同期パターンが複数存在することが知られている<sup>8)~10)</sup>。これまでにわれわれは、結合 VDP 方程式の同期パターン制御を制御理論の観

点から取り組み、強制引き込み現象を利用して VDP 方程式の周期解を目標同期パターンの近傍に誘導した後、相互引き込み現象を利用して解を目標同期パターンに収束させる手法を提案してきた<sup>11)</sup>。本手法は方程式の結合パラメータを強制引き込み時と相互引き込み時で切り替えるだけで、簡単に同期パターンを制御することができる。

周期入力制御法によりエネルギーが制御されているシステム(周期入力制御系)は、一定の振幅をもつリミットサイクルに安定化されるため、一種の自励振動系になると考えられる。よってこの自励振動系が VDP 方程式と同様であれば、周期入力制御系を複数相互に結合したシステム(結合周期入力制御系)の制御に結合 VDP 方程式の同期パターン制御法を適用できる。さらに、本手法により複数の周期入力制御系を制御できれば、1 入力系にのみ適用可能であった周期入力制御法を多入力化できる。結果として、周期入力制御法を多自由度振動系の新たな同期パターン制御法として拡張できると考えられる。そこで本論文では、周期入力制御法を多入力化するためのファーストステップとして周期入力制御系が VDP 方程式と同じ自励振動系の特徴をもつかどうか、さらに強制引き込み現象が生じるかどうか理論的に解析し、実験的にも検証した。

以下に、本論文の構成を述べる。まず 2 章において周期入力制御を適用するシステムとして単一振子のエネルギー制御を取り上げ、周期入力制御によるエネルギー制御系を設計する。3 章では、周期入力制御系が VDP 方程式と同じ自励振動系となる条件を示す。つぎに周期入力制御系に周期外力を加えたとき、強制引き込み現象が起きる条件を解析した結果

\* 室蘭工業大学大学院工学研究科 室蘭市水元町 27-1

\* Graduate School of Engineering, Muroran Institute of Technology, 27-1 Mizumoto-cho, Muroran

(Received March 3, 2015)

(Revised April 19, 2016)

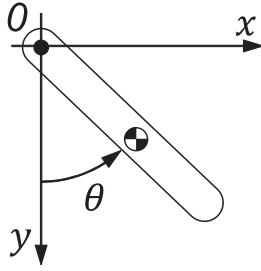


Fig. 1 Model of a simple pendulum system

について述べる。4章では周期入力制御によるエネルギー制御の有効性および、周期入力制御系に周期外力を加えたとき、強制引き込み現象が起きるかどうかを実機により確認した結果について述べる。さらに、応用例として同期信号に複数の周期入力制御系を同期させた結果についても示す。

## 2. 周期入力制御による単一振子のエネルギー制御

これまでわれわれは、準受動的歩行ロボットやホッピングロボットなど周期的な運動をするシステムに対して周期入力制御法を適用してきた<sup>4)~7)</sup>。本手法によりシステムを制御するためには、どのようなタイミングで周期入力を加えると制御対象のエネルギーを制御可能かあらかじめ解析しておく必要がある。われわれはこのために、上述の制御対象を単一振子のモデルとして近似し、エネルギーが制御できるタイミングを解析してきた。このようなことから、本論文では周期入力制御法を適用する一般的なモデルとして単一振子を取り上げる。

本章ではまず、単一振子にどのようなタイミングで周期入力を加えるとエネルギーを制御できるか振子のエネルギー変化率から解析する。つぎに、周期入力制御によるエネルギー制御系を設計し、振子の運動エネルギーの時間平均が制御できることを理論的に示す。最後に振子と周期入力を一定の位相で同期させてエネルギーを制御するための位相制御法について述べる。

### 2.1 単一振子のエネルギー変化率

ここでは Fig. 1 に示す単一振子に対して周期入力制御によるエネルギー制御を考える。Fig. 1 に示すように座標系を設定し、振れ角  $\theta$  は微小であるとして運動方程式を求めると以下ようになる。

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = Gu \quad (1)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I + ml^2}}, \quad G = \frac{1}{I + ml^2} \quad (2)$$

なお、各パラメータの定義は以下のとおりである。

$m$ : 振子の質量 [kg]

$I$ : 振子の重心まわりの慣性モーメント [kgm<sup>2</sup>]

$l$ : 支点から重心までの距離 [m]

$\theta$ : 振子の回転角 [rad]

$u$ : 振子の駆動トルク [Nm]

$g$ : 重力加速度 [m/s<sup>2</sup>]

つぎに制御する振子のエネルギーとして次式の運動エネルギーを考える。

$$E = \frac{1}{2}(I + ml^2)\dot{\theta}^2 \quad (3)$$

上式を時間微分し (1) 式を考慮して整理すると次式となる。

$$\dot{E} = -mgl\theta\dot{\theta} + \dot{\theta}u \quad (4)$$

ここで、振子が固有周期で運動している場合を考える。

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t) \quad (\theta_0 > 0) \quad (5)$$

ただし、振幅  $\theta_0$  は固有周期  $\omega_0$  で振動する振子の速い運動に比べて緩やかに変化すると仮定する。このとき、振子の運動と駆動トルクを位相  $\phi$  で同期させることを考える。

$$u = u_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (6)$$

(5) 式とその時間微分および (6) 式を (4) 式に代入してエネルギー変化率の時間平均を求めると次式となる。

$$\dot{E}^* = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \dot{E} dt = \frac{\omega_0 \theta_0 u_0}{2} \sin \phi \quad (7)$$

ただし、\* は時間平均を表わしている。

上式より駆動トルクの振幅  $u_0$  と位相  $\phi$  を変化させることによりエネルギー変化率を制御できることがわかる。

### 2.2 振幅変調入力によるエネルギー制御

われわれが提案している周期入力制御法は制御対象の運動と同期した周期入力の振幅または位相を目標エネルギーからの偏差により変調することでエネルギーを制御する方法である。ここでは、振幅変調入力によりエネルギーを制御する方法について述べる。

振子のエネルギー  $E$  を制御するために (6) 式の振幅  $u_0$  を目標エネルギー  $E_d$  からの偏差に応じて次式で変調することを考える。

$$u_0 = K_p(E_d - \gamma E) \quad (8)$$

上式において  $K_p$  は目標エネルギーからの偏差に対する比例ゲインであり、 $\gamma$  は、エネルギー制御における定常偏差を補正するためのゲインである。

(6) (8) 式さらに (5) 式およびその時間微分を (4) 式に代入してエネルギー変化率の時間平均を求めると以下となる。

$$\dot{E}^* = \frac{K_p \theta_0 \omega_0}{2} \left( E_d - \frac{3}{2} \gamma E^* \right) \sin \phi \quad (9)$$

ただし  $E^*$  は (3) 式に (5) 式の時間微分を代入して時間平均をとることで求められ次式で表わされる。

$$E^* = \frac{1}{4}(I + ml^2)\theta_0^2\omega_0^2 \quad (10)$$

ここで誤差  $e$  を以下のように定義する。

$$e = E_d - \frac{3}{2}\gamma E \quad (11)$$

上式の時間平均  $e^*$  および、時間微分  $\dot{e}$  の時間平均  $\dot{e}^*$  の関係を利用して (9) 式を整理すると次式となる。

$$\dot{e}^* = -\frac{3\gamma K_p \theta_0 \omega_0}{4} e^* \sin \phi \quad (12)$$

上式より、 $\gamma > 0$ ,  $K_p > 0$ ,  $0 < \phi < \pi$  であれば、時間  $t \rightarrow \infty$  のとき  $e^* \rightarrow 0$  となるのがわかる。このとき、(11) 式の時間平均を  $e^* = 0$  とすると以下の関係が得られる。

$$E^* = \frac{2}{3\gamma} E_d \quad (13)$$

上式より、補正ゲインを  $\gamma = 2/3$  とすれば  $E^* = E_d$  とできるのがわかる。

**2.3 VDP 方程式の強制引き込み現象を利用した位相制御**  
振幅を変調した周期入力により、振子のエネルギーを制御するためには振子の運動と周期入力を適切な位相で同期させる必要がある。以下では、振子の運動と位相  $\phi$  で同期する (6) 式の周期入力を生成する方法について述べる。

(6) 式を加法定理により展開し、(5) 式とその時間微分を利用して表わすと以下となる。

$$u = u_0 \{ \cos \phi \sin(\omega_0 t) + \sin \phi \cos(\omega_0 t) \} \quad (14)$$

$$= u_0 (\cos \phi K_{AG1} \dot{\theta} + \sin \phi K_{AG2} \dot{\theta}) \quad (15)$$

ただし、 $K_{AG1}$ ,  $K_{AG2}$  は  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  の振幅を 1 にするオートゲインコントロールのゲインであり、これらのゲインは次式で示すようにそれぞれの振幅を半周期ごとに計測し、その逆数をとったものである。

$$K_{AG1} = \frac{1}{|\theta|}, K_{AG2} = \frac{1}{|\dot{\theta}|} \quad (16)$$

上式より、振子の角度と角速度をフィードバックできるならば、振子の運動と駆動トルク  $u$  を任意の位相  $\phi$  で同期できることがわかる。しかし、振子の初期状態が静止状態 ( $\theta = \dot{\theta} = 0$ ) であるとき、(15) 式の周期入力は  $u = 0$  となり、制御が開始されない。この問題を解決するために、周期入力制御法では VDP 方程式の周期解を利用して周期入力を生成している。以下では、本手法について述べる。

外力として振子の角速度が入力された VDP 方程式を考える。

$$\ddot{z} - \varepsilon(1 - \dot{z}^2)\dot{z} + \Omega^2 z = K_g \dot{\theta} \quad (\varepsilon > 0, \Omega > 0, K_g > 0) \quad (17)$$

振子が (5) 式で運動しているとき、外力のゲイン  $K_g$  が大きければ強制引き込みが起き周期解  $z$  は周期  $\omega_0$  で振動する。さらに  $\Omega \approx \omega_0$  であれば、VDP 方程式の周期解は振子の角速度から  $\pi/2$  遅れて同期し、 $z$  と  $\theta$  は同相で同期する<sup>4)</sup>。このときの周期解を次式で表わす。

$$z = z_0 \sin(\omega_0 t) \quad (z_0 > 0) \quad (18)$$

(18) 式とその時間微分を利用して (14) 式を表わすと以下となる。

$$u = u_0 (\cos \phi K'_{AG1} z + \sin \phi K'_{AG2} \dot{z}) \quad (19)$$

ただし、 $K'_{AG1}$ ,  $K'_{AG2}$  は  $z$ ,  $\dot{z}$  の振幅を 1 にするオートゲインコントロールのゲインであり以下のように表わされる。

$$K'_{AG1} = \frac{1}{|z|}, K'_{AG2} = \frac{1}{|\dot{z}|} \quad (20)$$

VDP 方程式は 0 以外の初期条件を与えておくと、入力がない場合でも自励発振し周期解が生じる。よって、(19) 式のように周期入力を構成しておく、振子が静止した状態からでも制御が開始されることがわかる。また、(15) 式の周期入力は振子の 2 つの状態量を必要とするが、VDP 方程式の周期解を利用すると 1 つの状態量だけ方程式に入力すればよく、複数の状態量を観測する必要がない。またここでは、VDP 方程式に角速度を入力した場合の周期解を利用して周期入力を構成したが、角度または角加速度を入力したときの周期解を利用して周期入力を構成できる。

### 3. 周期入力制御系の解析

前章では、単一振子に周期入力制御法を適用し、振幅を変調した周期入力によりエネルギーを制御できることを示し、振子の運動と周期入力を任意の位相で同期させる方法について述べた。本章では、周期入力制御系が VDP 方程式と同じ自励振動系となる条件を示し、つぎに強制引き込み現象が起こる条件を解析した結果について述べる。

#### 3.1 周期入力制御系の数理構造

前章の結果より、振子のエネルギーの時間平均  $E^*$  を目標エネルギー  $E_d$  に制御する周期入力は最終的に次式となる。

$$u = K_p \left( E_d - \frac{2}{3} E \right) (\alpha_1 \cos \phi + \alpha_2 \sin \phi) \quad (K_p > 0, 0 < \phi < \pi) \quad (21)$$

ただし、

$$\alpha_1 = K_{AG1} \theta = K'_{AG1} z \quad (22)$$

$$\alpha_2 = K_{AG2} \dot{\theta} = K'_{AG2} \dot{z} \quad (23)$$

(21) 式の  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  は上式で示すように、振子の状態量または VDP 方程式の周期解どちらを利用してよい。実験では、2.3 節で示した理由により VDP 方程式の周期解を利用するが、以下の解析では周期入力制御系の数理構造を見やすくするために、振子の状態量を利用する。

ここで (21) 式において  $\phi = \pi/2$  としてエネルギーを制御する場合を考える。このとき (21) (23) 式より周期入力は次式となる。

$$u = K_p \left( E_d - \frac{2}{3} E \right) K_{AG2} \dot{\theta} + F \quad (24)$$

ただし  $F$  は新たな入力である。

上式を (1) 式に代入し、(3) 式の関係を利用して整理すると次式となる。

$$\ddot{\theta} - \varepsilon'(1 - \gamma' \dot{\theta}^2) \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = GF \quad (25)$$

$$\varepsilon' = GK_p K_{AG1} E_d, \gamma' = \frac{I + m\ell^2}{3E_d} \quad (26)$$

ここで、(25) 式を  $\theta' = \sqrt{\gamma'}\theta$  として変数変換すると次式となる。

$$\ddot{\theta}' - \varepsilon'(1 - \dot{\theta}'^2)\dot{\theta}' + \omega_0^2\theta' = \sqrt{\gamma'}GF \quad (27)$$

上式より周期入力制御系は (17) 式の VDP 方程式と同じ自励振動系に変換でき、周期外力  $F$  を加えると強制引き込み現象が起こることがわかる。以上、振幅を変調した周期入力によりエネルギーが制御された周期入力制御系において周期入力の位相を振子よりも  $\pi/2$  進ませると VDP 方程式と同じ数理解構造をもつことを示した。

(27) 式のような VDP 方程式に周期外力を加えた場合の強制引き込み現象については、これまでの研究により述べられている<sup>4)</sup>ので、以下では (25) 式の周期入力制御系に周期外力を加えたときの強制引き込み現象が起こる条件について解析した結果を述べる。

### 3.2 周期入力制御系の強制引き込み現象

周期入力制御系に周期外力を加えた以下の式を考える。

$$\ddot{\theta} - \varepsilon'(1 - \gamma'\dot{\theta}^2)\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = GK_f \sin(\omega t) \quad (28)$$

$(K_f > 0, \omega > 0)$

上式において  $K_f$  は周期外力のゲインである。

上式において、周期入力制御系による自励振動解と周期外力による強制振動解が共存すると仮定し、定常状態での周期解を次式で仮定する。

$$\theta = a \sin(\omega_0 t + \phi_0) + A \sin(\omega t + \phi) \quad (29)$$

$(a \geq 0, A \geq 0)$

上式とその時間微分を (28) 式に代入し、高調波成分は微小であるとして  $\sin(\omega_0 t)$ ,  $\cos(\omega_0 t)$ ,  $\sin(\omega t)$ ,  $\cos(\omega t)$  の 1 次の項だけを取り出し、それらの係数を 0 とおくと以下の関係が得られる。

$$B_1 \cos \phi_0 = 0 \quad (30)$$

$$B_1 \sin \phi_0 = 0$$

$$B_1 = \varepsilon' a \omega_0 \left(1 - \frac{3}{4} \gamma' a^2 \omega_0^2 - \frac{3}{2} \gamma' A^2 \omega^2\right) \quad (31)$$

$$\cos \phi = \frac{B_2 GK_f}{B_2^2 + B_3^2} \quad (32)$$

$$\sin \phi = \frac{B_3 GK_f}{B_2^2 + B_3^2}$$

$$B_2 = A(\omega_0^2 - \omega^2) \quad (33)$$

$$B_3 = A\varepsilon'\omega \left(1 - \frac{3}{2} \gamma' a^2 \omega_0^2 - \frac{3}{4} \gamma' A^2 \omega^2\right)$$

(30) (31) 式より VDP 方程式の解の 1 つとして  $a = 0$  を得る。これは自励振動が抑制されることを意味する。もう 1 つの解は次式より得られる。

$$1 - \frac{3}{4} \gamma' a^2 \omega_0^2 - \frac{3}{2} \gamma' A^2 \omega^2 = 0 \quad (34)$$

上式を  $a$  について解くと以下となる。

$$a = \sqrt{\frac{4 - 6\gamma' A^2 \omega^2}{3\gamma' \omega_0^2}} \quad (35)$$

上式より、強制振動の振幅が以下の条件を満たすとき、解は 0 以外の実数解をもたない。

$$A \geq \sqrt{\frac{2}{3\gamma'\omega^2}} \quad (36)$$

よってこのとき、自励振動は抑制され周期外力と周期入力制御系の解が同期する強制引き込み現象が起こる。つぎに、強制振動の振幅を求めることで、引き込み現象が起きるパラメータ  $K_f$  の条件を求める。

(32) 式は  $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$  の関係を満足する必要があるので、以下の関係を得る。

$$\left[\frac{A(\omega_0^2 - \omega^2)}{GK_f}\right]^2 + \left[\frac{A\varepsilon'\omega}{GK_f} \left(1 - \frac{3}{2} \gamma' a^2 \omega_0^2 - \frac{3}{4} \gamma' A^2 \omega^2\right)\right]^2 = 1 \quad (37)$$

ここで  $A$  が大きく、強制引き込みが起きる場合を考える。上式で  $a = 0$  とし、さらに左辺第 2 項は第 1 項よりも非常に大きいとして第 1 項を無視する。このとき  $A$  は以下の条件を満たす必要がある。

$$A \gg \sqrt{\frac{4}{3\gamma'\omega^2} \left(\frac{|\omega_0^2 - \omega^2|}{\varepsilon'\omega} + 1\right)} \quad (38)$$

上式は (36) 式を満たしているので、上記条件のもとで (37) 式を  $A$  について解くと、以下の解が得られる。

$$A = \sqrt[3]{\frac{4GK_f}{3\gamma'\varepsilon'\omega^3}} \quad (39)$$

(39) 式を (38) 式に代入し  $K_f$  について整理すると、強制引き込みが起きる  $K_f$  の条件が得られる。

$$K_f \gg \frac{2\varepsilon'}{\sqrt{3\gamma'G}} \left(\frac{|\omega_0^2 - \omega^2|}{\varepsilon'\omega} + 1\right)^{3/2} \quad (40)$$

上式より  $\omega_0 \approx \omega$  のとき、 $K_f$  を最も小さく設定できることがわかる。また、 $\omega$  が大きく変動した場合でも  $K_f$  を大きく設定しておくことにより上記条件を維持でき、周期入力制御系が外力と同期する周波数範囲を広くできることがわかる。

つぎに位相  $\phi$  を求める。(32) 式より以下の関係を得る。

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{\varepsilon'\omega \left(1 - \frac{3}{2} \gamma' a^2 \omega_0^2 - \frac{3}{4} \gamma' A^2 \omega^2\right)}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad (41)$$

強制引き込み時 ( $a = 0$ )、 $\omega_0 \approx \omega$  であれば、上式より位相は  $\phi = -\pi/2$  となることがわかる。また、 $K_f$  を大きく設定しておく (39) 式より  $A$  も大きくなるので  $\omega_0 \neq \omega$  の場合でも  $\phi = -\pi/2$  となることがわかる。

以上の結果をまとめると、(28) 式が強制引き込みを起こす条件は (40) 式を満たすように  $K_f$  を大きく設定することであり、このときの周期解は次式となる。

$$\theta = \sqrt[3]{\frac{4GK_f}{3\gamma'\varepsilon'\omega^3}} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad (42)$$

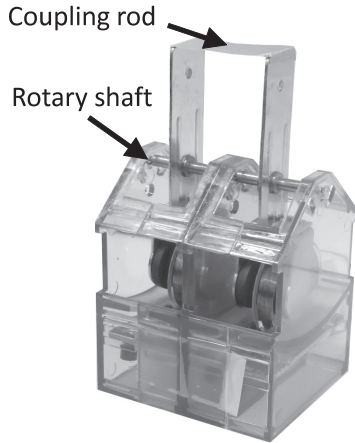


Fig. 2 Pendulum experiment system

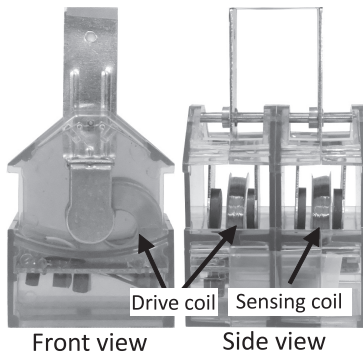


Fig. 3 Front view and side view of pendulum experiment system

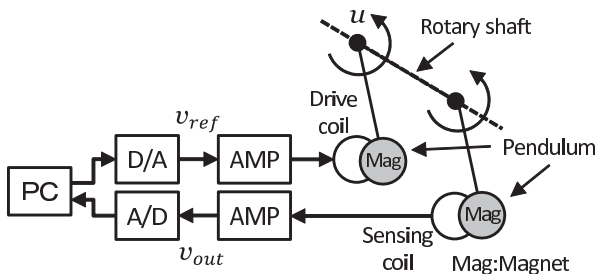


Fig. 4 Block diagram of experiment system

Table 1 Parameters of experiment system

$m = 0.042$	$I = 1.45 \times 10^{-5}$	$\ell = 0.011$
$\varepsilon = 1.5$	$\Omega = 17.3$	$K_g = 20$

## 4. 実験

### 4.1 実験装置

周期入力制御系に周期外力を加えたとき、強制引き込み現象が起きるかどうかが検証するために製作した実験装置を Fig. 2, Fig. 3 に示す。本装置は市販されている太陽電池駆動の振り装置を2個、Fig. 2 のように結合して製作されている。Fig. 3 に示すように、太陽電池は取り外し、内蔵されている片方のコイルは振り駆動用として利用しており、振りには下端に取り付けられた永久磁石と駆動コイル間の電磁力により駆動される。

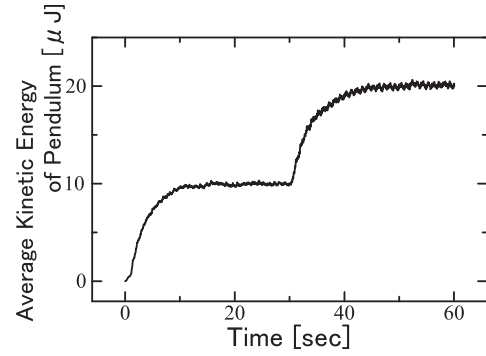


Fig. 5 Experimental result: energy control by amplitude modulated periodic input

Fig. 4 に実験装置のブロック図を示す。駆動コイルに流れる電流は電流アンプに入力される制御器からの指令電圧  $v_{ref}$  によって制御され、本装置では指令電圧と振り駆動トルク間の特性は次式のようにになった。

$$u = K_v v_{ref} \quad (K_v = 3 \times 10^{-3} [\text{Nm/V}]) \quad (43)$$

ただし、 $K_v$  は電圧トルク変換係数である。

振子の角速度はもう一方の永久磁石と検知コイル間に生じる逆起電力を A/D 変換することにより計測しており、検知コイルの電圧を増幅した出力電圧  $v_{out}$  と振子の角速度間の関係は次式のようにになった。

$$\dot{\theta} = K_a v_{out} \quad (K_a = 7.57 [\text{rad/Vs}]) \quad (44)$$

ただし、 $K_a$  は電圧角速度変換係数である。

制御器にはノートパソコンを使用し、制御周期は 50 msec とした。周期入力を生成するために使用している VDP 方程式の解は制御周期ごとに 4 次の Runge-Kutta-Gill 法により計算した。実験装置および制御入力の各パラメータを Table 1 に示す。

なお、実験では (43) 式の指令電圧を以下のように構成して、エネルギー制御則の効果と外力の影響を調べた。

$$v_{ref} = K_p \left( E_d - \frac{2}{3} E \right) K'_{AG2} \dot{z} + K_f \sin(\omega t + \psi) \quad (45)$$

### 4.2 実験結果

まず (45) 式で  $K_f = 0$  としエネルギー制御則により振子の運動エネルギーを制御できるかどうか確認した結果について述べる。Fig. 5 に  $0 \leq t < 30 \text{ sec}$  では目標エネルギーを  $E_d = 10 \mu\text{J}$  とし、 $t \geq 30 \text{ sec}$  では  $E_d = 20 \mu\text{J}$  としたときの結果を示す。なお振子の運動エネルギーの時間平均  $E^*$  は、運動エネルギー  $E$  をカットオフ周波数 0.1 Hz のローパスフィルタに入力したときの出力値とし、制御ゲインは  $E_d = 10 \mu\text{J}$  のとき  $K_p = 4500$ 、 $E_d = 20 \mu\text{J}$  のとき  $K_p = 3300$  とした。図より、振子の平均運動エネルギーを目標値に制御できることがわかる。つぎに (45) 式で  $K_f \neq 0$  とし周期入力制御系に周期外力を加えたとき、強制引き込み現象が起きるかどうかが確認した結果を示す。強制引き込み時の理論的な角速度は

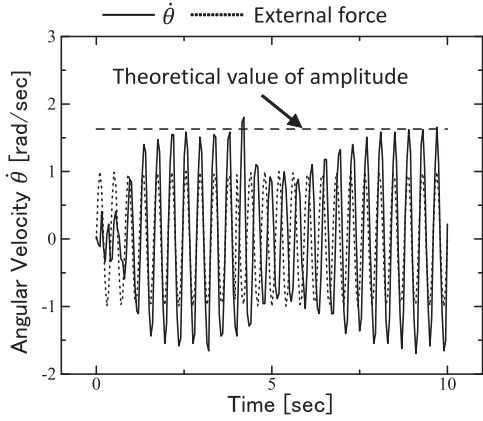


Fig. 6 Experimental result: relationship between periodic input control system and external force

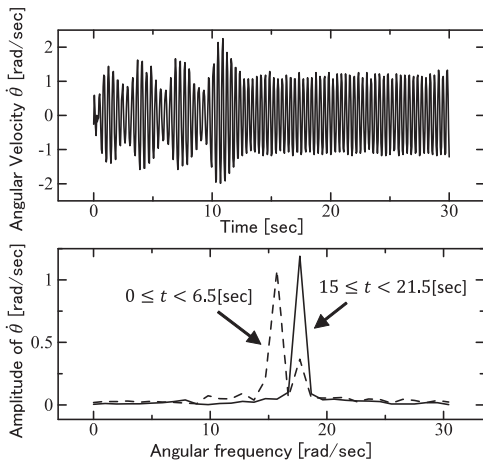


Fig. 7 Experimental result: transition from asynchronous state to synchronous state

(42) 式を時間微分した次式となる.

$$\dot{\theta} = \sqrt[3]{\frac{4GK_f}{3\gamma'\epsilon'}} \sin(\omega t) \quad (46)$$

角速度が上式となるかどうか実験により確認した結果を Fig. 6 に示す. なお, 実験時のエネルギー制御系のパラメータは  $E_d = 10 \mu\text{J}$ ,  $K_p = 1500$ , 周期外力のゲインは  $K_f = 0.01$  とし角周波数は周期入力制御系の自励発振角周波数  $\omega = 15.5 \text{ rad/sec}$  とした. また, 周期外力の位相  $\psi$  は  $0 \leq t < 4 \text{ sec}$  では  $\psi = 0$  とし,  $t \geq 4 \text{ sec}$  では  $\psi = -\pi$  とした. 図より周期外力と角速度は同相で同期し続けることがわかる. また角速度の振幅も (46) 式から計算した理論値に収束することがわかる. 以上の結果から, 周期入力制御系に周期外力を加えたとき, 強制引き込み時の周期解は (46) 式となることが確認できる. つぎに周期外力の周波数が周期入力制御系の自励発振と異なる場合でも, 強制引き込み現象が起きるかどうか確認した結果について述べる. Fig. 7 に周期外力の角周波数を  $\omega = 17.6 \text{ rad/sec}$ , 外力のゲイン  $K_f$  を  $0 \leq t < 10 \text{ sec}$  では  $K_f = 0.01$ ,  $t \geq 10 \text{ sec}$  では  $K_f = 0.03$  としたときの時間変化と周波数解析結果を示す. なお, それぞれの区間で周波数解析に使用したデータ

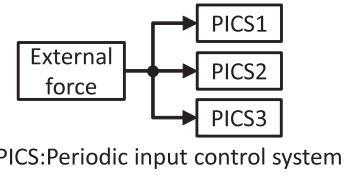


Fig. 8 Block diagram of synchronous control among periodic control systems

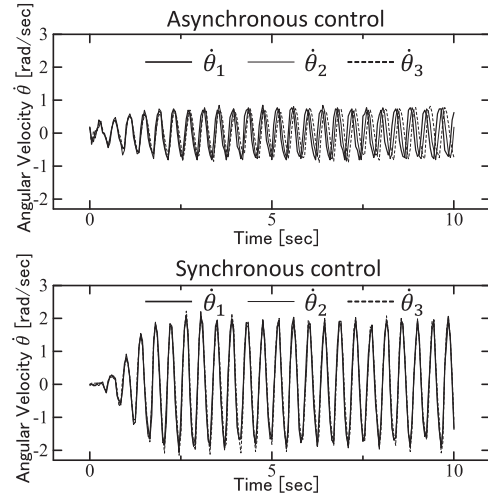


Fig. 9 Experimental result: asynchronous control and synchronous control of three periodic input control systems

は, サンプリング時間 50 msec で取得した 128 点のデータである. また, 周波数解析結果はこれらのデータを FFT したものである. 図より  $0 \leq t < 10 \text{ sec}$  では周期入力制御系の自励振動解と周期外力による強制振動解が共存し, 2つの周波数成分が混在するためうなりが生じて強制引き込みが起きていないことがわかる. しかし,  $t \geq 10 \text{ sec}$  では, 周期入力制御系の周波数成分が抑制され強制引き込みが起きていることがわかる. 以上の結果より, 周期外力の周波数と周期入力制御系の自励発振周波数が異なる場合でも, 周期外力のゲイン  $K_f$  を大きくすることにより強制引き込み現象が起きることが確認できた.

つぎに周期入力制御系の強制引き込み現象の応用として複数の周期入力制御系を周期外力によって同期できるかどうか確認した結果について述べる. Fig. 8 に示すように3つの周期入力制御系に同じ周期外力を加えて同期制御できるかどうか, 実験装置を3台製作して検証した結果を Fig. 9 に示す. 実験に使用したパラメータはすべての制御系で  $E_d = 10 \mu\text{J}$ ,  $K_p = 1500$ ,  $K_f = 0.03$  とし, 周期外力の各周波数は  $\omega = 14.8 \text{ rad/sec}$  とした. 図より周期外力を加えずに振動させた場合は, 各周期入力制御系の物理パラメータがほんのわずかに違う影響で発振周期が異なり, 位相がずれていくことがわかる. また, 周期外力を加えて同期制御した場合は, すべて同じ周期で同期することが確認できる.



## 5. おわりに

本論文では周期入力制御法を適用する一般的なモデルとして単一振子を取り上げ、振幅を変調した周期入力によりエネルギーが制御されたシステムはVDP方程式と同じ自励振動系となること、周期入力制御系に周期外力を加えると強制引き込み現象が生じることを示した。さらにこの現象を利用すると、同期信号に複数の周期入力制御系を同期できることを示した。以上の結果より、これまで周期入力制御法を適用してきたすべてのシステムでも強制引き込み現象が生じ、実験で示した同期制御を応用できると考えられる。たとえば、同期信号にあわせて複数の歩行ロボットを行進させたり、歩行ロボットとホッピングロボットのように構造が異なるロボットでも歩行周期を合わせて行進させたりできると予想している。

今後は、周期入力制御法を多入力化するためのつぎのステップとして、周期入力制御系を複数相互に結合した結合周期入力制御系において相互引き込み現象が起きるかどうかが解析および実験を行ないさまざまな同期パターンが実現できるかどうか確認したい。さらに、結合周期入力制御系に結合VDP方程式の同期パターン法を適用して、その同期パターンを自由に制御したいと考えている。本手法が構築できれば、複数の周期入力制御系のエネルギーを制御しながらその位相や同期パターンを制御できると予想しており、これにより多自由度振動系の制御が容易に実現できると考えている。

謝辞 本研究の一部はJSPS科研費15K05853の助成を受けたものである。

## 参考文献

- 1) 梶原, 橋本, 松田, 土谷: 引き込みを利用したブランコの振り制御, 日本ロボット学会誌, **17-4**, 64/69 (1999)
- 2) 梶原, 橋本, 松田, 土谷: 鉄棒ロボットの数理解析と運動制御, 日本ロボット学会誌, **18-4**, 53/58 (2000)
- 3) 梶原, 橋本, 土谷: 引き込みを利用した回転型2重倒立振子の振り上げ制御, 計測自動制御学会論文集, **37-2**, 139/145 (2001)
- 4) 梶原, 橋本, 土谷: 周期入力による振子の運動制御, 日本機械学会誌論文集(C編), **67-663**, 84/90 (2001)
- 5) 梅枝, 梶原, 田中, 金子: 周期入力制御を用いた準受動的歩行ロボットの斜度・外乱に対するロバスト性, 計測自動制御学会論文集, **42-8**, 974/981 (2006)
- 6) T. Kusaka, T. Tanaka, S. Kaneko, Y. Suzuki, M. Saito, S. Seki, N. Sakamoto and H. Kajiwara: Assist Force Control of Smart Suit for Horse Trainers Considering Motion Synchronization, International Journal of Automation Technology, **3-6**, 723/730 (2009)
- 7) 梶原秀一: 周期入力制御によるホッピングロボットの跳躍高制御, 計測自動制御学会論文集, **49-5**, 537/546 (2013)
- 8) 吉川, 川上: 化学反応系の非線形ダイナミクス—結合振動系を中心に, 応用数理, **4-3**, 238/258 (1994)
- 9) L.A. Low, P.G. Reinhall and D.W. Storti: An Investigation of Coupled van der Pol Oscillators, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, **125-2**, 162/169 (2003)
- 10) 清水, 遠藤, 田中: 非線形結合された二つの van der Pol 発振器の平均化法による同期特性の解析, 電子情報通信学会論文集(A), **J90-A-2**, 111/121 (2007)
- 11) 梶原, 花島, 青柳: 引き込み現象を利用した結合 van der Pol

方程式の同期パターン制御, 電子情報通信学会論文集(A), **J98-A-6**, 406/416 (2015)

## [著者紹介]

## 梶原 秀一 (正会員)



1995年室蘭工業大学大学院工学研究科電気電子工学専攻博士前期課程修了。同年釧路工業高等専門学校電子工学科助手。2002年同助教授。2007年同准教授を経て、2013年室蘭工業大学大学院工学研究科しくみ情報系領域准教授。制御理論, メカトロニクス, 歩行ロボットなどの研究に従事。博士(工学)。2003年ロボット学会研究奨励賞, 2009, 2010年計測自動制御学会SI部門講演会優秀講演賞などを受賞。日本ロボット学会, 日本機械学会の会員。

## 花島 直彦 (正会員)



1994年北海道大学大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程修了。同年室蘭工業大学機械システム工学科講師。2004年同助教授。2007年同准教授。2015年同教授, 現在に至る。制御工学, ロボット工学などの研究に従事。博士(工学)。日本機械学会, 日本ロボット学会, IEEEなどの会員。

## 青柳 学



1991年山形大学大学院修士課程修了。同年山形大・工・電子情報・助手。99年~2000年文部省在外研究員(サザンプトン大学・英国)。2003年室蘭工大・工・電気電子・助教授。2007年同准教授。2009年同大・大学院工学研究科・もの創造系領域。2010年同教授, 現在に至る。博士(工学)。超音波工学(超音波モータ/アクチュエータ/超音波加工)などの研究に従事。94年電子情報通信学会学術奨励賞, 97年日本音響学会粟屋潔学術奨励賞などを受賞。日本音響学会, 電気学会, 精密工学会各会員。