



## 電磁波導波路非線形固有値問題の解の判別法(線形化問題の固有値あるいは固有値の感度を用いる方法)

メタデータ	言語: jpn 出版者: 日本計算数理工学会 公開日: 2018-02-15 キーワード (Ja): キーワード (En): Hybrid Trefftz Finite Element Method, Sakurai-Sugiura Projection Method, Electromagnetic Waveguide, Nonlinear Eigenvalue Problem, Spurious solution 作成者: 佐藤, 慎悟, 森田, 好人, 長谷川, 弘治, 嶋田, 賢男 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10258/00009547">http://hdl.handle.net/10258/00009547</a>

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.



## 電磁波導波路非線形固有値問題の解の判別法

## (線形化問題の固有値あるいは固有値の感度を用いる方法)

REMOVING NONPHYSICAL SOLUTIONS OF ELECTROMAGNETIC WAVEGUIDE  
NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEMS (BY USING THE EIGENVALUES OR THE  
SENSITIVITY OF THE EIGENVALUE OF THE LINEARIZED PROBLEMS)佐藤 慎悟<sup>1)</sup>, 森田 好人<sup>2)</sup>, 長谷川 弘治<sup>3)</sup>, 嶋田 賢男<sup>4)</sup>

Shingo SATO, Yoshihito MORITA, Koji HASEGAWA and Takao SHIMADA

- 1) 室蘭工業大学大学院もの創造系領域 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: satoshingo@mmm.muroran-it.ac.jp)  
 2) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: s1924209@mmm.muroran-it.ac.jp)  
 3) 室蘭工業大学大学院もの創造系領域 (〒050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)  
 4) 津山工業高等専門学校電気電子工学科 (〒708-8509 津山市沼 624-1, E-mail: shimada@tsuyama-ct.ac.jp)

A scheme based on the hybrid Trefftz finite element method (HTFEM) of electromagnetic wave propagation in a waveguide results in a nonlinear eigenvalue problem. Solving the eigenvalue problem by the Sakurai-Sugiura projection method (SSM) yields all propagation constants and spurious solutions in the region bounded with a closed integral path for SSM on the complex plane of the propagation constant. In our previous paper, using dependency of the spurious solutions on the boundary of the region, we could discard the spurious solutions. Seeking a simple index which can separate the eigenvalues into the propagation constants and spurious solutions, we examined following two values of the generalized eigenvalue problem with a Hankel and the shifted Hankel matrices computed by SSM: the sensitivity of the eigenvalue problem and the eigenvalue of the Hankel matrix. Numerical results of a three layered dielectric waveguide and a metallic grating on a slab waveguide show the usefulness of the presented indices.

**Key Words:** Hybrid Trefftz Finite Element Method, Sakurai-Sugiura Projection Method, Electromagnetic Waveguide, Nonlinear Eigenvalue Problem, Spurious solution

## 1. はじめに

電磁波問題の数値解析では開領域を取り扱う場合が多い。有限要素法のような領域型解析法に基づく数値解析法では、完全整合層 (Perfectly Matched Layer: PML)<sup>(1)~(3)</sup>を用いて開領域を開領域化する手法が標準的である。PMLを用いた有限要素法では、有限要素法の利点である疎行列性を損なうことなく行列方程式を構成することができるが、PML領域端での電磁波の反射を小さくするために、問題ごとに最適なPMLのパラメータを設定しなければならない。一方で、特殊な要素で開領域を取り扱うこともできる。その一例がハイブリッドトレフツ有限要素法 (Hybrid Trefftz Finite Element Method: HTFEM)<sup>(4)~(6)</sup>である。開領域を取り扱うトレフツ要素は完備波動関数系を補間関数とするため、

放射条件を厳密に満足するので無限遠に向けて伝搬する放射波は無反射となり、完備系なので非放射となる減衰波も考慮できる。このためトレフツ要素は、等価的に放射源となる導波路不連続部に接した領域の分割に利用でき、不連続部分のみを通常の多項式要素で分割するだけで済むので、PMLを用いる場合に必要な開領域の通常要素での分割は不要となる。このため、最終的に解くべき行列方程式の次元数が小さくできるので、高速で高精度な解析が可能となることが期待できるが、伝搬問題解析では伝搬定数を求めるための行列方程式が非線形固有値問題となる欠点がある<sup>(7)</sup>。

著者らはHTFEMを用いた伝搬問題解析における非線形固有値問題の解法としてSakurai-Sugiura射影法(SS法)<sup>(8)~(10)</sup>を適用してきた。この方法では、複素平面上の開領域内の全複素固有値が求まる。しかしながら、求めた固有

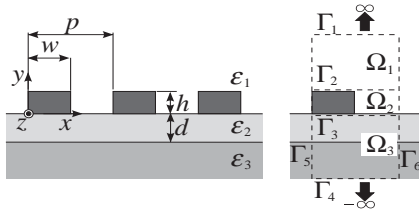


Fig. 1 A metallic grating on a dielectric slab waveguide

値の中に SS 法の適用に起因して複素伝搬定数として物理的意味をもたない解が混入する<sup>(7, 11)</sup>。このため、求めた各固有値を物理的な意味をもつ複素伝搬定数と複素伝搬定数として物理的意味をもたない解に分別する必要がある。文献<sup>(11)</sup>では、HTFEM から導出される非線形固有値問題の係数行列の条件数の大きさを指標とし、SS 法における周回積分路の変更により複素伝搬定数として物理的意味をもたない解の値は変化するが複素伝搬定数は変化しないことを利用した分別方法が検討されている。しかしながら、HTFEM 行列方程式の係数行列の条件数の計算ならびに周回積分路の変更による SS 法の二度の適用は、計算時間の面で好ましくない。また、複素伝搬定数として物理的意味をもたない解の移動量と周回積分路の変形量の関係は先験的には不明で、周回積分路の変更に対しても解の変化が少なく判別が困難となる場合もあり、分別方法の改善が課題であった。

本論文では、HTFEM の固有値問題の SS 法による解の分別方法として、SS 法が最終的に帰着させる Hankel 行列とそのシフト行列からなる線形固有値問題の解の感度を指標として利用する方法、ならびに Hankel 行列の固有値を利用する方法を検討している。なお、これまでの報告<sup>(7, 11)</sup>では TE 波成分と TM 波成分が結合したモードが解となる問題を想定して通常要素としてエッジ要素を用いていたため電界の 3 成分を直接離散化していた。本論文では、厳密解が得られ、かつできるだけ単純な問題設定を行うため、結合モードがない問題を取り扱う。このため、得られる解の精度が高いフロケモードの周期電磁界を 2 次節点要素を用いて離散化し、TE モード解析と TM モード解析をそれぞれ別個に行っている。また、取り扱う問題は縮退モードがない問題であるため、前報告<sup>(7, 11)</sup>と同様に、非ブロック版 SS 法を用いる。

## 2. 問題の設定

Fig.1 に示すような比誘電率  $\epsilon_2$ 、厚み  $d$  の導波層に導電率を無限大とする理想導体である完全導体が幅  $w$ 、厚み  $h$ 、周期  $p$  で周期構造を形成する導波路の電磁波伝搬問題を考える。ここに、カバー層は比誘電率  $\epsilon_1 = 1.0$  の真空とし、基板は比誘電率  $\epsilon_3$  の半無限誘電体とする。また、全媒質の比透磁率は真空の比透磁率と等しいとする。電磁界が角周波数  $\omega$  で正弦波振動する場合の支配方程式は、

$$\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} + k_0^2 \epsilon \phi(x, y) = 0 \quad (1)$$

である。ここに、 $\phi(x, y)$  は電磁界の  $z$  成分で、TE モード解析では電界の  $z$  成分  $E_z$ 、TM モード解析では磁界の  $z$  成分

$H_z$  を表す。また、 $k_0$  は真空中の波数、 $\epsilon$  は考えている領域の比透磁率である。 $x$  軸方向の周期性から、ブロッホの定理により  $\phi(x, y)$  は、周期関数  $\tilde{\phi}(x + p, y) = \tilde{\phi}(x, y)$  を用いて  $\phi(x, y) = \tilde{\phi}(x, y) \exp(-j\gamma x)$  と表される。ここに、 $j$  は虚数単位、 $\gamma$  は複素伝搬定数を表す。Fig.1 に示すように、構造の周期性から解析領域は導波路一周分とし、無限遠方境界  $\Gamma_1, \Gamma_4$  には放射条件、周期境界  $\Gamma_5, \Gamma_6$  にはブロッホ条件を課す。

## 3. 定式化

この問題に対する HTFEM による定式化の基本部分は既に報告してある<sup>(7)</sup> ため、簡潔に記述する。解析領域を Fig.1 に示すように半無限領域  $\Omega_1, \Omega_3$ 、周期摂動部からなる不均質領域  $\Omega_2$  に分割する。各領域を領域ごとに最適な要素を用いて要素分割する。領域  $\Omega_1, \Omega_3$  についてはそれぞれ 1 個のトレフツ要素で分割する。トレフツ要素は放射条件とブロッホ条件を満足する平面波解となるような空間高調波を補間関数とするため、領域間の接続境界  $\Gamma_2, \Gamma_3$  上の線積分のみで汎関数を評価でき、領域  $\Omega_2$  を分割する要素と適合する線要素を用いて領域  $\Omega_2$  と接続する。領域  $\Omega_2$  については 8 節点矩形要素を用いて要素分割する。領域  $\Omega_2$  内の電磁界  $\phi(x, y)$  は周期関数  $\tilde{\phi}(x, y)$  を 2 次多項式で補間すると、

$$\phi(x, y) = \{N\}^T \{\tilde{\phi}\}_e \exp(-j\gamma x) \quad (2)$$

と表せる。ここに、 $\{N\}$  は補間関数ベクトル、 $\{\tilde{\phi}\}_e$  は要素  $e$  内の節点における電磁界の周期関数  $\tilde{\phi}(x, y)$  の  $z$  成分からなるベクトルである。上添字  $T$  は転置をとることを示す。最終的に解くべき非線形固有値問題の行列方程式は、

$$[T(\gamma)]\{\tilde{\phi}\} = \{0\} \quad (3)$$

である。ここに、 $\{\tilde{\phi}\}$  は離散化した領域  $\Omega_2$  の未知電磁界ベクトル、 $[T(\gamma)] \in \mathbb{C}^{N \times N}$  は  $\gamma$  について正則な行列関数である。

HTFEM の定式化により得られる非線形固有値問題の行列方程式 (3) を非ブロック版 SS 法により解くことを考える。零ベクトルでない任意の列ベクトル  $\{V\} \in \mathbb{C}^N$  を用いて関数  $f(\gamma)$  を

$$f(\gamma) = \{V\}^H [T(\gamma)]^{-1} \{V\} \quad (4)$$

と定義する。ここに、上添字  $H$  はエルミート共役であることを示す。この  $f(\gamma)$  の複素モーメント  $\mu_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) を、正の向きをもつ複素平面上の Jordan 曲線  $\tilde{\Gamma}$  上の周回積分

$$\mu_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tilde{\Gamma}} \gamma^k f(\gamma) d\gamma \quad (5)$$

で定義する。通常、式 (5) は  $\gamma^k$  を  $\{(\gamma - o)/\rho\}^k$  に置換した数値積分によって近似評価される<sup>(8) - (10)</sup>。特に、周回積分路  $\tilde{\Gamma}$  が中心  $o$ 、半径  $\rho$  の円の場合、式 (5) を台形則で数値積分した複素モーメント  $\hat{\mu}_k$  は、

$$\hat{\mu}_k = \frac{\rho}{N_s} \sum_{n=0}^{N_s-1} \left( \frac{c_n - o}{\rho} \right)^{k+1} f(c_n) \quad (6)$$

となる。ここに、積分点  $c_n$  は周回積分路  $\tilde{\Gamma}$  上の  $N_s$  個の等間隔点

$$c_n = o + \rho e^{\frac{2\pi j}{N_s}(n+1/2)} \quad (7)$$

である．数値積分した複素モーメント  $\hat{\mu}_k$  を用いて Hankel 行列  $[\hat{H}_m]$  とその成分をシフトした行列  $[\hat{H}_m^<]$  を，それぞれ

$$[\hat{H}_m] = [\hat{\mu}_{i+j-2}]_{i,j=1}^m, \quad (8)$$

$$[\hat{H}_m^<] = [\hat{\mu}_{i+j-1}]_{i,j=1}^m \quad (9)$$

と構成すると，求めたい  $[T(\gamma)]$  の近似固有値  $\hat{\lambda}_l$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) は，一般化固有値問題

$$([\hat{H}_m^<] - \zeta[\hat{H}_m])\{\hat{w}\} = \{0\} \quad (10)$$

の固有値  $\hat{\zeta}_l$  を用いて，

$$\hat{\lambda}_l = o + \rho\hat{\zeta}_l \quad (11)$$

と求められる．ここに，Hankel 行列の次数  $m$  は周回積分路内部の固有値の個数であるが，先験的には不明なので， $M \geq m$  となる  $M$  を推定して用いる．行列対  $[\hat{H}_M^<]$ ， $[\hat{H}_M]$  を QZ 法<sup>(13)</sup> に基づき一般化 Schur 分解すると，

$$[\hat{H}_M^<] = [Q][S][Z]^H, \quad (12)$$

$$[\hat{H}_M] = [Q][P][Z]^H. \quad (13)$$

ここに， $[Q]$ ， $[Z]$  はユニタリ行列である．固有値  $\hat{\zeta}_l$  は上三角行列  $[S]$ ， $[P]$  のそれぞれの対角成分  $S_{ll}$ ， $P_{ll}$  を用いて，

$$\hat{\zeta}_l = \frac{S_{ll}}{P_{ll}} \quad (14)$$

と求まる．

数値積分による成分値の近似評価に起因する行列対  $[\hat{H}_M^<]$ ， $[\hat{H}_M]$  の摂動に対する固有値  $\hat{\zeta}_l$  の感度は  $1/F_l$  に比例し， $F_l$  は

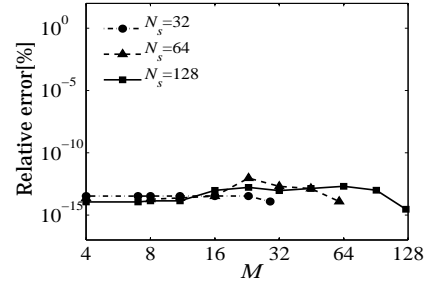
$$F_l = |\{\hat{v}\}_l^H [\hat{H}_m^<]\{\hat{w}\}_l|^2 + |\{\hat{v}\}_l^H [\hat{H}_m]\{\hat{w}\}_l|^2 \quad (15)$$

で表される<sup>(12)</sup>．ここに， $\{\hat{v}\}_l$  は固有値  $\hat{\zeta}_l$  に対応する左固有ベクトル， $\{\hat{w}\}_l$  は固有値  $\hat{\zeta}_l$  に対応する右固有ベクトルであり， $F_l$  値は摂動に対する感度が高いほど小さい．複素伝搬定数として物理的意味をもたない解は複素伝搬定数よりも SS 法のパラメータに強く依存することから<sup>(7, 11)</sup>，複素伝搬定数として物理的意味をもたない解に対応する  $F_l$  値は，複素伝搬定数に対応するものよりも小さいと予想される．

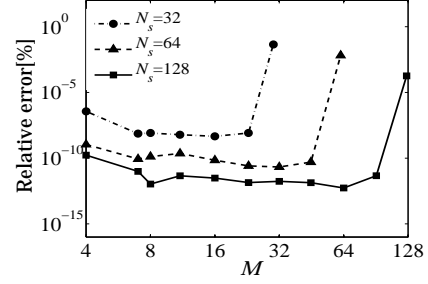
#### 4. SS 法により算出した固有値の分別法の検討

##### 4.1. 三層誘電体スラブ導波路の数値解析

解析解が得られる問題として，Fig.1 の完全導体電極を除去し，比誘電率がそれぞれ  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1.0$ ， $\epsilon_2 = 11.8$ ，導波層厚み  $d = 0.5p$  である三層誘電体スラブ導波路において真空中の波数  $k_0p = 2.1$  とした場合の伝搬問題を考える．領域  $\Omega_1$  と  $\Omega_3$  は，それぞれ  $-32$  次  $\sim$   $32$  次で空間高調波展開したトレフツ要素で分割し，トレフツ要素間の接続境界を 32 等分割した．この問題では，TE<sub>0</sub> モードの伝搬定数が  $\gamma p = 6.07580$ ，TM<sub>0</sub> モードの伝搬定数が  $\gamma p = 4.33015$  と解析的に求まる．解析解が SS 法における周回積分路内部に含まれるように，TE モード解析では中心  $op = 6.3$ ，半径  $\rho p = 0.4$  の円，TM



(a) TE-mode



(b) TM-mode

Fig. 2 Dependences of the relative errors of the propagation constants on the dimension of Hankel matrices  $M$

モード解析では中心  $op = 4.6$ ，半径  $\rho p = 0.4$  の円を積分路とした．

Fig.2 は積分点数  $N_s = 32, 64, 128$  の三つの場合に，Hankel 行列の次数  $M$  を  $N_s$  程度まで変化させて，伝搬定数の解析解  $\gamma$  と本手法で数値計算した伝搬定数  $\hat{\lambda}$  との相対誤差  $|\hat{\lambda}/\gamma - 1|$  を調べたものである．Fig.2(a) は TE モード，Fig.2(b) は TM モードに対する計算結果である．TM モードの結果において  $M$  が  $N_s$  付近で相対誤差が大きくなっているものの，TE モードと TM モードの複素伝搬定数の相対誤差は十分に小さいことから，推定値  $M$  は  $N_s/2$  以下で適当に設定して良いと考えられる．なお TM モードの  $M = 4$  の場合に  $M = 6, 8$  に比べて相対誤差が大ききことは，エッジ要素を用いて収束性を調べた前報告<sup>(11)</sup> の結果と符合する．

Fig.3 は積分点数  $N_s = 128$  とし，Hankel 行列の次数  $M = 4, 8, 20$  の各場合で算出した固有値の複素平面  $\gamma p$  上の位置を示したものである．Fig.3(a) に示した TE モードでは， $\gamma p = 6.07580$  の TE<sub>0</sub> モードの他に， $\gamma p = 4\pi - 6.07580 = 6.49057$  となる  $-x$  軸方向に伝搬する TE<sub>0</sub> モードがある．TE モード，TM モードともに，求解範囲である周回積分路内部に，解析解に対応する複素伝搬定数の他に複素伝搬定数として物理的意味をもたない解が混入している．求めた規格化固有値  $\hat{\lambda}_p$ ，固有値の感度  $F_l$ ，固有値を算出する式 (14) の値  $P_{ll}$  を Table.1 に示す．解析解との比較から，太字で示した固有値は物理的意味をもつ複素伝搬定数であり，これ以外は SS 法に起因して混入した複素伝搬定数として物理的意味をもたない解である．固有値の左側の † は周回積分路内部に位置する解であることを示す．TE モードでは，複素伝搬定数として

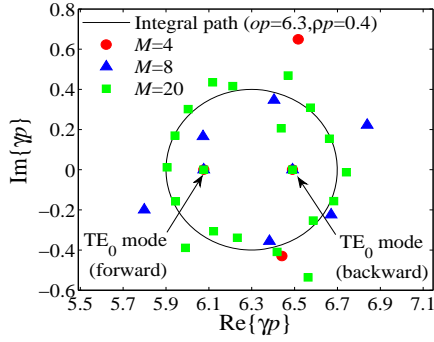
Table 1 Normalized eigenvalues  $\hat{\lambda}_p$ ,  $F_l$  and  $P_{ll}$  corresponding to  $\hat{\lambda}_p$  in eq.(14) in the case of  $N_s = 128$  for propagating characteristics in the three layer dielectric slab waveguide

TE-mode ( $\tilde{\Gamma} : op = 6.3, \rho p = 0.4$ )				TM-mode ( $\tilde{\Gamma} : op = 4.6, \rho p = 0.4$ )			
$M$	$\hat{\lambda}_{lp}$	$F_l$	$P_{ll}$	$M$	$\hat{\lambda}_{lp}$	$F_l$	$P_{ll}$
4	† <b>6.07580 + j0.00000</b>	15.91	4.87	4	† <b>4.33015 + j0.00000</b>	$5.20 \times 10^{-6}$	0.13
	† <b>6.49057 - j0.00000</b>	2.85	2.19		4.18149 - j0.00149	$2.74 \times 10^{-19}$	$4.50 \times 10^{-6}$
	6.44021 - j0.42901	$2.60 \times 10^{-29}$	$4.20 \times 10^{-15}$		4.17357 - j0.00204	$5.98 \times 10^{-21}$	$6.53 \times 10^{-7}$
	6.51718 - j0.64933	$7.24 \times 10^{-29}$	$4.83 \times 10^{-15}$		4.08387 - j0.16570	$9.36 \times 10^{-27}$	$4.87 \times 10^{-12}$
8	† <b>6.07580 - j0.00000</b>	0.76	2.12	8	† <b>4.33015 - j0.00000</b>	$8.91 \times 10^{-4}$	0.59
	† <b>6.49057 - j0.00000</b>	0.40	1.43		† 4.77001 + j0.19799	$1.43 \times 10^{-28}$	$3.52 \times 10^{-14}$
	† 6.40423 + j0.34695	$2.20 \times 10^{-28}$	$1.54 \times 10^{-14}$		† 4.67626 + j0.24200	$1.21 \times 10^{-28}$	$3.53 \times 10^{-14}$
	† 6.07290 + j0.16564	$2.67 \times 10^{-29}$	$1.27 \times 10^{-14}$		5.10972 - j0.12065	$1.60 \times 10^{-27}$	$2.99 \times 10^{-14}$
	† 6.38270 - j0.35559	$1.26 \times 10^{-28}$	$1.33 \times 10^{-14}$		4.78931 - j0.37299	$1.67 \times 10^{-27}$	$3.37 \times 10^{-14}$
	5.79857 - j0.19966	$3.23 \times 10^{-28}$	$1.31 \times 10^{-14}$		4.16308 - j0.00160	$8.94 \times 10^{-22}$	$1.09 \times 10^{-7}$
	6.67044 - j0.22400	$3.18 \times 10^{-28}$	$2.04 \times 10^{-14}$		4.17665 - j0.00162	$7.30 \times 10^{-21}$	$1.22 \times 10^{-6}$
	6.83871 + j0.22241	$3.99 \times 10^{-28}$	$1.53 \times 10^{-14}$		4.18178 - j0.00115	$1.94 \times 10^{-19}$	$1.35 \times 10^{-6}$
20	† <b>6.07580 - j0.00000</b>	1.09	2.51	20	† <b>4.33015 + j0.00000</b>	0.02	1.51
	† <b>6.49057 + j0.00000</b>	0.07	0.908		† 4.94373 + j0.04384	$3.60 \times 10^{-27}$	$9.03 \times 10^{-14}$
	† 6.23281 - j0.33860	$8.87 \times 10^{-28}$	$4.13 \times 10^{-14}$		† 4.65033 - j0.38923	$3.95 \times 10^{-27}$	$7.78 \times 10^{-14}$
	† 6.12206 - j0.30619	$9.00 \times 10^{-28}$	$4.08 \times 10^{-14}$		† 4.52632 + j0.39000	$5.20 \times 10^{-27}$	$8.10 \times 10^{-14}$
	† 5.94443 - j0.15718	$9.70 \times 10^{-27}$	$8.83 \times 10^{-14}$		† 4.68722 + j0.21784	$5.94 \times 10^{-28}$	$5.61 \times 10^{-14}$
	† 6.58704 - j0.25313	$3.32 \times 10^{-27}$	$6.02 \times 10^{-14}$		† 4.39096 + j0.32696	$3.21 \times 10^{-27}$	$7.92 \times 10^{-14}$
	† 5.90505 + j0.01221	$1.25 \times 10^{-26}$	$9.81 \times 10^{-14}$		5.00057 - j0.11507	$1.09 \times 10^{-26}$	$1.92 \times 10^{-13}$
	† 5.94207 + j0.16957	$1.62 \times 10^{-26}$	$1.07 \times 10^{-13}$		4.76562 + j0.43670	$8.09 \times 10^{-27}$	$1.03 \times 10^{-13}$
	† 6.66253 + j0.15431	$1.29 \times 10^{-26}$	$1.04 \times 10^{-13}$		4.73709 - j0.37749	$2.06 \times 10^{-26}$	$1.42 \times 10^{-13}$
	† 6.43757 + j0.20617	$3.71 \times 10^{-28}$	$5.40 \times 10^{-14}$		5.00018 - j0.24501	$1.09 \times 10^{-26}$	$1.63 \times 10^{-13}$
	6.56310 - j0.53611	$2.26 \times 10^{-27}$	$6.00 \times 10^{-14}$		4.91077 - j0.30256	$8.95 \times 10^{-27}$	$1.29 \times 10^{-13}$
	5.99070 - j0.38887	$3.24 \times 10^{-27}$	$5.27 \times 10^{-14}$		4.99007 + j0.11486	$1.56 \times 10^{-26}$	$1.51 \times 10^{-13}$
	6.41811 - j0.40923	$7.18 \times 10^{-27}$	$8.59 \times 10^{-14}$		4.42730 - j0.43876	$1.22 \times 10^{-26}$	$1.52 \times 10^{-13}$
	6.00345 + j0.30184	$1.24 \times 10^{-26}$	$1.02 \times 10^{-13}$		4.92378 + j0.31430	$8.93 \times 10^{-27}$	$1.01 \times 10^{-13}$
	6.68249 - j0.15627	$1.74 \times 10^{-26}$	$1.31 \times 10^{-13}$		4.30899 - j0.31304	$2.21 \times 10^{-27}$	$5.51 \times 10^{-14}$
	6.74175 - j0.01251	$1.14 \times 10^{-26}$	$9.93 \times 10^{-14}$		4.25008 + j0.34741	$1.81 \times 10^{-26}$	$2.78 \times 10^{-13}$
	6.11760 + j0.43538	$5.75 \times 10^{-28}$	$3.71 \times 10^{-14}$		4.18187 - j0.00103	$6.96 \times 10^{-19}$	$1.47 \times 10^{-5}$
	6.57387 + j0.30878	$1.02 \times 10^{-27}$	$3.40 \times 10^{-14}$		4.17751 - j0.00146	$2.87 \times 10^{-20}$	$9.25 \times 10^{-6}$
	6.46965 + j0.46899	$2.17 \times 10^{-27}$	$6.48 \times 10^{-14}$		4.16679 - j0.00123	$3.12 \times 10^{-21}$	$8.33 \times 10^{-7}$
	6.21144 + j0.41635	$4.08 \times 10^{-28}$	$2.75 \times 10^{-14}$		4.14648 - j0.00092	$6.13 \times 10^{-22}$	$1.51 \times 10^{-8}$

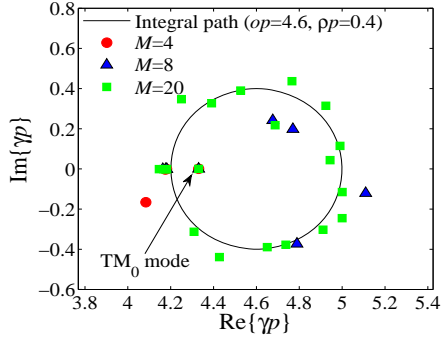
物理的意味をもたない解の  $F_l$  値および  $P_{ll}$  値は、複素伝搬定数の  $F_l$  値および  $P_{ll}$  値に比べて十分に小さい。TM モードでは、周回積分路内部に位置する解のうち、複素伝搬定数として物理的意味をもたない解の  $F_l$  値および  $P_{ll}$  値は十分に小さい。周回積分路外部に位置する解のうち、 $P_{ll}$  が  $10^{-8}$  から  $10^{-5}$  程度となっているものは、波数の分岐点 ( $\gamma_p = 4.18319$ ) に近いほど値が大きいことから、分岐点の影響によるものと考えられる。なおこれらの解はこの問題の求解範囲外であるため、指標を用いるまでもなく複素伝搬定数として物理的意味をもたない解として良い。周回積分路のパラメータ変更などの摂動に対して複素伝搬定数として物理的意味をもたない解の値は変化することから<sup>(11)</sup>、複素伝搬定数として物理的意味をもたない解の  $F_l$  値は小さいことが予想される。他方、数値計算による Hankel 行列の摂動により、元来零である固有値  $P_{ll}$  が小さな値となる<sup>(13)</sup> ことが予想される。また、 $P_{ll}$  が微小値を有することは複素伝搬定数に対応する固有値

に摂動を与える<sup>(13)</sup>。ここでは示さないが、 $N_s = 32, 64, 128$  の場合、および複数のモードが存在する  $k_{0p} = 7.5$  の場合について調べたところ、 $M = N_s/4$  まで同様の傾向であったことから、 $F_l$  値ならびに  $P_{ll}$  値を判別の指標とする方法の妥当性を確認している。

以上から、固有値の感度  $F_l$  ならびに Hankel 行列の固有値  $P_{ll}$  の大きさが、物理的意味をもつ複素伝搬定数と SS 法に起因して混入する複素伝搬定数として物理的意味をもたない解を判別する指標の候補であることがわかった。Hankel 行列の特異値<sup>(8)~(10)</sup>を指標とすることも考えられるが、固有値と特異値の対応付けができず、さらに特異値の大きさを二分できないために複素伝搬定数と複素伝搬定数として物理的意味をもたない解の判別が困難な場合がある。なお指標  $P_{ll}$  は一般化固有値問題の求解過程で算出されるため、特異値分解のような求解以外の計算は必要ない利点がある。他方、指標



(a) TE-mode



(b) TM-mode

Fig. 3 Distribution of computed eigenvalues of the three layer dielectric slab waveguide in the case of  $N_s = 128$

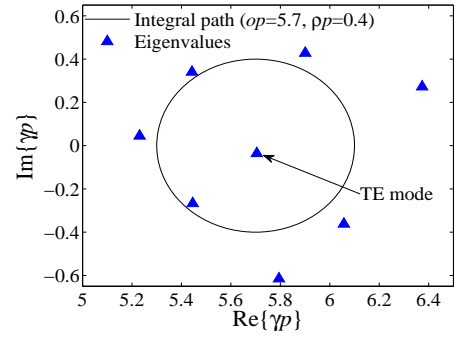
$F_l$  では式 (10) の左右の固有ベクトルの計算が必要である。

本数値計算では, Schur 分解,  $P_{li}$ ,  $S_{li}$ , 固有ベクトルの計算に Intel<sup>®</sup> Math Kernel Library の `zggevr` ルーチンを用いた. また, 式 (4) の任意の列ベクトル  $\{V\}$  は Intel<sup>®</sup> Math Kernel Library の `zlarnv` ルーチンを用いて各成分をランダムに発生させた. なお, ランダム関数のシードや分布を変更させた場合, 複素伝搬定数として物理的意味をもたない解の分布は変わるものの複素伝搬定数や指標  $F_l$ ,  $P_{li}$  の大きさへの影響が小さいことを確認している.

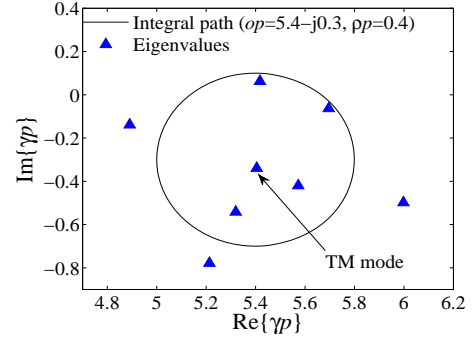
求解範囲に固有値が 1~2 個存在する本問題においては, Hankel 行列の次数  $M$  をそれほど多くとる必要はないが,  $N_s = 128$ ,  $M = 20$  の場合で固有値を求めるまでの総計算時間約 0.7 秒のうち, Hankel 行列の次数  $M$  が関係する一般化固有値問題の行列方程式 (10) を解く計算時間は約 400 マイクロ秒であり,  $M$  を多くとった場合でも総計算時間にはほぼ影響はない. 本数値計算で用いた計算機は, Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i7 2600(基本クロック 3.4GHz) の CPU, 16GB の主記憶装置を備えている.

#### 4.2. 周期構造電極誘電体スラブ導波路の数値解析

前節で取り扱った三層誘電体スラブ導波路に, 幅  $w = 0.5p$ , 厚み  $h = 0.5p$  の完全導体電極で周期構造を形成した, Fig.1 に示すような導波路の伝搬問題を考える. HTFEM では, Fig.1 の領域  $\Omega_2$  を 8 節点矩形要素で  $x, y$  軸方向ともに 32 等分割する. 領域  $\Omega_1$  と  $\Omega_3$  を分割するトレフツ要素のパラメータ



(a) TE-mode



(b) TM-mode

Fig. 4 Distribution of computed eigenvalues of the metallic grating on dielectric slab waveguide in the case of  $M = 8$  and  $N_s = 128$

は前節と同じとする. SS 法の設定パラメータは, Hankel 行列の次数  $M = 8$ , 積分点数  $N_s = 128$  とし, 周回積分路は TE モードでは中心  $op = 5.7$ , 半径  $pp = 0.4$  の円, TM モードでは中心  $op = 5.4 - j0.3$ , 半径  $pp = 0.4$  の円とした.

Fig.4 は, 求めた規格化固有値  $\hat{\lambda}_p$  を複素平面  $\gamma p$  上に示したものである. また, 算出した固有値  $\hat{\lambda}_p$ , 固有値の感度  $F_l$ , 固有値を算出する式 (14) 中の  $P_{li}$  の値を Table.2 に示す. 固有値の左側の † は周回積分路内部に位置する解であることを示す. 太字で示した複素伝搬定数は積分方程式法による文献値<sup>(14)</sup> に対応し, TE モードで  $\gamma p = 5.70243 - j0.03545$ , TM モードで  $\gamma p = 5.40284 - j0.33514$  である. 前節の結果と同様に, 周回積分路の内外に依らず, 複素伝搬定数として物理的意味をもたない解の  $F_l$  値および  $P_{li}$  値は複素伝搬定数の  $F_l$  値および  $P_{li}$  の値と比べて十分小さい.

以上の三層誘電体スラブ導波路ならびに周期構造電極誘電体スラブ導波路の数値解析結果から, SS 法を適用して算出した解を分別するための指標として  $F_l$  あるいは  $P_{li}$  の利用が期待できる. 最後に, 本手法と周回積分路の変更によって解を分別する従来手法<sup>(11)</sup> で, TE モード解析の計算時間を比較する. 三層誘電体スラブ導波路解析の計算時間は, 本手法が約 0.7 秒であるのに対し, 従来手法は約 1.5 秒であった. 周期構造電極誘電体スラブ導波路解析の計算時間は, 本手法が約 4 秒であるのに対し, 従来手法は約 115 秒であった. 従

Table 2 Normalized eigenvalues  $\hat{\lambda}_p$ ,  $F_l$  and  $P_{ll}$  corresponding to  $\hat{\lambda}_p$  in eq.(14) in the case of  $M = 8$  and  $N_s = 128$  for propagation characteristics in the metallic grating on the dielectric slab waveguide

TE-mode ( $\tilde{\Gamma} : op = 5.7, \rho p = 0.4$ )			TM-mode ( $\tilde{\Gamma} : op = 5.4 - j0.3, \rho p = 0.4$ )		
$\hat{\lambda}_p$	$F_l$	$P_{ll}$	$\hat{\lambda}_p$	$F_l$	$P_{ll}$
† <b>5.70470 - j0.03592</b>	63.03	12.13	† <b>5.40463 - j0.33948</b>	0.65	5.93
† 5.44572 - j0.26726	$2.27 \times 10^{-25}$	$4.65 \times 10^{-13}$	† 5.41765 + j0.06226	$2.85 \times 10^{-24}$	$2.07 \times 10^{-12}$
5.79435 - j0.61527	$1.50 \times 10^{-25}$	$4.66 \times 10^{-13}$	† 5.31939 - j0.54192	$5.25 \times 10^{-25}$	$2.83 \times 10^{-12}$
6.05698 - j0.36195	$2.56 \times 10^{-25}$	$6.97 \times 10^{-13}$	† 5.69578 - j0.06346	$2.00 \times 10^{-24}$	$1.74 \times 10^{-12}$
5.23068 + j0.04494	$7.72 \times 10^{-25}$	$7.69 \times 10^{-13}$	† 5.57245 - j0.41983	$6.32 \times 10^{-25}$	$3.12 \times 10^{-12}$
5.44260 + j0.34025	$1.58 \times 10^{-25}$	$3.58 \times 10^{-13}$	4.89063 - j0.13889	$4.09 \times 10^{-25}$	$5.00 \times 10^{-13}$
5.90075 + j0.42783	$3.03 \times 10^{-25}$	$5.61 \times 10^{-13}$	5.21344 - j0.77829	$9.75 \times 10^{-25}$	$1.13 \times 10^{-12}$
6.37356 + j0.27229	$1.98 \times 10^{-25}$	$5.08 \times 10^{-13}$	5.99795 - j0.49837	$1.82 \times 10^{-24}$	$1.07 \times 10^{-12}$

来手法はSS法の二度の適用に加え、式(3)の係数行列の条件数の計算に時間がかかる。

## 5. むすび

HTFEMの非線形固有値問題に対してSS法を適用する手法において、SS法の適用に起因して混入する解の判別方法を検討した。数値解析例により、SS法が導くHankel行列とそのシフト行列からなる線形固有値問題の感度あるいはHankel行列の固有値の大きさを指標とすることで、SS法に起因する複素伝搬定数として物理的意味をもたない解と物理的意味をもつ複素伝搬定数を分別できることを見出した。本判別法では、前報告のような、周回積分路の変更による解の変化を調べるための複数回の求解が必要なく、一度の求解で複素伝搬定数を求めることが可能である。また、指標に用いる量は固有値算出に用いる量のみ、あるいは線形固有値問題の左右の固有ベクトルであり、指標計算に伴う計算コストの増加は小さい。今後、TEモードとTMモードが混在、結合する問題に本手法を適用し、その有用性を検証する予定である。

## 参考文献

- (1) W.C. Chew and W.H. Weedon : A 3D perfectly matched medium for modified Maxwell's equations with stretched coordinates, *Microwave Opt. Technol. Lett.*, **7**(1994), pp. 599-604.
- (2) J.Y. Wu, D.M. Kingsland, J.F. Lee and R. Lee : A comparison of anisotropic PML to Berenger's PML and its application to the finite-element method for EM scattering, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **45**(1997), pp. 40-50.
- (3) F.L. Teixeira and W.C. Chew : Complex space approach to perfectly matched layers: a review and some new developments, *Int. J. Numer. Model.*, **13**(2000), pp. 441-455.
- (4) A.P. Zielinski and O.C. Zienkiewicz : Generalized finite element analysis with T-complete boundary solution function, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **21**(1985), pp. 509-528.
- (5) J. Jirousek and L. Guex : The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **23**(1986), pp. 651-693.
- (6) O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor and J.Z. Zhu : The finite element method its basis & fundamentals 6th edition, (2005), ELSEVIER, Ch.12.5.
- (7) 森田好人, 嶋田賢男, 長谷川弘治, 佐藤慎悟 : 開放型電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解析法, *計算数理工学論文集*, **10**(2010) pp. 87-92.
- (8) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura : A numerical method for polynomial eigenvalue problems using contour integral, *Tech. Report Department Comput. Sci. Univ. Tsukuba*, **CS-TR-08-15**(2008).
- (9) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami and K. Kimura : A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *JSIAM Lett.*, **1**(2009), pp. 52-55.
- (10) T. Ikegami, T. Sakurai and U. Nagashima : A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method, *J. Comput. Appl. Math.*, **233**(2009), pp. 1927-1936.
- (11) 嶋田賢男, 森田好人, 長谷川弘治, 佐藤慎悟 : 電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッドトレフツ有限要素解法への混入解, *計算数理工学論文集*, **11**(2011), pp. 1-6.
- (12) G.W. Stewart : On the sensitivity of the eigenvalue problem  $Ax = \lambda Bx$ , *SIAM J. Num. Anal.*, **9**(1972), pp. 669-686.
- (13) J.H. Wilkinson : Kronecker's canonical form and the QZ algorithm, *Lin. Alg. Appl.*, **28**(1979), pp. 285-303.
- (14) M. Matsumoto, M. Tsutsumi and N. Kumagai : Radiation characteristics of a dielectric slab waveguide periodically loaded with thick metal strips, *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **35**(1987), pp. 89-95.