室蘭工業大学
学術資源アーカイブ
Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive

電磁波導波路の対称あるいは反対称固有モードのハイブリッドトレフツ有限要素解析

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 日本計算数理工学会 公開日: 2018-02-15 キーワード (Ja): キーワード (En): Hybrid Trefftz Finite Element Method, Sakurai-Sugiura Projection Method, Electromagnetic Waveguide, Symmetric Structure, Propagation Characteristic 作成者: 森田, 好人, 佐藤, 慎悟, 長谷川, 弘治, 嶋田, 賢男 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/00009549

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.

計算数理工学論文集 Vol. 14 (2014 年 12 月)，論文 No. 13-141206 JASCOME

電磁波導波路の対称あるいは反対称固有モードのハイブリッドトレフツ有限要素解析

A HYBRID TREFFTZ FINITE ELEMENT ANALYSIS OF SYMMETRIC OR ANTISYMMETRIC EIGENMODES PROPAGATING IN AN ELECTROMAGNETIC WAVEGUIDE

森田　好人 [1)]，佐藤　慎悟 [2)]，長谷川　弘治 [3)]，嶋田　賢男 [4)]

Yoshihito MORITA, Shingo SATO, Koji HASEGAWA and Takao SHIMADA

1) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: s1924209@mmm.muroran-it.ac.jp)
2) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: satoshingo@mmm.muroran-it.ac.jp)
3) 室蘭工業大学大学院工学研究科 (〒 050-8585 室蘭市水元町 27-1, E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp)
4) 津山工業高等専門学校電気電子工学科 (〒 708-8509 津山市沼 624-1, E-mail: shimada@tsuyama-ct.ac.jp)

We presented a hybrid Trefftz finite element (HTFE) formulation for symmetric or antisymmetric eigenmode analysis of electromagnetic waveguides with symmetric cross sections. After the conventional scheme, we compute a functional of the quarter section divided by vector elements, and ring and disc sections divided by Trefftz elements. Numerical results of a holey fiber confirm utility and validity of the formulation by comparing with results of the HTFE method without symmetric conditions, the finite element method, and the multipole method.

Key Words: Hybrid Trefftz Finite Element Method, Sakurai-Sugiura Projection Method, Electromagnetic Waveguide, Symmetric Structure, Propagation Characteristic

1. はじめに

マルチコア光ファイバ，フォトニック結晶ファイバなどの伝搬方向に一様な電磁波導波路の導波モードの解析法として，著者らは，ハイブリッドトレフツ有限要素法（Hybrid Trefftz finite element method:HTFEM）の検討を行ってきた [(1)〜(3)]．この方法は，ベクトル要素と一様領域用のトレフツ要素を用いて，導波路断面の電磁界分布を近似し，非線形固有値問題をブロック版 SS 法 [(1)〜(6)] により解析するものである．トレフツ要素の補間関数は系の支配方程式を満足する波動関数系を用いるため，同じ未知変数の数であれば多項式を補間関数とするベクトル要素よりも数値分散が小さい．また，ホーリーファイバのように空隙部分を含む円環領域にベクトル要素を適用し，残りの領域にトレフツ要素を適用するので，最終的に解くべき固有値問題の次元数はベクトル要素のみを用いる場合よりも大幅に低減できる．このため，界分布の対称性を用いて解析領域を縮小せずとも，全断面構造を解析できるので，対称モード，反対称モードに制限することなく，全導波モードを一度に解析可能である．

既に，補間関数をベッセル関数，要素境界を円としたトレフツ要素を用いて，ホーリーファイバのモード解析を行い，1/4 断面構造にベクトル要素を適用した FEM と同程度の未知変数の数で，同程度の精度の伝搬定数が得られることを示した [(3)]．

しかしながら，対称モードあるいは反対称モードのように特定のモードのみを解析するには，電磁界分布に対称性の制約を課す必要があるが，HTFEM の検討は行っていなかった．また HTFEM は，空隙部分を含む円環領域を通常のベクトル要素で分割するため，円柱列がコア部を何重にも取り囲むフォトニック結晶ファイバのように空隙部分が広い場合には，全断面構造を解析するよりも界分布の対称性を利用して解析領域を縮小し，計算時間を短縮することが望ましいと考えられる．

本論文では，電磁界分布の対称性の制約を課した HTFEM の定式化を行い，ホーリーファイバの解析結果を報告する．全断面を解析対象とする HTFEM，1/4 断面を解析対象とするベクトル要素を使用した文献値 [(7)] とノーダル要素を使用した文献値 [(8)]，Multipole method による文献値 [(9)]，市販有限要素シミュレータである COMSOL Multiphysics®(COMSOL) を用いた計算結果と本結果を比較して，本定式化の妥当性を示している．なお，取扱いの簡単化のため，本論文の定式化

2014 年 9 月 19 日受付，2014 年 10 月 28 日受理

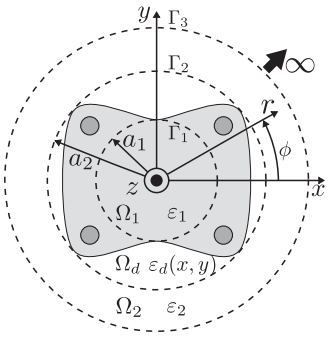


Fig. 1　Cross section of a dielectric waveguide

は，対称群 $C_{4\mathrm{v}}$ の導波路断面構造を対象として，鉛直な鏡映面を $x=0$ 面，$y=0$ 面としている．

2. 定式化

はじめに，HTFEM のモード解析法の概略について述べ，次に電磁界分布の対称性の制約を課した定式化を示す．

2.1. 伝搬方向に一様な導波路のモード解析法の概要

Fig.1 に示すような断面構造に対称面（$x=0$ と $y=0$ の 2 面）を有し，導波方向の z 軸方向に一様で無限に長い誘電体導波路を考える．全領域を誘電体とし，比透磁率を 1 とする．円筒座標系 (r,ϕ,z) を用いて，一様有限領域 $\Omega_1(0\le r\le a_1)$，コア，ホールなどの構造を断面に含む不連続領域 $\Omega_d(a_1\le r\le a_2)$，一様半無限領域 $\Omega_2(a_2\le r)$ に三分割する．領域 $\Omega_i(i=1,2)$ は，比誘電率が ε_i の一様均質な誘電体，領域 Ω_d は比誘電率が位置の関数 $\varepsilon_d(x,y)$ の誘電体である．構造の z 軸方向一様性から，固有モードの複素伝搬定数を γ，時間を t，角周波数を ω とすると，界の z 軸方向依存性は，$\exp\{j(\omega t-\gamma z)\}$ となる．ここに，j は虚数単位である．

導波路断面の電磁界分布を HTFE で近似することで，複素伝搬定数を固有値，電界分布を固有ベクトルとする非線形固有値問題を得る．これをブロック版 SS 法で解くと伝搬定数と界分布が求まる．本論文の SS 法による計算は，周回積分路を円，数値積分には台形則，一般化固有値問題では QZ 法を用いることで近似固有値 $\hat{\gamma}$ を計算した．

電磁界分布は，不連続領域 $\Omega_d(a_1\le r\le a_2)$ では界の対称性から 1/4 断面（$0\le\phi\le\pi/2$）を Fig.2 に示すベクトル要素で近似し，一様な領域 $\Omega_1(0\le r\le a_1)$，$\Omega_2(a_2\le r)$ では全域を界の対称性の制約を課したトレフツ要素で近似する．ベクトル要素を用いた 1/4 断面構造の有限要素定式化は，良く知られている [8, 10] ので本論文では省略し，以下に界分布の対称性の制約を課したトレフツ要素を説明する．

2.2. トレフツ要素の基本式

Fig.1 に示す一様な領域 $\Omega_i(i=1,2)$ の汎関数 I_i は

$$I_i=\frac{1}{2\mu_0}\int_{\Gamma_i}\left[\hat{n}\cdot(\nabla\times\vec{E}_i\times\vec{E}_i^t+\nabla\times\vec{E}_i^t\times\vec{E}_i)\right]ds -\frac{1}{\mu_0}\int_{\Gamma_i}\left[\hat{n}\cdot(\nabla\times\vec{E}_i\times\vec{E}_i^t+\nabla\times\vec{E}_i^t\times\vec{E}_i)\right]ds \quad (1)$$

である．ここに，$\vec{E}_i$ は電界ベクトル，μ_0 は真空中の透磁率，$\hat{n}$ は単位法線ベクトルであり，円筒座標系の動径方向 r の単位ベクトル $\hat{r}$ を用いると I_1，I_2 でそれぞれ $\hat{r}$，$-\hat{r}$ となる．上添字 t は転置界 [11] であることを示す．第二積分項は隣接領域との界の連続条件を緩和する項で，$\vec{\tilde{E}}_i$ は境界 Γ_i 上の電界である．

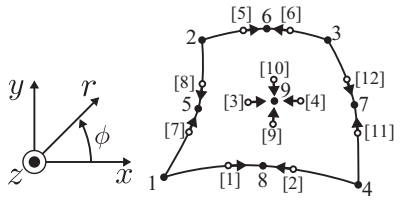


Fig. 2　Isoparametric element with 12-edges and 9-nodes

電界の 3 成分は電界と磁界の伝搬方向成分 $E_{z,i}$ ならびに $H_{z,i}$ を用いて表現できるので，真空中の波数を k_0 とする円筒座標系の波動方程式を満足するように，領域 $\Omega_i(i=1,2)$ 内の電界と磁界の伝搬方向成分 $E_{z,i}$ と $H_{z,i}$ を

$$E_{z,i}=\sum_{n=-M_\mathrm{c}}^{M_\mathrm{c}}A_{n,i}F_{n,i}(\kappa_i r)\exp(jn\phi)\exp(-j\gamma z), \quad (2)$$

$$H_{z,i}=\sum_{n=-M_\mathrm{c}}^{M_\mathrm{c}}B_{n,i}F_{n,i}(\kappa_i r)\exp(jn\phi)\exp(-j\gamma z) \quad (3)$$

と空間高調波展開する．ここに，M_c は展開の打切り項数，$A_{n,i}$，$B_{n,i}$ は展開係数である．$F_{n,i}(\kappa_i r)$ は領域 Ω_1 では n 次の第一種ベッセル関数 J_n，領域 Ω_2 では n 次の第二種変形ベッセル関数 K_n である．κ_i は領域 Ω_i の断面内波数である．

Fig.3 に示す 3 節点 2 辺線要素を用いてトレフツ要素の境界 Γ_i を分割する．境界 Γ_i が円なので，Γ_i 上の電界ベクトル $\vec{\tilde{E}}_i$ は辺上での $E_{\phi,i}$ 成分と節点上での $E_{z,i}$ 成分の 2 成分であり，

$$\tilde{E}_{\phi,i}=\{V\}^T\{\tilde{E}_{\phi,i}\}, \quad (4)$$

$$\tilde{E}_{z,i}=\{N\}^T\{\tilde{E}_{z,i}\} \quad (5)$$

と多項式補間できる．ここに，$\{V\}$，$\{N\}$ は ϕ，z 成分の多項式補間関数からなる列ベクトルであり，$\{\tilde{E}_{\phi,i}\}$，$\{\tilde{E}_{z,i}\}$ はそれぞれ電界の ϕ，z 成分からなる列ベクトルである．上添字 T は転置をとることを表す．式 (1) に式 (2)〜(5) を代入すると，離散化した汎関数 I_i は

$$I_i=\{D_i^t\}^T[G_i]\{D_i\}+\{\tilde{E_i}^t\}^T[L_i]\{D_i\}+\{D_i^t\}^T[L_i^t]\{\tilde{E}_i\} \quad (6)$$

となる．ここに，$\{D_i\}$ は展開係数を要素とする列ベクトル $\{A_{n,i}\}$，$\{B_{n,i}\}$ からなる列ベクトル

$$\{D_i\}=\left[\{A_{n,i}\}^T\quad\{B_{n,i}\}^T\right]^T \quad (7)$$

であり，$\{\tilde{E}_i\}$ は Γ_i 上の離散点上の全未知電界からなる列ベクトルである．行列 $[G_i]$，$[L_i]$，$[L_i^t]$ ならびに最終的な要素行列方程式については，文献 [3] を参照されたい．

2.3. 界分布に対称性の制約を課したトレフツ要素

汎関数の式 (1) を界分布の対称性の制約を課して 1/4 断面領域に適用することが考えられるが，積分路が円とはならな

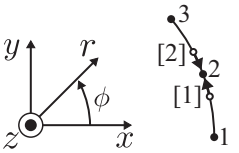


Fig. 3　Line element with 2-edges and 3-nodes

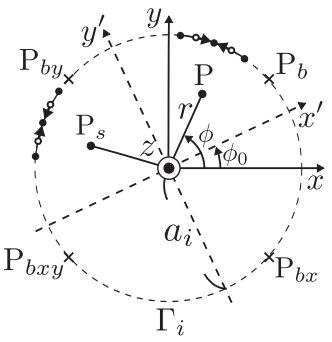


Fig. 4　Line elements and a symmetric y'-z plane

い．本論文では，簡単化のため，トレフツ要素境界は 1/4 断面のみ離散化するが，汎関数は一様領域全体に渡って評価する．このため，界の対称性を利用してトレフツ要素境界の円周 Γ_i 上の電界分布を不連続領域境界上の 1/4 円上の電界分布により表す必要がある．また対称性の制約を界分布に課すため，トレフツ要素内部の補間関数の構成には対称条件を満足する波動関数のみを用いる．

はじめに，1/4 円上の離散化電界 $\{\tilde{E}_{\phi,is}\}$，$\{\tilde{E}_{z,is}\}$ と境界 Γ_i の円周上の離散化電界の対応関係 $\{\tilde{E}_{\phi,i}\}$，$\{\tilde{E}_{z,i}\}$ を示す．Fig.4 に示すような境界 Γ_i の分割を考える．簡単化のため，ある要素と，それと対称な位置の要素の 2 つの要素のみ示している．ここに y' 軸と z 軸を含む平面が鏡映操作の鉛直面であり，$x=0$ 面では $\phi_0=0$，$y=0$ 面では $\phi_0=\pi/2$ である．この鉛直面による鏡映操作を，本論文で考えている $C_{4\mathrm{v}}$ 対称性を有する電界ベクトルに施すと，点 $\mathrm{P}(r,\phi)$ と対称な位置の点 $\mathrm{P}_s(r,\pi+2\phi_0-\phi)$ における電界ベクトルの z，ϕ 成分間には，

$$E_\phi(r,\pi+2\phi_0-\phi)=S_nE_\phi(r,\phi), \tag{8}$$

$$E_z(r,\pi+2\phi_0-\phi)=S_pE_z(r,\phi) \tag{9}$$

が成立する．ここに S_n，S_p は界分布が対称の場合に，それぞれ，-1，1 であり，反対称では 1，-1 とする．

円周 $r=a_i$ を構成する全要素について，円弧 $(r=a_i, 0\le\phi\le\pi/2)$，$(r=a_i,\pi/2\le\phi\le\pi)$，$(r=a_i,-\pi\le\phi\le-\pi/2)$，$(r=a_i,-\pi/2\le\phi\le 0)$ 上の辺と節点に，それぞれ恒等 e，鏡映 M_y，M_xM_y，M_x の対称操作を施して円弧 $(r=a_i, 0\le\phi\le\pi/2)$ 上の辺と節点に対応づけると，式 (6) に含まれる円周 Γ_i 上の離散化電界 $\{\tilde{E}_i\}$，$\{\tilde{E}_i^t\}$ は実際に分割する 1/4 円上の離散化電界 $\{\tilde{E}_{is}\}$，$\{\tilde{E}_{is}^t\}$ を用いて

$$\{\tilde{E}_i\}=[E_p]\{\tilde{E}_{is}\}, \tag{10}$$

$$\{\tilde{E}_i^t\}=[E_p^t]\{\tilde{E}_{is}^t\} \tag{11}$$

と表現できる．ここに，M_i は iz 面 $(i=x,y)$ による鏡映操作を表す．また行列 $[E_p]$，$[E_p^t]$ は，電界ベクトルの対称操作の行列表現からなり，要素の値は 1，0，-1 のいずれかである．

次にトレフツ要素の補間関数の制約を考える．領域 $\Omega_i(i=1,2)$ における電界の ϕ 成分の補間関数は，電磁界の z 成分 $E_{z,i}$，$H_{z,i}$ の補間関数から構成するので，ここでは $E_{z,i}$ の補間関数に課される制約を考える．境界 Γ_i である円周上の 2 点に式 (9) を適用し，空間高調波展開の式 (2) を代入すると，

$$\sum_{m=-M_\mathrm{c}}^{M_\mathrm{c}} A_{m,i}F_{m,i}(\kappa_ia_i)\exp(jm(\pi+2\phi_0-\phi)) = S_p\sum_{m=-M_\mathrm{c}}^{M_\mathrm{c}} A_{m,i}F_{m,i}(\kappa_ia_i)\exp(jm\phi) \tag{12}$$

である．式 (12) は任意の ϕ について成立するので，両辺に $\exp(-jn\phi)$ を掛けて ϕ について円周 Γ_i（$r=a_i$）上で積分すると，

$$A_{-n,i}F_{-n,i}(\kappa_ia_i)\exp\{-jn(\pi+2\phi_0)\}=S_pA_{n,i}F_{n,i}(\kappa_ia_i) \tag{13}$$

を得る．同様に $H_{z,i}$ の展開係数の関係式を得ることができるので，ここでは省略する．

鉛直な鏡映面を $y=0$ 面 $(\phi_0=\pi/2)$，$x=0$ 面 $(\phi_0=0)$ とすると，$A_{n,i}$，$B_{n,i}$ に課すべき制約は Table 1 となる．この表から，$A_{n,i}$，$B_{n,i}$ をそれぞれ $A_{-n,i}$，$B_{-n,i}$ で表すと，離散化した汎関数の式 (6) に含まれる空間高調波の展開係数 $\{D_i\}$，$\{D_i^t\}$ は，$\{D_i\}$，$\{D_i^t\}$ から全ての $A_{n,i}$，$B_{n,i}$，$A_{n,i}^t$，$B_{n,i}^t$ を取除いた $\{\bar{D}_i\}$，$\{\bar{D}_i^t\}$ を用いて，線形関係式

$$\{D_i\}=[D_p]\{\bar{D}_i\}, \tag{14}$$

$$\{D_i^t\}=[D_p^t]\{\bar{D}_i^t\} \tag{15}$$

で表される．

Table 1　Restriction on A_n and B_n for symmetric or antisymmetric fields

Symmetric plane		$i=1$		$i=2$	
$y=0$	$x=0$	n: even	n: odd	n: even	n: odd
S	S	$A_n=A_{-n}$	$A_n=0$	$A_n=A_{-n}$	$A_n=0$
		$B_n=-B_{-n}$	$B_n=0$	$B_n=-B_{-n}$	$B_n=0$
S	A	$A_n=0$	$A_n=-A_{-n}$	$A_n=0$	$A_n=A_{-n}$
		$B_n=0$	$B_n=B_{-n}$	$B_n=0$	$B_n=-B_{-n}$
A	S	$A_n=0$	$A_n=A_{-n}$	$A_n=0$	$A_n=-A_{-n}$
		$B_n=0$	$B_n=-B_{-n}$	$B_n=0$	$B_n=B_{-n}$
A	A	$A_n=-A_{-n}$	$A_n=0$	$A_n=-A_{-n}$	$A_n=0$
		$B_n=B_{-n}$	$B_n=0$	$B_n=B_{-n}$	$B_n=0$

S: symmetric fields, A: antisymmetric fields

結局，対称条件を課した離散化汎関数 I_{is} が

$$I_{is} = \{\bar{D}_i^t\}^T[D_p^t]^T[G_i][D_p]\{\bar{D}_i\} + \{\tilde{E}_{is}^t\}^T[E_p^t]^T[L_i][D_p]\{\bar{D}_i\} + \{\bar{D}_i^t\}^T[D_p^t]^T[L_i^t][E_p]\{\tilde{E}_{is}\} \tag{16}$$

と求まるので，$\{\bar{D}_i^t\}$，$\{\tilde{E}_{is}^t\}$ について変分をとるとトレフツ要素の行列方程式を得る．

3. 数値計算例

Fig.5 に示す z 方向へ無限に長いホーリーファイバを考える．ホールは真空とし，ホール以外の領域の比誘電率 ε_r は，波長依存性を持つものとする．また，ホールの直径 d，隣り合うホールの中心間の長さ $\Lambda = 1.35d$ とする．

HTFEM を用いた解析では，$a_1 = 0.8d$，$a_2 = 2d$ として，ホールを含む不連続領域 Ω_d を Fig.2 のベクトル要素，一様領域 Ω_1，Ω_2 をそれぞれ一つのトレフツ要素で分割を行う．対称性を用いた HTFEM では，$x = 0$，$y = 0$ の 2 面を対称面とし，前述したように解析領域は Fig.6 の斜線のない領域 ($r \le a_1$，$a_1 \le a_2$ かつ $0 \le \phi \le \pi/2$，$a_2 \le r$) とした．$0 \le \phi \le \pi/2$ の範囲での Γ_1，Γ_2 の線要素分割数を D_s とし，空間高調波の展開項数 M_c を $M_c = D_s$ とする．なおトレフツ要素の外周である円周 Γ_1，Γ_2 の分割数は，自動分割の仮定により，$4D_s$ となる．対称性の制約を課さず全領域を解析する場合の要素分割は，対称性を用いた HTFEM 解析の領域分割を対称となるように折り返している．このため，円周 Γ_1，Γ_2 の分割数は，$4D_s$ であり，空間高調波の打ち切り項数を $M_c = 4D_s$ とした．

本数値計算では，HTFEM に起因するスプリアス解は発生しないが，SS 法による求解時に判別除去可能なスプリアス解が混入する．判別手順については，文献 [1] を参照されたい．

Table 2 は $k_0 d = \pi/0.145$，$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$，$D_s = 18$ とした場合の，実効屈折率 $n_{\mathrm{eff}}(= \hat{\gamma}/k_0)$ を調べたものである．文献 [8] の FEM は二次の三角形ノーダル要素で磁界の x, y 成分をそれぞれ離散化している．対称性の制約を課した HTFEM による結果は他の解析法による文献値 [8, 9] と実部が良く一致している．虚部は，文献 [8] の結果よりも Multipole method[9] に近い値となっている．文献値 [8] と HTFEM の虚部が異なるのは，文献値 [8] では実効屈折率の実部が 10 進数で 4,5 桁，その虚部が非零となる桁までの精度で計算しているためだと考えられる．なお，ここでは示さないが，対称性の制約を課した HTFEM の結果と全領域を解析した結果は，実部の有効桁数 7 桁以上，虚部で 4 桁以上一致しており，本論文で報告したトレフツ要素の対称条件組込み方法が妥当であることを確めてある．

このホーリーファイバの誘電体を SiO_2[12] に変更し，対称条件を課して実効屈折率と損失の波長依存性を調べた結果を Fig.7 に示す．Fig.7(a) の分散曲線はいずれのモードでも文献値 [8] と一致している．Fig.7(b) の損失は，TE_{01}，TM_{01}，HE_{21}，HE_{11} について傾向が一致しており，これらのモードより損失が大きい HE_{31}^a，HE_{31}^b，EH_{11}^a，EH_{11}^b モードでは文献 [8] と一致している．これは，Table 2 の文献値 [8] と HTFEM の虚部に差がある理由と同じであり，文献値 [8] では実効屈折率の実部が 10 進数で 4,5 桁，その虚部が非零となる桁までの精度で計算しているため，実行屈折率の実部の一致度に比べ，損失に対する虚部の一致度が低くなっているからである．

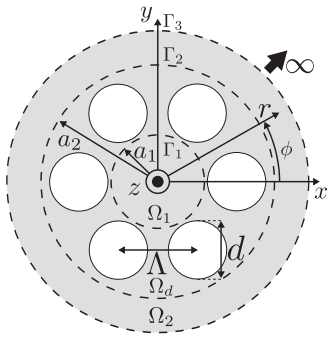


Fig. 5　Cross section of a holey fiber

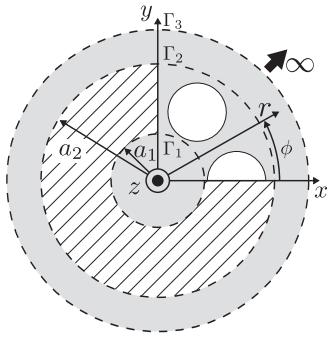


Fig. 6　HTFE model of the holey fiber

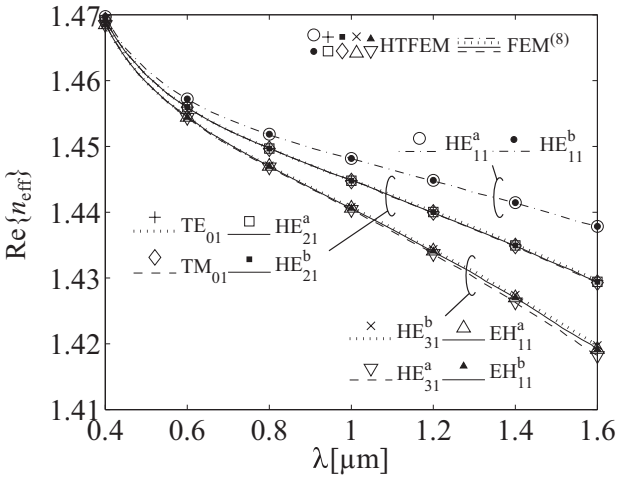
次に，実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ の未知変数の数依存性を調べる．$k_0 d = \pi/0.155$，$\sqrt{\varepsilon_r} = 1.45$ とし，縮退する 2 つの HE_{11}^a，HE_{11}^b モードを解析した結果を Fig.8 に示す．文献 [7] の結果は，1/4 領域を二次の三角形アイソパラメトリックベクトル要素を用いて解析したものである．COMSOL の結果は，解析モデルは断面全体，あるいは対称性を用いて Fig.9 に示す 1/4 領域とし，文献 [7] と同様に，$a_2 = 8.1d$ を電気壁として計算した．また，$6d \le r \le a_2$ を完全整合層（Perfectly matched layer:PML）とし，PML scaling factor を 2，PML order を 1 として，r 方向の coordinate stretching variable を

$$s_r = \frac{4\pi(1-j)(r-6d)}{2.1dk_0\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{17}$$

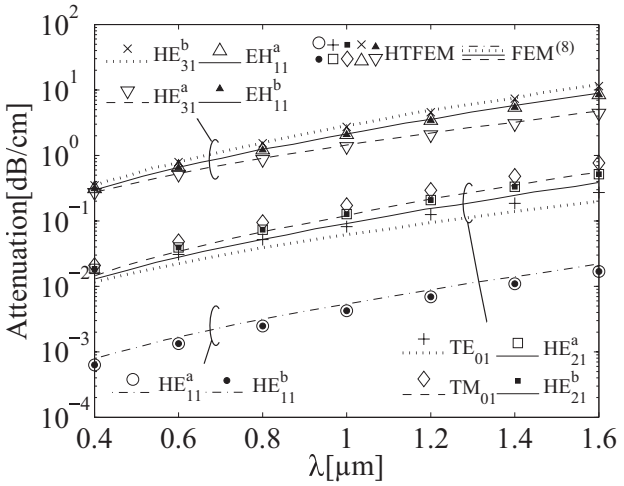
としており，Fig.2 に示したベクトル要素を用いて分割し，一般化固有値問題を解いた． 対称性の制約を課した HTFEM の結果（□，◊）と全断面を解析した結果（■，♦）から，対称性の制約を課した HTFEM の方が少ない未知変数の数で一定値に近付くことが確かめられる．また，対称性の制約を課した HTFEM の結果は，COMSOL，文献値 [7] の解析結果よりも少ない全未知変数の数の個数で収束している．ここでは示さないが，図示した未知変数の数が最大の場合に，対称性の制約を課した HTFEM の結果と 1/4 領域を解析対象

Table 2　Effective indices n_{eff} for propagating modes in the holey fiber

	HTFEM	FEM[8]	Multipole Method[9]
HE_{11}^{a}	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$	$1.4453935-j4.11\times10^{-8}$	$1.4453953-j3.15\times10^{-8}$
HE_{11}^{b}	$1.4453953-j3.19\times10^{-8}$	$1.4453931-j4.12\times10^{-8}$	
TE_{01}	$1.4385838-j5.31\times10^{-7}$	$1.4385760-j3.97\times10^{-7}$	$1.4385858-j4.99\times10^{-7}$
HE_{21}^{a}	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$	$1.4384419-j7.13\times10^{-7}$	$1.4384458-j9.93\times10^{-7}$
HE_{21}^{b}	$1.4384450-j9.72\times10^{-7}$	$1.4384376-j7.11\times10^{-7}$	
TM_{01}	$1.4383648-j1.41\times10^{-6}$	$1.4383622-j1.03\times10^{-6}$	$1.4383667-j1.37\times10^{-6}$
HE_{31}^{b}	$1.4304079-j2.15\times10^{-5}$	$1.4303848-j2.25\times10^{-5}$	$1.430175-j2.22\times10^{-5}$
EH_{11}^{a}	$1.4299564-j1.59\times10^{-5}$	$1.4299517-j1.67\times10^{-5}$	$1.4299694-j1.58\times10^{-5}$
EH_{11}^{b}	$1.4299564-j1.59\times10^{-5}$	$1.4299459-j1.68\times10^{-5}$	
HE_{31}^{a}	$1.4292498-j8.73\times10^{-6}$	$1.4292608-j9.17\times10^{-6}$	$1.4292553-j9.34\times10^{-6}$



(a) Dispersion characteristics



(b) Dependence of the losses on wave lengths

Fig. 7　Dependence of the effective indices and losses on wave lengths

とした COMSOL の実効屈折率の実部は，有効桁数で 7 桁が一致していた．HTFEM の未知変数の数が少ないと実効屈折率が単調に増加しないのは，原因は明確ではないが，未知変数の数が少ないため界分布の近似が不十分なためと考えら

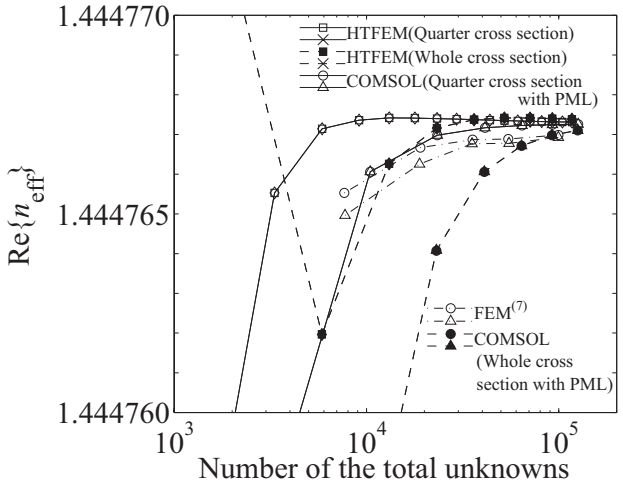


Fig. 8　Dependence of the real parts of the effective index $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ on the number of the total unknowns

れる．

Fig.10 は Fig.8 に示した HE_{11}^{a}，HE_{11}^{b} モードの実効屈折率の実部 $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff},1}\}$，$\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff},2}\}$ の差の未知変数の数依存性を調べたものである．対称性を課した HTFEM の結果ならびに全領域を解析する HTFEM の結果 (■) の一部（4 点）が図示されていないのは，固有値の実部が浮動小数点表示で 15 桁一致しており，差の値が図の範囲外であったためである．未知変数の数が増えると，文献値 [7]，COMSOL の計算結果では誤差が減少していることが確かめられる．図示した未知

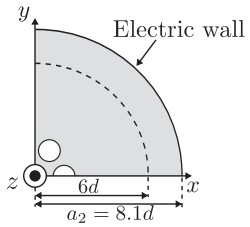


Fig. 9　FE model of the holey fiber

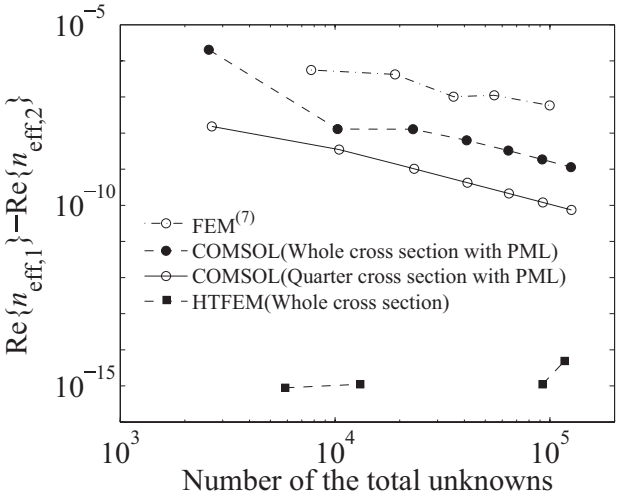


Fig. 10 Dependence of the difference of the real parts of degenerate effective indices $\mathrm{Re}\{n_{\mathrm{eff}}\}$ on the number of the total unknowns

変数の数の範囲では，他の計算法に比べると，HTFEM による実効屈折率の計算誤差が最も小さいことがわかる．

4. むすび

対称な界分布を有する導波路固有モードの解析を対象として，界分布の対称性の制約を課したハイブリッドトレフツ有限要素法の定式化を行った．数値計算例としてホーリーファイバを考え，対称性の制約を課した HTFEM の結果を，対称性の制約を課さない HTFEM による結果，COMSOL を用いたベクトル要素のみによる結果，文献値 (7)〜(9) と比較して，妥当性，有用性を確認した．

今後は，HTFEM の計算時間の詳細な調査を行う予定である．

参考文献

(1) 佐藤慎悟，森田好人，長谷川弘治，嶋田賢男：電磁波導波路非線形固有値問題の解の判別法（線形化問題の固有値あるいは固有値の感度を用いる方法），計算数理工学論文集，**12**(2012)，pp. 31–36.

(2) 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男：縮退モードを有する電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法，計算数理工学論文集，**13**(2013)，pp. 73–78.

(3) 森田好人，佐藤慎悟，長谷川弘治，嶋田賢男：伝搬方向に一様な電磁波導波路伝搬特性のハイブリッドトレフツ有限要素解析法，電子情報通信学会技術研究報告，**114**(2014)，pp. 181–186.

(4) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura：A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals，Japan Society for Industrial and Applied Mathematics Letters，**1**(2009)，pp. 52–55.

(5) T. Ikegami, T. Sakurai, and U. Nagashima：A filter diagonalization for generalized eigenvalue problems based on the Sakurai-Sugiura projection method，Journal of Computational and Applied Mathematics，**233**(2010)，pp. 1927–1936.

(6) J. Asakura, T. Sakurai, H. Tadano, T. Ikegami, and K. Kimura：A numerical method for polynomial eigenvalue problems using contour integral，Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics，**27**(2010)，pp. 73–90.

(7) M. Koshiba and K. Saitoh：Numerical verification of degeneracy in hexagonal photonic crystal fibers，IEEE Photonics Technology Letters，**13**(2001)，pp. 1313–1315.

(8) H.P. Uranus and H.J.W.M. Hoekstra：Modelling of microstructured waveguides using a finite-element-based vectorial mode solver with transparent boundary conditions，Optics Express，**12**(2004)，pp. 2795–2809.

(9) T.P. White, B.T. Kuhlmey, R.C. McPhedran, D. Maystre, G. Renversez, C. Martijn de Sterke, and L.C. Botten：Multipole method for microstructured optical fibers. I. Formulation，Journal of the Optical Society of America B，**19**(2002)，pp. 2322–2330.

(10) F. Brechet, J. Marcou, D.Pagnoux, and P. Roy：Complete analysis of the characteristics of propagation into photonic crystal fibers, by the finite element method, Optical Fiber Technology，**6**(2000)，pp. 181–191.

(11) L. Cairo and T. Kahan：Variational Techniques in Electromagnetism，(1965)，Gordon and Breach.

(12) I.H. Malitson：Interspecimen comparison of the refractive index of fused silica，Journal of the Optical Society of America，**55**(1965)，pp. 1205–1209.