



室蘭工業大学

学術資源アーカイブ

Muroran Institute of Technology Academic Resources Archive



三次元入射する平面波の回折格子散乱特性のハイブリッドトレフツ有限要素法解析

メタデータ	言語: jpn 出版者: 電子情報通信学会 公開日: 2018-03-02 キーワード (Ja): ハイブリッドトレフツ有限要素法, 斜入射, 散乱特性, 周期構造, 直辺混合要素 キーワード (En): 作成者: 佐藤, 慎悟, 長谷川, 弘治 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/00009572

三次元入射する平面波の回折格子散乱特性のハイブリッドトレフツ有限要素法解析

佐藤 慎悟^{†a)} 長谷川弘治[†]

Analysis of Scattering Characteristics of Diffraction Gratings for Three Dimensionally Plane Wave Incidence Using Hybrid Trefftz Finite Element Method

Shingo SATO^{†a)} and Koji HASEGAWA[†]

あらまし 任意の入射方向と偏波をもつ入射平面波（三次元入射）の回折格子による散乱特性をハイブリッドトレフツ有限要素法を用いて解析している。本手法は、トレフツ要素を用いるため、通常の有限要素のみを用いた解析よりも未知数を低減できる特徴もっている有用な手法である。本手法の三次元問題への拡張の妥当性を検証するために、三次元入射における一次元周期構造回折格子の散乱特性解析を行い、他の解析法との計算結果の比較を行っている。

キーワード ハイブリッドトレフツ有限要素法, 斜入射, 散乱特性, 周期構造, 直辺混合要素

1. ま え が き

回折格子に代表される周期構造素子による電磁波の散乱問題の数値解析法に関する多くの報告がある。中でも有限要素法に基づく解析法は、任意の格子形状の取扱いに優れていることや、等方性媒質のみならず異方性媒質やキラル媒質にも適用が可能なることから有効な解析手法といえる [1] ~ [9]。従来の有限要素法解析における格子上方, 下方の半無限領域の評価は、他の解析法と有限要素法の結合解法 [1] ~ [8] や、PML などの吸収境界条件の適用 [9] により行われてきた。結合解法では、解析的關係式 [1] ~ [3]、境界積分法 [4]、モーメント法 [5]、フロケモード展開 [6] ~ [8] などとの結合による解析が報告されている。これに対し、本論文で採用するハイブリッドトレフツ有限要素法 [10] は、特殊な有限要素であるトレフツ要素を用いて半無限領域

の評価を行う。筆者らはこれまでに、ハイブリッドトレフツ有限要素法を用いて入射面が格子軸に垂直な面内にある平面波の回折格子による散乱特性解析を行い、その妥当性を示してきた [11], [12]。多層型の回折格子を対象とした解析 [12] では、半無限領域だけでなく、各格子領域間の一様均質領域にもトレフツ要素を適用することで、通常の有限要素法解析よりも大幅に未知数を低減できる。

従来は、入射面が格子軸に垂直な面内にある二次元入射に限定した定式化であったが、実用上の観点から、入射平面波が任意の方向から入射する三次元入射による解析を行う必要がある。これまで三次元入射に対する周期構造素子の散乱特性は、標本化定理に基づくスペクトル領域法 [13]、安浦の方法 [14]、ストリップ電流とスロット磁流を用いた積分方程式法 [15]、vectorial modal method [16]、スペクトル領域ガレルキン法 [17]、電束・磁束密度の空間高調波展開と行列固有値を用いた計算法 [17]、有限要素法 [18], [19] など種々の手法によって解析されている。この問題の解析では、TE 成分と TM 成分が結合した定式化を行わなければならない、二次元入射の場合に比べて取り扱う未知数が

[†] 室蘭工業大学電気電子工学科, 室蘭市
Department of Electrical and Electronic Engineering,
Muroran Institute of Technology, Muroran-shi, 050-8585
Japan

a) E-mail: s1024183@mmm.muroran-it.ac.jp

増える．更に，解析対象がフォトニック結晶などのように多層型の周期構造をしている場合，有限要素法を直接適用すると未知数が非常に多くなる．しかしながら，このような三次元入射による多層型格子の解析においても，本手法では[12]で示しているように，すべての一様均質領域をトレフツ要素で評価するため，従来の有限要素法に基づく手法に比べて未知数を大幅に少なく解析できると予想される．

本論文では，任意の入射方向と偏波をもつ平面波の回折格子による散乱問題に対し，ハイブリッドトレフツ有限要素法を拡張している．問題の簡単化のため，解析対象を単層の一次元周期構造回折格子とした．定式化においては，不均質な格子領域を分割する要素に直辺混合要素[20]を用い，電界分布のみを算出する連立一次方程式を解く問題に帰着させた．具体的に，誘電体格子，完全導体ストリップ格子の散乱特性を数値解析し，vectorial modal method[16]，及び解析的関係式と有限要素法の結合解法[18]による計算結果との比較を行い，本手法の妥当性を検証している．

2. 問題の設定

図1に示すような， x 軸方向に周期 p の無限長周期構造をもち， z 軸方向に一様な構造をした回折格子に平面波が入射する散乱問題を考える．平面波は図2に示すように，入射波数ベクトル \vec{k}^{in} と y 軸がなす入射角 θ_i ，入射面と x 軸がなす方位角 θ_r ，入射面と入射電界ベクトル \vec{E}^{in} がなす偏波角 θ_p で入射するものとする．入射波数ベクトル \vec{k}^{in} は，

$$\vec{k}^{\text{in}} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (1)$$

$$k_x = k_0 \sin \theta_i \cos \theta_r$$

$$k_y = -k_0 \cos \theta_i$$

$$k_z = k_0 \sin \theta_i \sin \theta_r$$

$$k_0 = \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (2)$$

である．ここに， ω は角周波数， ϵ ， μ はそれぞれ回折格子上方の半無限領域の誘電率，透磁率である．また， \hat{x} ， \hat{y} ， \hat{z} はそれぞれ x ， y ， z 軸方向の単位ベクトルである．入射電界ベクトル \vec{E}^{in} は図2に示すように，入射面に垂直な成分 \vec{E}_v と水平な成分 \vec{E}_h に分解でき，

$$\begin{aligned} \vec{E}^{\text{in}} &= \vec{E}_v + \vec{E}_h \\ &= |\vec{E}^{\text{in}}| \sin \theta_p \hat{e}_v + |\vec{E}^{\text{in}}| \cos \theta_p \hat{e}_h \end{aligned} \quad (3)$$

と書ける．ここに， $|\vec{E}^{\text{in}}|$ は入射平面波の振幅であり，

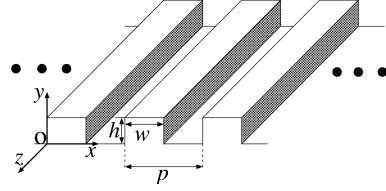


図1 回折格子
 Fig. 1 Diffraction grating.

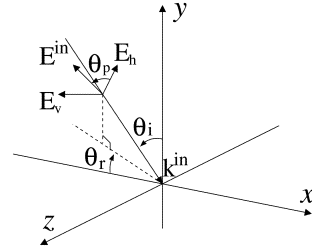


図2 入射平面波
 Fig. 2 Incident plane wave.

簡単のため $|\vec{E}^{\text{in}}| = 1$ とする． \hat{e}_v ， \hat{e}_h はそれぞれ垂直方向，水平方向の単位ベクトルである． \vec{E}^{in} を x ， y ， z 成分で表示すると，

$$\vec{E}^{\text{in}} = E_x^{\text{in}} \hat{x} + E_y^{\text{in}} \hat{y} + E_z^{\text{in}} \hat{z} \quad (4)$$

$$E_x^{\text{in}} = -\sin \theta_p \sin \theta_r + \cos \theta_p \cos \theta_i \cos \theta_r \quad (5)$$

$$E_y^{\text{in}} = \cos \theta_p \sin \theta_i \quad (6)$$

$$E_z^{\text{in}} = \sin \theta_p \cos \theta_r + \cos \theta_p \cos \theta_i \sin \theta_r \quad (7)$$

となる．

マクスウェルの方程式から系の支配方程式は，

$$\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_r \vec{E} = \vec{S}(x, h, z) \quad (8)$$

である．ここに， ϵ_r ， μ_r はそれぞれ比誘電率，比透磁率である． $\vec{S}(x, h, z)$ は誘導定理によって格子の上端($y = h$)に置換した等価電磁流源で，電流密度を \vec{J}_s ，磁流密度を \vec{J}_{sm} とすると，

$$\begin{aligned} \vec{S} &= -j\omega \vec{J}_s - \nabla \times \frac{1}{\mu_r} \vec{J}_{\text{sm}} \\ &= \frac{1}{\mu_r} \hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^{\text{in}} + \frac{1}{\mu_r} \nabla \times \hat{n} \times \vec{E}^{\text{in}} \end{aligned} \quad (9)$$

である． \hat{n} は法線方向の単位ベクトルである．

3. ハイブリッドトレフツ有限要素法による定式化

3.1 汎関数

図 1 に示すように、格子は z 軸方向へ一様な構造としたため、図 3 に示すような二次元平面で問題を考えることができる。ここで、解析領域を一様均質領域 Ω_1 、 Ω_3 と不均質領域 Ω_2 に分割する。領域 Ω_1 は格子上方の半無限領域 ($0 \leq x \leq p$, $h \leq y \leq \infty$) で、境界 Γ_1 は格子の上端に接している。領域 Ω_1 における比誘電率、比透磁率をそれぞれ ϵ_1 、 μ_1 とする。1 周期分の格子を囲む領域 ($0 \leq x \leq p$, $0 \leq y \leq h$) を Ω_2 とし、比誘電率、比透磁率をそれぞれ $\epsilon_2(x, y)$ 、 $\mu_2(x, y)$ とする。格子下方の半無限領域 ($0 \leq x \leq p$, $-\infty \leq y \leq 0$) を Ω_3 とし、境界 Γ_2 は格子の下端に接している。領域 Ω_3 における比誘電率、比透磁率をそれぞれ ϵ_3 、 μ_3 とする。解析領域全体の汎関数 I は次のようになる。

$$I = \langle \vec{E}^t, \mathcal{L}\vec{E} \rangle_{\Omega} + \langle \vec{E}^t, \vec{S} \rangle_{\Omega} + \langle \vec{S}^t, \vec{E} \rangle_{\Omega} + \langle \vec{H}^t, \mathcal{G}(\vec{E} - \vec{E}^t) \rangle_{\Gamma} + \langle \mathcal{G}^t(\vec{E}^t - \vec{E}), \vec{H} \rangle_{\Gamma} \quad (10)$$

ここに、上添字 t はトランスポーズ界 [21] を表し、

$$\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \vec{G} \, dxdy \quad (11)$$

$$\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot \vec{G} \, ds \quad (12)$$

であり、オペレータ \mathcal{L} 、 \mathcal{G} はそれぞれ、

$$\mathcal{L} = (\nabla \times \frac{1}{\mu_r} \nabla \times) - k_0^2 \epsilon_r \quad (13)$$

$$\mathcal{G} = j\omega \hat{n} \times \quad (14)$$

である。以下、系全体の汎関数 I を各領域 Ω_i からの寄与分 I_i ごとに計算することを考える。

3.2 不均質領域 Ω_2 における汎関数の離散化

不均質領域 Ω_2 における汎関数 I_2 は、

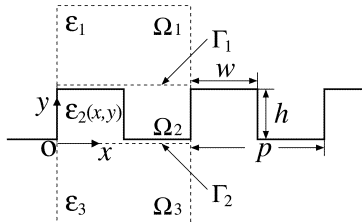


図 3 領域分割

Fig. 3 Division of analysis region.

$$I_2 = \int_{\Omega_2} \left[\nabla \times \vec{E}^t \cdot \frac{1}{\mu_2(x, y)} \nabla \times \vec{E} - k_0^2 \epsilon_2(x, y) \vec{E}^t \cdot \vec{E} \right] dxdy + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Gamma_1} \vec{E}^t \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^{\text{in}} + \nabla \times \hat{n} \times \vec{E}^{\text{in}}) ds + \frac{1}{\mu_1} \int_{\Gamma_1} \vec{E} \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}^{\text{int}} + \nabla \times \hat{n} \times \vec{E}^{\text{int}}) ds \quad (15)$$

である。

領域 Ω_2 を図 4 に示す直辺混合方形要素 [20] を用いて分割する。この要素は、4 節点 $\{(1), (2), (3), (4)\}$ での x 成分、4 節点 $\{[1], [2], [3], [4]\}$ での y 成分、8 節点 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ での z 成分の値を用いて、要素内の x 、 y 、 z 成分を次のように近似する。

$$E_x = \sum_{i=1}^4 U_i E_{xi} = \{U\}^T \{E_x\} \quad (16)$$

$$E_y = \sum_{i=1}^4 V_i E_{yi} = \{V\}^T \{E_y\} \quad (17)$$

$$E_z = \sum_{i=1}^8 N_i E_{zi} = \{N\}^T \{E_z\} \quad (18)$$

ここに、 $\{U\}$ 、 $\{V\}$ 、 $\{N\}$ は補間関数ベクトルであり、 $\{E_x\}$ 、 $\{E_y\}$ はそれぞれ要素内の各辺上の電界ベクトルの x 成分、 y 成分、 $\{E_z\}$ は要素内の各節点での電界ベクトルの z 成分である。上添字 T は転置をとることを表す。式 (16) ~ (18) を用いて式 (15) を離散化すると、

$$I_2 = \{E^t\}^T [C] \{E\} + \{E_x^t\}^T \{S_x\} + \{E_z^t\}^T \{S_z\} + \{S_x^t\}^T \{E_x\} + \{S_z^t\}^T \{E_z\} \quad (19)$$

ここに、 $\{E\}$ 、 $\{S_x\}$ 、 $\{S_z\}$ 、 $[C]$ はそれぞれ、

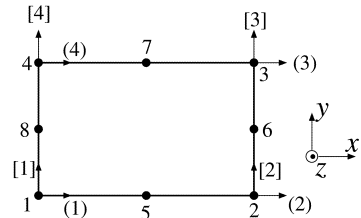


図 4 直辺混合方形要素

Fig. 4 Mixed-edge rectangular element.

$$\{E\} = [\{E_x\} \quad \{E_y\} \quad \{E_z\}]^T \quad (20)$$

$$\{S_x\} = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\mu_1} \{U\} e^{-jk_x x} \{jk_x E_y^{\text{in}} + 2jk_y E_x^{\text{in}} + \frac{k_x}{k_y} (jk_z E_z^{\text{in}} + jk_x E_x^{\text{in}})\} ds \quad (21)$$

$$\{S_z\} = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\mu_1} \{N\} e^{-jk_x x} \{jk_z E_y^{\text{in}} + 2jk_y E_z^{\text{in}} + \frac{k_z}{k_y} (jk_z E_z^{\text{in}} + jk_x E_x^{\text{in}})\} ds \quad (22)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{xx}] & [C_{xy}] & [C_{xz}] \\ [C_{yx}] & [C_{yy}] & [C_{yz}] \\ [C_{zx}] & [C_{zy}] & [C_{zz}] \end{bmatrix} \quad (23)$$

で与えられる．また， $[C_{ij}] (i, j = x, y, z)$ は $[C]$ の小行列で，それぞれ，

$$[C_{xx}] = \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{\mu_2(x, y)} \left(\frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} + k_z^2 \{U\} \{U\}^T \right) - k_0^2 \epsilon_2(x, y) \{U\} \{U\}^T \right] dx dy \quad (24)$$

$$[C_{xy}] = - \int_{\Omega_2} \frac{1}{\mu_2(x, y)} \frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} dx dy \quad (25)$$

$$[C_{xz}] = - \int_{\Omega_2} \frac{1}{\mu_2(x, y)} jk_z \{U\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} dx dy \quad (26)$$

$$[C_{yx}] = - \int_{\Omega_2} \frac{1}{\mu_2(x, y)} \frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} dx dy \quad (27)$$

$$[C_{yy}] = \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{\mu_2(x, y)} \left(\frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} + k_z^2 \{V\} \{V\}^T \right) - k_0^2 \epsilon_2(x, y) \{V\} \{V\}^T \right] dx dy \quad (28)$$

$$[C_{yz}] = - \int_{\Omega_2} \frac{1}{\mu_2(x, y)} jk_z \{V\} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} dx dy \quad (29)$$

$$[C_{zx}] = \int_{\Omega_2} \frac{1}{\mu_2(x, y)} jk_z \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \{U\}^T dx dy \quad (30)$$

$$[C_{zy}] = \int_{\Omega_2} \frac{1}{\mu_2(x, y)} jk_z \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \{V\}^T dx dy \quad (31)$$

$$[C_{zz}] = \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{\mu_2(x, y)} \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \right) - k_0^2 \epsilon_2(x, y) \{N\} \{N\}^T \right] dx dy \quad (32)$$

となる．

3.3 一様均質領域 Ω_1, Ω_3 における汎関数の離散化
一様均質領域 $\Omega_i (i = 1, 3)$ はそれぞれ 1 個のトレフツ要素で分割する．トレフツ要素は系の支配方程式を満足する補間関数を用いるため，領域 $\Omega_i (i = 1, 3)$ の汎関数 I_i は，

$$I_i = \frac{j\omega}{2} \int_{\partial A} [\hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t)] ds - j\omega \int_{\partial A} [\hat{n} \cdot (\vec{E}^t \times \vec{H}) - \hat{n} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}^t)] ds \quad (33)$$

となる．ここに， \vec{E} はトレフツ要素に隣接する要素との接続境界上の電界であり，積分 $\int_{\partial A} ds$ は領域 Ω_i を囲む境界の周回積分を表す．ここで，更に，補間関数に放射条件，周期境界条件を満足させると，領域 Ω_1 を分割するトレフツ要素では境界 Γ_1 上，領域 Ω_3 を分割するトレフツ要素では境界 Γ_2 上のみの線積分で汎関数 I_i が計算できる．通常の有限要素では面積分によって領域の汎関数の評価が行われるが，トレフツ要素では要素境界上の線積分のみによって評価が行われるため，未知数が低減する．

各領域 $\Omega_i (i = 1, 3)$ 内の電界，磁界の z 成分が放射条件と周期境界条件を満足する平面波解となるように，空間高調波展開すると，

$$E_{z,i} = \sum_{n=-M}^M A_{n,i} f_{n,i}(r) \quad (34)$$

$$H_{z,i} = \sum_{n=-M}^M B_{n,i} f_{n,i}(r) \quad (35)$$

となる．ここに， M はモード数， $A_{n,i}, B_{n,i}$ はそれぞれ電界，磁界の z 成分の展開係数であり，

$$f_{n,i}(r) = \exp(-\gamma_n x + \kappa_{n,i} y - jk_z z) \quad (36)$$

$$\gamma_n = j \left(k_x + \frac{2n\pi}{p} \right) \quad (37)$$

$$\kappa_{n,i} = \begin{cases} -j\sqrt{k_0^2\epsilon_i + \gamma_n^2 - k_z^2} & i = 1 \\ j\sqrt{k_0^2\epsilon_i + \gamma_n^2 - k_z^2} & i = 3 \end{cases} \quad (38)$$

である． ϵ_i は領域 Ω_i の比誘電率である．電界の x, y 成分を $E_{z,i}, H_{z,i}$ で表し，式 (34), (35) を用いると，

$$E_{x,i} = \sum_{n=-M}^M \alpha_{e,i}(-\kappa_{n,i}B_{n,i} + \beta_e\gamma_n A_{n,i})f_{n,i}(r) \quad (39)$$

$$E_{y,i} = \sum_{n=-M}^M \alpha_{e,i}(-\gamma_n B_{n,i} - \beta_e\kappa_{n,i}A_{n,i})f_{n,i}(r) \quad (40)$$

となる．ここに，

$$\alpha_{e,i} = \frac{jk_0\eta_0}{k_0^2\epsilon_i - k_z^2} \quad (41)$$

$$\beta_e = \frac{k_z}{k_0\eta_0} \quad (42)$$

である． $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ は特性インピーダンスであり， ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率，透磁率である．同様に，式 (39), (40) のトランスポート界は，

$$E_{x,i}^t = \sum_{n=-M}^M \alpha_{e,i}(\kappa_{n,i}B_{n,i}^t + \beta_e\gamma_n A_{n,i}^t)f_{n,i}^t(r) \quad (43)$$

$$E_{y,i}^t = \sum_{n=-M}^M \alpha_{e,i}(-\gamma_n B_{n,i}^t + \beta_e\kappa_{n,i}A_{n,i}^t)f_{n,i}^t(r) \quad (44)$$

と表せる．ここに，

$$f_{n,i}^t(r) = \exp(\gamma_n x + \kappa_{n,i}y + jk_z z) \quad (45)$$

である．境界 Γ_1, Γ_2 上の電界 \tilde{E} の x, z 成分を領域 Ω_2 の要素と適合するように補間することを考慮すると，領域 Ω_i の汎関数 $I_i (i = 1, 3)$ は，

$$\begin{aligned} I_i = & [\{A_{m,i}^t\}^T \{B_{m,i}^t\}^T] \begin{bmatrix} [G_{1,i}] & [G_{2,i}] \\ [G_{3,i}] & [G_{4,i}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A_{n,i}\} \\ \{B_{n,i}\} \end{bmatrix} \\ & + [\{\tilde{E}_x^t\}^T \{\tilde{E}_z^t\}^T] \begin{bmatrix} [0] & [L_{Bx,i}] \\ [L_{Az,i}] & [L_{Bz,i}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{A_{n,i}\} \\ \{B_{n,i}\} \end{bmatrix} \\ & + [\{A_{m,i}^t\}^T \{B_{m,i}^t\}^T] \begin{bmatrix} [0] & [L_{Az,i}^t] \\ [L_{Bx,i}^t] & [L_{Bz,i}^t] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\tilde{E}_x\} \\ \{\tilde{E}_z\} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \{D_{m,i}^t\}^T [G] \{D_{n,i}\} + \{\tilde{E}^t\}^T [L_i] \{D_{n,i}\} \\ & + \{D_{m,i}^t\}^T [L_i^t] \{\tilde{E}\} \end{aligned} \quad (46)$$

となる．ここに，

$$\{D_{n,i}\} = [\{A_{n,i}\} \{B_{n,i}\}]^T \quad (47)$$

$$\{\tilde{E}\} = [\{\tilde{E}_x\} \{\tilde{E}_z\}]^T \quad (48)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} [G_{1,i}] & [G_{2,i}] \\ [G_{3,i}] & [G_{4,i}] \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$[L_i] = \begin{bmatrix} [0] & [L_{Bx,i}] \\ [L_{Az,i}] & [L_{Bz,i}] \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$[L_i^t] = \begin{bmatrix} [0] & [L_{Az,i}^t] \\ [L_{Bx,i}^t] & [L_{Bz,i}^t] \end{bmatrix} \quad (51)$$

であり，

$$[G_{1,i}] = \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M \delta_{nm} \frac{\kappa_{n,i}}{\mu_i} \times (1 - \alpha_{e,i}\beta_e jk_z) \quad (52)$$

$$[G_{2,i}] = \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M \delta_{nm} \frac{-\alpha_{e,i}\gamma_n}{2\mu_i} \times \{jk_z + \alpha_{e,i}\beta_e(\gamma_n^2 + \kappa_n^2)\} \quad (53)$$

$$[G_{3,i}] = \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M \delta_{nm} \frac{\alpha_{e,i}\gamma_n}{2\mu_i} \times \{jk_z + \alpha_{e,i}\beta_e(\gamma_n^2 + \kappa_n^2)\} \quad (54)$$

$$[G_{4,i}] = \sum_{n=-M}^M \sum_{m=-M}^M \delta_{nm} \frac{-\alpha_{e,i}^2\kappa_{n,i}}{\mu_i} \times (\gamma_n^2 + \kappa_{n,i}^2) \quad (55)$$

$$[L_{Az}] = \sum_{ie} \int_{\Gamma_i} \{N\} \sum_{n=-M}^M \frac{-\kappa_{n,i}}{\mu_i} \times (1 - \alpha_{e,i}\beta_e jk_z) \exp(-\gamma_n x) dx \quad (56)$$

$$[L_{Bz}] = \sum_{ie} \int_{\Gamma_i} \{N\} \sum_{n=-M}^M \frac{1}{\mu_i} \times \alpha_{e,i} jk_z \gamma_n \exp(-\gamma_n x) dx \quad (57)$$

$$[L_{Bx}] = \sum_{ie} \int_{\Gamma_i} \{U\} \sum_{n=-M}^M \frac{\alpha_{e,i}}{\mu_i} \times (\gamma_n^2 + \kappa_{n,i}^2) \exp(-\gamma_n x) dx \quad (58)$$

$$[L_{Az}^t] = \sum_{ie} \int_{\Gamma_i} \{N\}^T \sum_{m=-M}^M \frac{-\kappa_{m,i}}{\mu_i} \times (1 - \alpha_{e,i} \beta_e j k_z) \exp(\gamma_m x) dx \quad (59)$$

$$[L_{Bz}^t] = \sum_{ie} \int_{\Gamma_i} \{N\}^T \sum_{m=-M}^M \frac{-1}{\mu_i} \times \alpha_{e,i} j k_z \gamma_m \exp(\gamma_m x) dx \quad (60)$$

$$[L_{Bx}^t] = \sum_{ie} \int_{\Gamma_i} \{U\}^T \sum_{m=-M}^M \frac{\alpha_{e,i}}{\mu_i} \times (\gamma_m^2 + \kappa_{m,i}^2) \exp(\gamma_m x) dx \quad (61)$$

である。ここに δ_{nm} はクロネッカーのデルタである。式(46)は展開係数 $\{D_{n,i}\}$, $\{D_{m,i}^t\}$ と電界 $\{\tilde{E}\}$, $\{\tilde{E}^t\}$ を変分量として含んでいることに注意し、まず、展開係数に関して変分をとると、

$$\{D_{n,i}\} = -[G]^{-1} [L_i^t] \{\tilde{E}\} \quad (62)$$

$$\{D_{m,i}^t\} = -(\{\tilde{E}^t\} [L_i]) [G]^{-1} \quad (63)$$

が得られ、式(62),(63)を式(46)に適用すると、

$$I_i = -\{\tilde{E}^t\} [L_i] [G]^{-1} [L_i^t] \{\tilde{E}\} \\ = -\{\tilde{E}^t\} [X_i] \{\tilde{E}\} \quad (64)$$

を得る。

3.4 回折電力の算出

各領域から得られる汎関数において、 $\{E^t\}$, $\{\tilde{E}^t\}$ に関して変分をとり、得られた停留条件から最終的に解くべき連立一次方程式が得られる。この方程式を解くことで得られる電界分布を式(62)に適用すると、展開係数を得る。n 次の規格化反射電力 $P_{r,n}$ 、規格化透過電力 $P_{t,n}$ は入射電力

$$P_{in} = \frac{1}{2} Re \left\{ \frac{E_z^{in}}{\omega \mu_1} (k_y E_z^{in} + k_z E_y^{in}) - \frac{E_x^{in}}{\omega \mu_1} (k_x E_y^{in} + k_y E_x^{in}) \right\} \quad (65)$$

を使って、

$$P_{r,n} = \frac{1}{2} Re \{ A_{n,1} H_{n,1}^* - E_{n,1} B_{n,1}^* \} / P_{in} \quad (66)$$

$$P_{t,n} = \frac{1}{2} Re \{ A_{n,3} H_{n,3}^* - E_{n,3} B_{n,3}^* \} / P_{in} \quad (67)$$

と表せる。ここに、 $H_{n,i}$, $E_{n,i}$ はそれぞれ、

$$H_{n,i} = \frac{j \epsilon_i k_0 / \eta_0}{k_0^2 \epsilon_i - k_z^2} \left(\kappa_{n,i} A_{n,i} - \frac{k_z \eta_0}{k_0 \epsilon_i} \gamma_n B_{n,i} \right) \quad (68)$$

$$E_{n,i} = \frac{-j k_0 \eta_0}{k_0^2 \epsilon_i - k_z^2} \left(\kappa_{n,i} B_{n,i} + \frac{k_z}{k_0 \eta_0} \gamma_n A_{n,i} \right) \quad (69)$$

である。

4. 数値解析例

4.1 誘電体格子

図5に示すような、真空中に配置された誘電体格子の散乱特性を考える。ここに、周期 $p = 11.28\text{mm}$ 、厚み $h = 4.37\text{mm}$ 、誘電体の幅 $w_a = w_b = 0.5p$ 、誘電体の比透磁率をそれぞれ $\epsilon_a = 6.13$, $\epsilon_b = 3.7$ とする。比透磁率はそれぞれ真空の比透磁率 1.0 とする。方位角 θ_r と偏波角 θ_p は

$$\theta_r + \theta_p = 90^\circ \quad (70)$$

を満足するように設定する。

図6は入射角 $\theta_i = 10^\circ$ 、方位角 θ_r が -90° , -60° , -30° の三つの場合での反射電力の周波数依存性を調べたものである。ここに、 λ は入射波の波長である。全反射する規格化周期は、 $\theta_r = -90^\circ$ では $p/\lambda = 0.567$, $\theta_r = -60^\circ$ では $p/\lambda = 0.5356, 0.582$, $\theta_r = -30^\circ$ では $p/\lambda = 0.521, 0.598$ である。図7は規格化周期

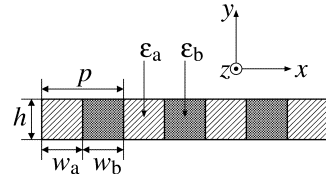


図5 誘電体格子

Fig.5 Dielectric grating.

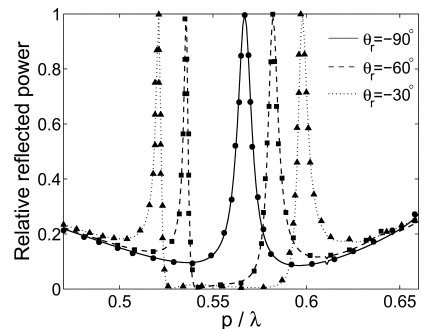


図6 反射電力の周波数依存性

Fig.6 Frequency dependence of reflected powers.

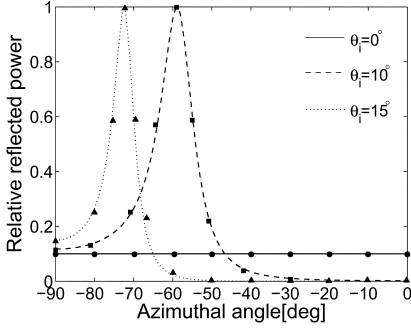


図7 反射電力の方位角依存性

Fig.7 Azimuthal angle dependence of reflected powers.

$p/\lambda = 0.5828$, 入射角 θ_i が $0^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ の三つの場合での反射電力の方位角 θ_r 依存性を示している。 $\theta_i = 10^\circ$ においては $\theta_r = -58.9^\circ$ で, $\theta_i = 15^\circ$ においては $\theta_r = -72.4^\circ$ で全反射が見られる。 $\theta_i = 0^\circ$ では, ピークは現れず平坦な特性を示しているが, これは式 (70) を課したためである。 図 6, 図 7 に示した, 本手法による計算結果 (実線, 破線, 点線) は vectorial modal method による計算結果 (, ,) [16] とよく一致している。 なお本計算では, 不均質な格子領域を x 軸方向, y 軸方向ともに等 24 分割し, 空間高調波数は $-24 \sim 24$ 次までとした。 エネルギー保存の誤差は $10^{-6}\%$ 以下であった。

4.2 完全導体ストリップ格子

図 8 に示すような, 真空中に周期 p で配置された厚み $h = 0$, 幅 $w = p/3$ の完全導体ストリップからなる格子を考える。 ストリップの比透磁率は真空の比透磁率 1.0 とする。

図 9 は規格化周期 $p/\lambda = 0.5$, 入射角 $\theta_i = 45^\circ$, 方位角 $\theta_r = 45^\circ$ とした場合の偏波依存性を示している。 反射, 透過電力いずれも正弦曲線的な変化を示している。 図 10 は入射角 $\theta_i = 45^\circ$, 方位角 $\theta_r = 45^\circ$ とした場合の周波数依存性を示している。(a) ~ (d) はそれぞれ偏波角 $\theta_p = -90^\circ, -60^\circ, -30^\circ, 0^\circ$ とした場合の結果である。 ここで, 格子の構造より, 基本モード以外の高調波の反射電力 $P_{r,n}$, 透過電力 $P_{t,n}$ はそれぞれ等しくなるため, それらの電力を $n \text{ mode}(n = -4, -3, -2, -1, +1)$ と表している。 高調波成分が伝搬モードになる規格化周期 ($p/\lambda = 0.732, 1.465, 2.197, 2.733, 2.929$) においてアノマリが確認できる。 図 9, 図 10 とともに, 本手法による結果 (実線, 破線) は解析的關係式と有限要素法による結合解法による結果 (,) [18] とよく一致している。 なお本計算では, 分割数

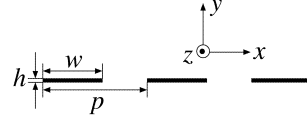


図8 完全導体ストリップ格子

Fig.8 Perfect conductor strip grating.

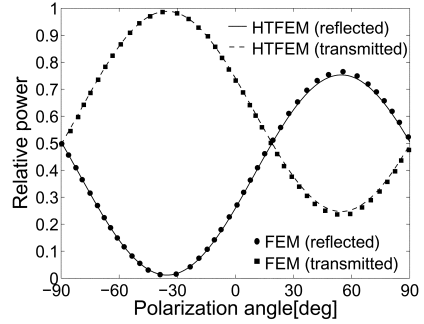


図9 反射・透過電力の偏波依存性

Fig.9 Polarization dependence of reflected and transmitted powers.

が x 軸方向に等 100 分割, モード数は $-100 \sim 100$ 次までとした。 本手法による計算結果では, 本来一致する高調波の反射電力 $P_{r,n}$ と透過電力 $P_{t,n}$ の差の相対値は $10^{-12}\%$ 以下となり, 結合解法 [18] による結果 ($10^{-1}\%$ 以下) よりも高い精度を示した。 しかし, 高調波の搬送電力は基本波と比べて小さいため, エネルギー保存の誤差は本手法並びに結合解法 [18] のいずれも $10^{-2}\%$ 以下と同程度であった。 これは, 直辺混合要素において, 電界分布の接線成分 (x, y 成分) の近似度が法線成分 (z 成分) の近似度よりも低いためだと考えられる。

本手法の有用性を示すため, 本手法と解析的關係式と有限要素法による結合解法 [18] について, 最終的に解くべき連立方程式の次元数の比較を行った。 本論文で用いた計算モデルと, 結合解法の推定モデルでの次元数を表 1 に示す。 両解析法ともに, 格子領域の分割数を x 軸方向, y 軸方向でそれぞれ D_x, D_y としている。 結合解法を用いている文献 [1] によれば, 図 11 に示すように, 接続境界 Γ_1, Γ_2 を格子の上端, 下端からそれぞれある程度 (距離 d) 離して解析しており, 格子の上下にある一様均質領域を通常要素で分割する必要がある。 図 8 の解析 [18] では, 距離 d , 格子の上端から境界 Γ_1 までの分割数 D_{d1} , 格子の下端から境界 Γ_2 までの分割数 D_{d2} は示されていないため, ここでは見積りのために, $D_d = D_{d1} = D_{d2}$ とし, $D_d = 1$,

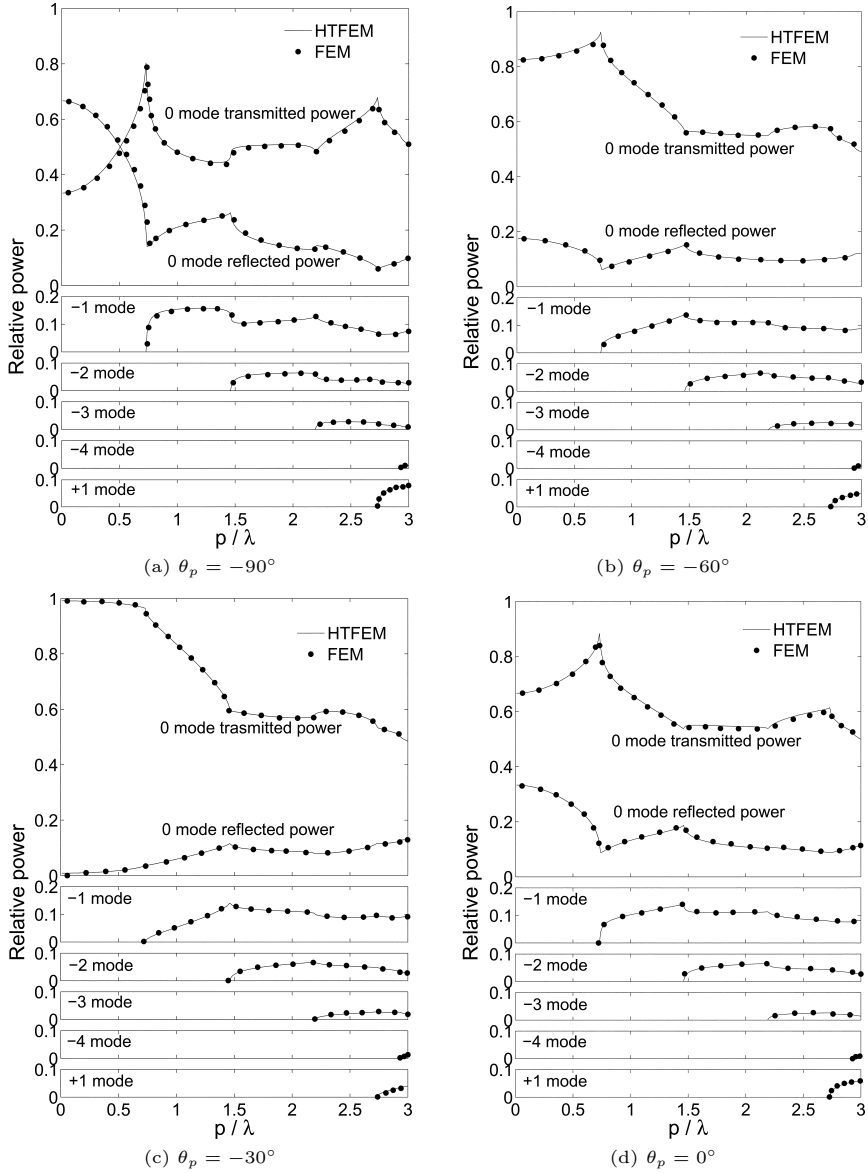


図 10 反射・透過電力の周波数依存性

Fig. 10 Frequency dependence of reflected and transmitted powers.

表 1 次元数の比較

Table 1 Comparison of number of unknowns.

回折格子	分割数 D_x, D_y	本手法	結合解法	
			$D_d = 1$	$D_d = 10$
図 5	24, 24	2976	3840	6432
図 8	100, 0	200	1600	12400

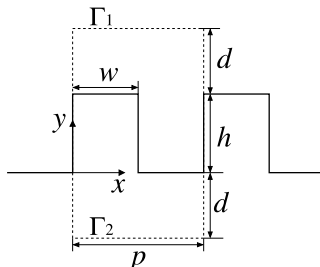


図 11 結合解法の分割領域

Fig. 11 Dividing region of combination methods.

$D_d = 10$ とした場合の次元数を示す。トレフツ要素を適用した本手法は、格子の上下にある一様均質領域を通常要素で分割する必要がないため、結合解法に比べて少ない次元数で解析できることが分かる。

5. むすび

任意の入射方向と偏波をもつ平面波（三次元入射）の回折格子による散乱問題へ、ハイブリッドトレフツ有限要素法を拡張し、定式化を行った。問題の簡単化のため、解析対象を一次元周期構造とした。具体的に、誘電体格子、完全導体ストリップ格子に対する散乱特性解析を行い、vectorial modal method[16]、及び解析的關係式と有限要素法の結合解法[18]による計算結果との比較から、本手法による三次元入射問題解析の妥当性を示した。本手法は、フォトニック結晶などの多層型格子の解析においても、格子間の一様均質領域の分割に、通常要素ではなくトレフツ要素を用いることで、比較的少ない未知数で解析できることが予想される。今後は、フォトニック結晶などの二次元周期構造へ解析対象を拡張する予定である。

文 献

[1] 中田康則, 小柴正則, 鈴木道雄, “誘電体格子による平面波回折の有限要素法解析,” 信学論 (C), vol.J69-C, no.12, pp.1503–1511, Dec. 1986.

[2] 大川論一, 辻 寧英, 小柴正則, “異方性誘電体格子による平面波回折の有限要素法解析,” 信学論 (C-I), vol.J78-C-I, no.9, pp.391–399, Sept. 1995.

[3] 国司和浩, 小柴正則, 辻 寧英, “有限要素法によるキラルグレーティングの偏波特性解析,” 信学論 (C-I), vol.J82-C-I, no.6, pp.318–325, June 1999.

[4] J. Jin, J. L. Volakis, and J. D. Collins, “A finite-element-boundary-integral method for scattering and radiation by two- and three-dimensional structures,” IEEE Antennas Propag. Mag., vol.33, no.3, pp.22–32, June 1991.

[5] S. D. Gedney and R. Mittra, “Analysis of the electromagnetic scattering by thick grating using a combined

FEM/MM solution,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.39, no.11, pp.1605–1614, Nov. 1991.

[6] G. Pelosi, A. Freni, and R. Coccioli, “Hybrid technique for analysing scattering from periodic structures,” IEE Proc. H, vol.140, no.2, pp.65–70, April 1993.

[7] N. A. Golias, Em. E. Kriezis, and T. D. Tsiiboukis, “Hybrid finite-element-analytical method for the analysis of diffraction from metallic gratings of arbitrary profile,” J. Opt. Soc. Am., vol.12, no.5, pp.1147–1151, May 1995.

[8] G. Pelosi, A. Cocchi, and A. Monorchio, “A hybrid FEM-based procedure for the scattering from photonic crystals illuminated by a Gaussian beam,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.48, no.6, pp.973–980, June 2000.

[9] Z. S. Sack, D. M. Kingsland, R. Lee, and J. Lee, “A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.43, no.12, pp.1460–1463, Dec. 1995.

[10] Q.-H. Qin, The Trefftz Finite and Boundary Element Method, WIT Press, 2000.

[11] 佐藤慎悟, 長谷川弘治, “ハイブリッド・トレフツ有限要素法に基づく回折格子の散乱特性解析法,” 第 21 回境界要素法シンポジウム論文集, vol.21, no.13-041006, pp.53–58, Dec. 2004.

[12] 佐藤慎悟, 長谷川弘治, “多層グレーティングの Trefftz 有限要素法解析,” 2003 信学ソ大 (エレクトロニクス), C-1–20, Sept. 2003.

[13] K. Uchida, T. Noda, and T. Matsunaga, “Electromagnetic wave scattering by an infinite plane metallic grating in case of oblique incidence and arbitrary polarization,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.36, no.3, pp.415–422, March 1988.

[14] 松田豊稔, 周 大慶, 奥野洋一, “コニカルマウントされた金属格子での TE-TM モード変換の数値解析,” 信学論 (C-I), vol.J82-C-I, no.2, pp.42–49, Feb. 1999.

[15] C. W. Lee and H. Son, “Analysis of electromagnetic scattering by periodic strip grating on a ground dielectric/magnetic slab for arbitrary plane wave incidence case,” IEEE Trans. Antennas Propag., vol.47, no.9, pp.1386–1392, Sept. 1999.

[16] A. Coves, B. Gimeno, A. A. San Blas, A. Vidal, V. E. Boria, and M.V. Andrés, “Three-dimensional scattering of dielectric gratings under plane-wave excitation,” IEEE Antennas Wireless Propag. Lett., vol.2, pp.215–218, 2003.

[17] 梶原邦裕, 若林秀昭, 稲井 寛, 山北次郎, “斜め入射に対する金属格子における抵抗境界条件の有効性,” 電学電磁界理論研資, EMT-03-54, pp.1–6, 2003.

[18] 中田康則, 小柴正則, “任意の入射面と偏波をもつ平面波の格子による散乱特性の有限要素法解析,” 信学論 (C-I), vol.J72-C-I, no.11, pp.731–739, Nov. 1989.

[19] Y. Ohkawa, Y. Tsuji, and M. Koshiba, “Finite element analysis of general conical diffraction by arbitrarily profiled gratings,” IEEE Trans. Magn., vol.33, no.2, pp.1440–1443, March 1997.

[20] X. Q. Sheng and S. Xu, “An efficient high-order mixed-

edge rectangular-element method for lossy anisotropic dielectric waveguides," IEEE Trans. Microw. Theory Tech., vol.45, no.7, pp.1009-1013, July 1997.

- [21] L. Cairo and T. Kahan, Variational Techniques in Electromagnetism, Gordon and Breach, 1965.

(平成 17 年 5 月 13 日受付, 7 月 20 日再受付)



佐藤 慎悟 (学生員)

平 14 室蘭工大・工・電気電子卒。平 16 同大大学院修士課程了。現在, 同大学院博士後期課程在学中。回折格子による散乱問題に関する研究に従事。



長谷川弘治 (正員)

昭 59 北大・工・電子卒。昭 61 同大大学院修士課程了。平元同博士課程了。同年三井石油化学工業(株)入社。平 5 釧路高専・電子助教授。平 12 室蘭工大・工・電気電子助教授, 現在に至る。弾性表面波デバイス, 光導波路, 非線形光学素子の研究に従事。工博。OSA, 応用物理学会各会員, IEEE Senior Member.