



二重周期構造による平面波散乱特性の三次元ハイブリッドトレフツ有限要素解析法

メタデータ	言語: jpn 出版者: 電子情報通信学会 公開日: 2018-03-02 キーワード (Ja): ハイブリッドトレフツ有限要素法, 三次元解析, 二重周期構造, 散乱特性 キーワード (En): 作成者: 佐藤, 慎悟, 長谷川, 弘治, 平山, 浩一 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/10258/00009573

二重周期構造による平面波散乱特性の三次元ハイブリッドトレフツ有限要素解析法

佐藤 慎悟^{†a)} 長谷川弘治^{††b)} 平山 浩一[†]

A Solution of Plane Wave Scattering by Doubly Periodic Structures in Three Dimensional Space Using Hybrid Trefftz Finite Elements

Shingo SATO^{†a)}, Koji HASEGAWA^{††b)}, and Koichi HIRAYAMA[†]

あらまし 三次元二重周期構造による平面波散乱問題に対するハイブリッドトレフツ有限要素法 (HTFEM) の定式化を行い、数値計算例からその妥当性を確認している。本手法は、不連続部に適用するベクトル有限要素と一様均質半無限領域に適用するトレフツ要素を、ハイブリッド変分原理を用いて接続するものである。トレフツ要素の補関数として、系の支配方程式と放射条件を満足する関数を用いるので、設定された問題よりも一つ次元が落ちた積分で一様均質半無限領域全体の汎関数を評価できる。このため、無限領域を模擬するために有限要素法で利用される仮想吸収媒質あるいは吸収境界条件の設定が不要となる特長がある。本論文では、従来課していた一方向の界の変化が一様の制約を取り除いた三次元二重周期構造問題の定式化を示している。具体的に誘電体ブロック周期構造、周波数選択板の平面波散乱特性を数値解析し、他の解析法による結果との比較から、本解析法の妥当性を示している。

キーワード ハイブリッドトレフツ有限要素法、三次元解析、二重周期構造、散乱特性

1. ま え が き

周波数選択板 (Frequency Selective Surface : FSS) やフォトリソニック結晶のように多次元の周期構造に起因した特異な特性を利用した電磁波デバイスは、電波吸収体 [1]~[3]、フィルタ [4]~[6]、アンテナ [7]~[9] などその応用範囲は広い。特に等価屈折率が負の値をもつメタマテリアル [10]~[12] は次世代の電磁波デバイスとして注目されており、近年活発に研究されている。これらの周期構造は設計や製作の容易さから、基板の面内方向に周期構造を形成した二重周期構造が多い。周期構造による電磁波の伝搬・散乱特性は、単位構造の形状や材料定数に依存するため、電磁界解析を利用

した設計は必須である。最近では、二重周期構造を対象にした最適化設計の報告例も増えてきており [13]~[16]、電磁界解析による特性解析・評価の重要性は高い。

電磁界解析法としてよく知られているモード整合法や積分方程式に基づく手法を用いると、高速な数値解析が可能であるが、形状や材料構成などが複雑な解析対象に対する取扱いは煩雑となることが予想され、最適化設計のように複雑な構造を解析することは容易ではないように思われる。一方複雑な構造への適用が容易で、汎用性に優れた手法として有限要素法と有限差分時間領域法 (Finite Difference Time Domain Method : FDTD 法) が広く利用されている。これらの手法は領域型数値解析法であるため、電磁波の散乱のように無限領域を解析対象とする問題では、解析領域を内部領域と外部領域に仮想的に二分し、外部領域を仮想吸収媒質である完全整合層 [17]~[20] に置換して解析領域を打ち切り、閉領域化する場合が多い。このほかにも、有限要素法では、無限領域である外部領域に他の解析法を適用する手法 [20]~[23] や無限領域用の特殊な要素を外部領域に用いる手法があ

[†] 北見工業大学電気電子工学科, 北見市
Department of Electrical and Electronic Engineering,
Kitami Institute of Technology, Kitami-shi, 090-8507 Japan

^{††} 室蘭工業大学大学院工学研究科, 室蘭市
Graduate School of Engineering, Muroran Institute of Technology,
Muroran-shi, 050-8585 Japan

a) E-mail: s-sato@mail.kitami-it.ac.jp

b) E-mail: khasegaw@mmm.muroran-it.ac.jp

る [20]. 後者の手法の一つにハイブリッドトレフツ有限要素法 (Hybrid Trefftz Finite Element Method: HTFEM) [24], [25] がある. 筆者らが検討してきた周期構造散乱問題の HTFEM は, 系の支配方程式と放射条件を満足する補間関数を採用したトレフツ要素で外部領域を要素分割する. 他方, 構造が複雑な部分を包含する内部領域には, 多項式を補間関数とするベクトル有限要素を適用することで, 有限要素法の構造に対する汎用性を維持し, ハイブリッド変分原理による汎関数を採用することでトレフツ要素との接合を行うものである. これまでは, 主に二次元問題を対象として, HTFEM の妥当性や有用性を示してきた [26]~[28]. 特に, 広い一様均質媒質をもつ多層周期構造の解析では, 完全整合層を外部領域に用いた有限要素法よりも大幅に未知数と計算時間を低減できることを示している [28]. 三次元入射問題については, 文献 [29] で報告したものの, 座標軸の一方方向への界の変化が同様とする制約が課されており, 純粋な三次元問題への適用は文献 [30] のみで, 数値解析例が少なく十分な妥当性の確認は行われていなかった.

本論文では, 三次元二重周期構造を解析対象として, その平面波散乱問題を HTFEM を用いて定式化している. 構造が一方方向に周期的である平面波の三次元入射問題を取り扱っている文献 [29] とは, 二重周期構造を対象とするために (1) 周期境界条件, (2) 解析領域の次元が主たる違いである. ここで, (1) については, 文献 [29] では一方方向のみに課していた周期条件を, 二重周期の両方向に課すように変更している. このため外部領域用トレフツ要素の補間関数として用いている空間高調波は, 文献 [29] では一方方向について展開してきたが, 二重周期とするため二方向に対して展開を行っている. また (2) の解析領域は, 文献 [29] では二次元構造に帰着していたが, 本定式化では三次元構造である. このため, 文献 [29] では内部領域用ベクトル有限要素として長方形エッジ要素を使用していたが, 本論文では三次元直方体エッジ要素 [31] に変更している. 更に反射並びに透過電力を算出するには, 文献 [29] では二次元問題であるから一周期に対応する線分上で電流を積算したが, 本論文では三次元問題であるから一周期に対応する長方形上で積算している.

はじめに, 無損失誘電体平板の反射電力, 透過電力, エネルギー保存則を調べて厳密解との一致を確認した後, 具体的な二重周期構造として単位構造が誘電体ブロック, 三種類の FSS 用導体形状の四例について散乱

特性の解析を行い, 得られた計算結果を他の解析法によるもの [22], [32] と比較することで, 本解析法の妥当性を示している.

2. 定式化

角周波数が ω で正弦波振動する電磁界を考え, 時刻 t 依存性を $\exp(j\omega t)$ として複素表示するものとし, 以下ではこの時間依存項の表記を省略する. ここに j は虚数単位である.

2.1 二重周期構造問題の設定

図 1 に示すような, 厚みが h で, x, z 軸方向にそれぞれ p_x, p_z の周期長をもつ三次元二重周期構造による平面波散乱問題を考える. 内部領域 ($0 \leq y \leq h$) は, 位置に依存する比誘電率 $\epsilon_2(x, y, z)$ の誘電体とし, 半無限の外部領域 ($h \leq y, y \leq 0$) は, それぞれ一定値の比誘電率 ϵ_1, ϵ_3 の誘電体とする. なお全領域の透磁率は, 真空の透磁率 μ_0 とした. 平面波は図 2 に示すように, 入射波数ベクトル \vec{k}_{in} と y 軸がなす入射角が θ_i , 入射面と x 軸がなす方位角が θ_r , 入射面と入射電界ベクトル \vec{E}_{in} がなす偏波角が θ_p で入射するものとする. このとき入射波数ベクトル \vec{k}_{in} は,

$$\vec{k}_{in} = k_x \hat{x} - k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (1)$$

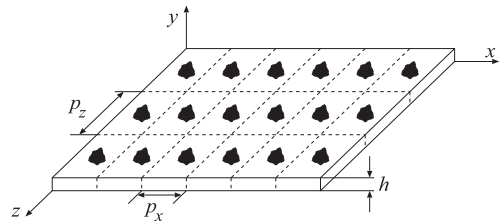


図 1 二重周期構造
Fig. 1 Doubly periodic structure.

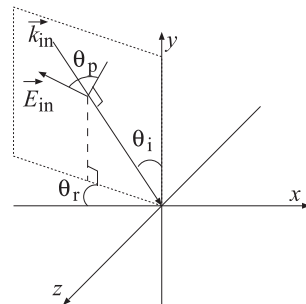


図 2 入射平面波
Fig. 2 Incident plane wave.

$$\left. \begin{aligned} k_x &= k_0 \sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_i \cos \theta_r \\ k_y &= k_0 \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i \\ k_z &= k_0 \sqrt{\epsilon_1} \sin \theta_i \sin \theta_r \\ k_0 &= 2\pi/\lambda_0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる．ここに λ_0 は真空中の平面波の波長であり， \hat{x} ， \hat{y} ， \hat{z} はそれぞれ x ， y ， z 軸方向の単位ベクトルである．入射電界ベクトル \vec{E}_{in} は

$$\vec{E}_{\text{in}} = E_0(E_{\text{in},x}\hat{x} + E_{\text{in},y}\hat{y} + E_{\text{in},z}\hat{z}) \quad (3)$$

$$E_{\text{in},x} = -\sin \theta_p \sin \theta_r + \cos \theta_p \cos \theta_i \cos \theta_r \quad (4)$$

$$E_{\text{in},y} = \cos \theta_p \sin \theta_i \quad (5)$$

$$E_{\text{in},z} = \sin \theta_p \cos \theta_r + \cos \theta_p \cos \theta_i \sin \theta_r \quad (6)$$

と表せる．ここに， E_0 は入射平面波の振幅であり，計算の簡単のため $E_0 = 1$ とする．入射電磁界は不均質領域上面 ($y = h$) に誘導定理を適用して，等価電磁流源

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \hat{y} \times \nabla \times \vec{E}_{\text{in}} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \hat{y} \times \vec{E}_{\text{in}} \quad (7)$$

に置き換え，外部領域の無限遠方 $\pm y$ 軸方向に放射条件を課す． x - z 面内では，構造の周期性から周期条件

$$\vec{E}(\vec{r} + \vec{R}_{mn}) = \vec{E}(\vec{r})e^{-j(k_x \hat{x} + k_z \hat{z}) \cdot \vec{R}_{mn}} \quad (8)$$

を課す．ここに， \vec{r} は位置ベクトル， \vec{R}_{mn} は格子ベクトルであり，

$$\vec{R}_{mn} = mp_x \hat{x} + np_z \hat{z} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9)$$

である．なお，文献[29]のように一方向へ周期的な二次元周期構造での格子ベクトルは， x あるいは z 軸方向に周期性がある場合にそれぞれ，式(9)において $n = 0$ あるいは $m = 0$ としたものである．以上から本問題の解析領域は，図3に示すような単位セルとなる．

2.2 汎関数

図3に示す基本単位セル ($0 \leq x < p_x$, $0 \leq z < p_z$) を解析領域に選び，解析領域を比誘電率 ϵ_i の半無限な一様均質領域 V_i ($i = 1, 3$) と，比誘電率 $\epsilon_2(x, y, z)$ の不均質領域 V_2 に分割する． Ω_i は V_2 と V_i の接続境界面である．系全体の汎関数 I は各領域 V_l ($l = 1, 2, 3$) の寄与分 I_l の総和で計算できる．なお，二次元問題のHTFEM定式化と同様に，ハイブリッド変分原理で用いる接続境界面上の未知電界分布 \vec{E} をベクトル要素の面上界分布と一致させたので，トレフツ要素の汎関数にのみ接続境界面上での連続条件緩和評価項を組み

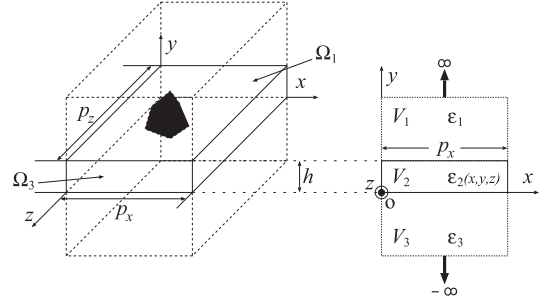


図3 基本単位セル
Fig. 3 Unit cell.

込む．

不均質領域 V_2 の汎関数 I_2 は，通常のベクトル有限要素の汎関数なので，

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_2} [(\nabla \times \vec{E}^t) \cdot (\nabla \times \vec{E}) - k_0^2 \epsilon_2 \vec{E}^t \cdot \vec{E}] dV \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \iint_{\Omega_1} \vec{E}^t \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}_{\text{in}} + \nabla \times \hat{n} \times \vec{E}_{\text{in}}) dA \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \iint_{\Omega_3} \vec{E} \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \vec{E}_{\text{in}}^t + \nabla \times \hat{n} \times \vec{E}_{\text{in}}^t) dA \end{aligned} \quad (10)$$

である．ここに，上添字 t はトランスポーズ界[33]， $\iiint_{V_2} dV$ は領域 V_2 での体積積分， $\iint_{\Omega_1} dA$ は面 Ω_1 上の面積分を表す．なお領域 V_2 からのエネルギー流出は，領域 V_1 ， V_3 との接続時に打ち消し合うので省略してある．

半無限な一様均質領域 V_i ($i = 1, 3$) は，それぞれ系の支配方程式を満足する補関数を用いたトレフツ要素で分割するため，汎関数 I_i は，

$$\begin{aligned} I_i &= -\frac{1}{2\mu_0} \iint_{\partial V_i} [(\vec{E} \times \nabla \times \vec{E}^t) + (\vec{E}^t \times \nabla \times \vec{E})] \cdot d\vec{A} \\ &+ \frac{1}{\mu_0} \iint_{\Omega_i} [(\vec{E}_i \times \nabla \times \vec{E}^t) + (\vec{E}_i^t \times \nabla \times \vec{E})] \cdot d\vec{A} \end{aligned} \quad (11)$$

となる．ここに， \vec{E}_i はトレフツ要素と隣接する要素との接続境界面 Ω_i 上の電界であり， $\iint_{\partial V_i} d\vec{A}$ は半無限領域 V_i を囲む閉曲面 ∂V_i での面積分を表す．本定式化では補関数として放射条件，周期条件を満足する空間高調波を採用するので，汎関数 I_i の積分面 ∂V_i は境界面 Ω_i 上の面積分となる．

2.3 不均質領域における汎関数の離散化

三次元構造を取り扱うため，不均質領域 V_2 を図4

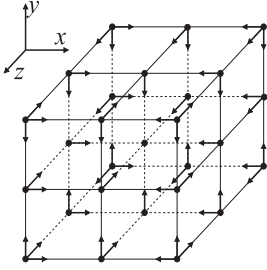


図4 直方体エッジ要素
Fig. 4 Hexahedron edge element.

に示すような三次元直方体エッジ要素 [31] で要素分割する．この要素内の近似電界は

$$\vec{E} = \{U\}^T \{E_x\} \hat{x} + \{V\}^T \{E_y\} \hat{y} + \{N\}^T \{E_z\} \hat{z} \quad (12)$$

である．ここに， $\{U\}$ ， $\{V\}$ ， $\{N\}$ は補間関数からなる列ベクトル， $\{E_w\}$ ($w = x, y, z$) は要素内電界分布の展開係数であり，各要素内の 18 個の電界の w 成分の値からなる列ベクトルである．上添字 T は転置をとることを表す．各要素ごとに式 (12) を用いて領域 V_2 の電界を近似すると，離散化した式 (10) が

$$I_2 = \{E^t\}^T [C] \{E\} + \{E^t\}^T \{S\} + \{S^t\}^T \{E\} \quad (13)$$

となり，列ベクトル $\{E\}$ ， $\{S\}$ ，正方行列 $[C]$ はそれぞれ，

$$\{E\} = [\{E_x\}^T \quad \{E_y\}^T \quad \{E_z\}^T]^T \quad (14)$$

$$\{S\} = [\{S_x\}^T \quad \{0\}^T \quad \{S_z\}^T]^T \quad (15)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_{xx}] & [C_{xy}] & [C_{xz}] \\ [C_{yx}] & [C_{yy}] & [C_{yz}] \\ [C_{zx}] & [C_{zy}] & [C_{zz}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

である．ここに $\{S_x\}$ ， $\{S_z\}$ ，及び $[C]$ の小行列はそれぞれ，

$$\{S_x\} = \frac{j}{\mu_0} \iint_{\Omega_1} \{U\} \left\{ \begin{array}{l} k_x \\ k_y \end{array} \right\} (k_x E_{in,x} + k_z E_{in,z}) + k_x E_{in,y} + 2k_y E_{in,x} \Big\} e^{-j(k_x x + k_z z)} dA \quad (17)$$

$$\{S_z\} = \frac{j}{\mu_0} \iint_{\Omega_1} \{N\} \left\{ \begin{array}{l} k_x \\ k_y \end{array} \right\} (k_x E_{in,x} + k_z E_{in,z})$$

$$+ k_z E_{in,y} + 2k_y E_{in,z} \Big\} e^{-j(k_x x + k_z z)} dA \quad (18)$$

$$[C_{xx}] = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_2} \left(\frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial y} + \frac{\partial \{U\}}{\partial z} \frac{\partial \{U\}^T}{\partial z} - k_0^2 \epsilon_2 \{U\} \{U\}^T \right) dV \quad (19)$$

$$[C_{xy}] = [C_{yx}]^T = -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_2} \frac{\partial \{U\}}{\partial y} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} dV \quad (20)$$

$$[C_{xz}] = [C_{zx}]^T = -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_2} \frac{\partial \{U\}}{\partial z} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} dV \quad (21)$$

$$[C_{yy}] = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_2} \left(\frac{\partial \{V\}}{\partial x} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{V\}}{\partial z} \frac{\partial \{V\}^T}{\partial z} - k_0^2 \epsilon_2 \{V\} \{V\}^T \right) dV \quad (22)$$

$$[C_{yz}] = [C_{zy}]^T = -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_2} \frac{\partial \{V\}}{\partial z} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} dV \quad (23)$$

$$[C_{zz}] = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{V_2} \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} - k_0^2 \epsilon_2 \{N\} \{N\}^T \right) dV \quad (24)$$

とする．

2.4 一様均質領域における汎関数の離散化

一様均質領域 V_i ($i = 1, 3$) はそれぞれ 1 個のトレフツ要素で要素分割する．領域 V_i 内の電磁界の z 成分を放射条件と周期条件を満足する平面波解となるように，

$$E_{z,i} = \sum_{m=-M_x}^{M_x} \sum_{n=-M_z}^{M_z} A_{mn,i} f_{mn,i}(\vec{r}) \quad (25)$$

$$H_{z,i} = \sum_{m=-M_x}^{M_x} \sum_{n=-M_z}^{M_z} B_{mn,i} f_{mn,i}(\vec{r}) \quad (26)$$

と近似する．ここでは，解析対象の構造が x, z 軸方向に周期性をもっているため，両方向について空間高調波展開による電磁界の近似を行っている．ここに， M_x, M_z はそれぞれ x, z 軸方向に関する空間高調波展開を打ち切るモード次数， $A_{mn,i}, B_{mn,i}$ はそれぞれ展開係数であり，

$$f_{mn,i}(\vec{r}) = e^{-\vec{K}_{mn} \cdot \vec{r}} e^{\kappa_{mn,i} y} \quad (27)$$

$$\vec{K}_{mn} = j \left(k_x \hat{x} + k_z \hat{z} + \frac{2m\pi}{p_x} \hat{x} + \frac{2n\pi}{p_z} \hat{z} \right) \quad (28)$$

$$\kappa_{mn,i} = \begin{cases} -j\sqrt{k_0^2 \epsilon_1 + \vec{K}_{mn} \cdot \vec{K}_{mn}} & i = 1 \\ j\sqrt{k_0^2 \epsilon_3 + \vec{K}_{mn} \cdot \vec{K}_{mn}} & i = 3 \end{cases} \quad (29)$$

である。なお、 $M_z = 0$ とした場合、 x 軸方向の周期構造を取り扱っている文献 [29] での空間高調波展開と一致する。電界の x , y 成分は式 (25), (26) から、

$$E_{x,i} = \sum_{m=-M_x}^{M_x} \sum_{n=-M_z}^{M_z} \alpha_{n,i} (-\kappa_{mn,i} B_{mn,i} + j\beta_n k_{xm} A_{mn,i}) f_{mn,i}(\vec{r}) \quad (30)$$

$$E_{y,i} = \sum_{m=-M_x}^{M_x} \sum_{n=-M_z}^{M_z} \alpha_{n,i} (-jk_{xm} B_{mn,i} - \beta_n \kappa_{mn,i} A_{mn,i}) f_{mn,i}(\vec{r}) \quad (31)$$

となる。ここに、 $\alpha_{n,i} = jk_0 \eta_0 (k_0^2 \epsilon_i - k_{zn}^2)^{-1}$, $\beta_n = k_{zn} k_0^{-1} \eta_0^{-1}$, $k_{xm} = -j\vec{K}_{mn} \cdot \hat{x} = k_x + 2m\pi/p_x$, $k_{zn} = -j\vec{K}_{mn} \cdot \hat{z} = k_z + 2n\pi/p_z$ とし、 $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ は特性インピーダンス、 ϵ_0 は真空の誘電率である。

汎関数の式 (11) を式 (12), (25), (30), (31) を用いて離散化すると

$$I_i = \{D_{mn,i}^t\}^T [G_i] \{D_{mn,i}\} + \{\tilde{E}_i^t\}^T [L_i] \{D_{mn,i}\} + \{D_{mn,i}^t\}^T [L_i^t] \{\tilde{E}_i\} \quad (32)$$

となる。ここに、列ベクトル $\{D_{mn,i}\}$ は、 $(2M_x + 1)(2M_z + 1)$ 個の未知展開係数 $A_{mn,i}$, $B_{mn,i}$ を並べた列ベクトル $\{A_{mn,i}\}$, $\{B_{mn,i}\}$ からなるもので、

$$\{D_{mn,i}\} = [\{A_{mn,i}\}^T \{B_{mn,i}\}^T]^T \quad (33)$$

である。また $\{\tilde{E}_i\}$ は接続境界面上の全未知電界ベクトルをまとめた列ベクトルであり、行列 $[G_i]$ は、

$$[G_i] = \begin{bmatrix} [G^{AA,i}] & [G^{AB,i}] \\ [G^{BA,i}] & [G^{BB,i}] \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$G_{pq}^{AA,i} = \delta_{pq} \frac{\kappa_{mn,i}}{\mu_0} (1 - j\alpha_{n,i} \beta_n k_{zn}) p_x p_z \quad (35)$$

$$G_{pq}^{AB,i} = -G_{pq}^{BA,i} = \delta_{pq} \frac{\alpha_{n,i} k_{xm}}{2\mu_0} \{k_{zn} + j\alpha_{n,i} \beta_n (k_{xm}^2 - \kappa_{mn,i}^2)\} p_x p_z \quad (36)$$

$$G_{pq}^{BB,i} = \delta_{pq} \frac{\alpha_{n,i}^2 \kappa_{mn,i}}{\mu_0} (k_{xm}^2 - \kappa_{mn,i}^2) p_x p_z \quad (37)$$

である。ここに δ_{pq} はクロネッカのデルタであり、下添字 p , q はモード次数 m , n と、例えば $q = (m + M_x)(2M_z + 1) + (n + M_z + 1)$ のように一対一対応させ、列ベクトル $\{A_{mn,i}\}$, $\{B_{mn,i}\}$ は要素 1 から要素 $(2M_x + 1)(2M_z + 1)$ までとする。また小行列の上添字は、例えば AB では未知展開係数 $A_{mn,i}$, $B_{mn,i}$ に関する量であることを表す。

行列 $[L_i]$ は

$$[L_i] = \begin{bmatrix} [0] & [L_{Bx,i}] \\ [L_{Ax,i}] & [L_{Bz,i}] \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$[L_{Bx,i}] = \iint_{\Omega_i} \{U\} \{\xi_{mn,i}\}^T dA \quad (39)$$

$$[L_{Ax,i}] = \iint_{\Omega_i} \{N\} \{\eta_{mn,i}\}^T dA \quad (40)$$

$$[L_{Bz,i}] = \iint_{\Omega_i} \{N\} \{\zeta_{mn,i}\}^T dA \quad (41)$$

$$\xi_{mn,i} = -\frac{\alpha_{n,i}}{\mu_0} (k_{xm}^2 - \kappa_{mn,i}^2) f_{mn,i} \quad (42)$$

$$\eta_{mn,i} = -\frac{\kappa_{mn,i}}{\mu_0} (1 - j\alpha_{n,i} \beta_n k_{zn}) f_{mn,i} \quad (43)$$

$$\zeta_{mn,i} = -\frac{\alpha_{n,i}}{\mu_0} k_{xm} k_{zn} f_{mn,i} \quad (44)$$

である。なお $[L_i^t]$ は、 $[L_i]$ の各小行列の要素の計算で $\xi_{mn,i}$, $\eta_{mn,i}$, $\zeta_{mn,i}$ をトランスポーズ界に書き換えたものであるから、ここでは省略する。

式 (32) は変分量として展開係数ベクトルと電界ベクトルを含んでいることに注意し、展開係数ベクトルに関する変分をとると、

$$\{D_{mn,i}\} = -[G_i]^{-1} ([L_i^t] \{\tilde{E}_i\}) \quad (45)$$

$$\{D_{mn,i}^t\} = -(\{\tilde{E}_i^t\}^T [L_i]) [G_i]^{-1} \quad (46)$$

が得られる。式 (45), (46) を式 (32) に代入すると、

$$I_i = -\{\tilde{E}_i^t\}^T [L_i] [G_i]^{-1} [L_i^t] \{\tilde{E}_i\} \quad (47)$$

を得る。

2.5 回折波電力の算出

各領域の汎関数から基本単位セル全体の汎関数が得られる。ここで本定式化では、前述のように、接続境界面 Ω_i 上の電界 \vec{E}_i は領域 V_2 の近似電界とするので、 $\{\tilde{E}_i\}$ ($i = 1, 3$) は $\{E\}$ に一対一に対応していることに注意すると、式 (13) と (47) から汎関数を得られ、電界のトランスポーズ界に関する変分をとると領域 V_2 内の電界の展開係数を未知量とする連立一

次方程式となる．この連立一次方程式に，周期境界条件の式 (8) を用いて $x = p_x$ 面上の電界と対応する $x = 0$ ($m = 1, n = 0$) 面上の未知電界の関係式並びに $z = p_z$ 面と $z = 0$ ($m = 0, n = 1$) 面上の未知電界の関係式を考慮すると，最終的に解くべき連立一次方程式を得る．ここに未知量は，領域 V_2 内の電界の展開係数から，例えば $x = p_x, z = p_z$ 面上のものを除いたものである．この方程式を解いた後，除かれていた周期境界上の電界の展開係数を式 (8) で算出すると，領域 V_2 内の電界の展開係数が得られる．得られた電界の展開係数のうち，図 3 における各領域の接続境界面 Ω_1, Ω_3 上の電界 $\{\tilde{E}_i\}$ を式 (45) に代入すると電磁界の展開係数が得られる． x, z 軸方向にそれぞれ m, n 次の規格化反射電力 $P_{r,mn}$ ，規格化透過電力 $P_{t,mn}$ は，

$$P_{r,mn} = \frac{p_x p_z}{2P_{in}} \operatorname{Re}\{A_{mn,1} H_{mn,1}^* - B_{mn,1}^* E_{mn,1}\} \quad (48)$$

$$P_{t,mn} = \frac{p_x p_z}{2P_{in}} \operatorname{Re}\{A_{mn,3} H_{mn,3}^* - B_{mn,3}^* E_{mn,3}\} \quad (49)$$

となる．ここに $\operatorname{Re}\{\}$ は実部をとること，上添字 $*$ は複素共役をとることを表す． P_{in} は基本単位セルへ入射する平面波の搬送電力であり，

$$P_{in} = \frac{1}{2\omega\mu_0} \{E_{in,z}(k_y E_{in,z} + k_z E_{in,y}) + E_{in,x}(k_x E_{in,y} + k_y E_{in,x})\} p_x p_z \quad (50)$$

である．また $H_{mn,i}, E_{mn,i}$ はそれぞれ，

$$H_{mn,i} = \frac{\epsilon_i k_0 / \eta_0}{k_0^2 \epsilon_i - k_{zn}^2} \left(j\kappa_{mn,i} A_{mn,i} + \frac{k_x m k_{zn} \eta_0}{k_0 \epsilon_i} B_{mn,i} \right) \quad (51)$$

$$E_{mn,i} = \frac{-k_0 \eta_0}{k_0^2 \epsilon_i - k_{zn}^2} \left(j\kappa_{mn,i} B_{mn,i} + \frac{k_x m k_{zn}}{k_0 \eta_0} A_{mn,i} \right) \quad (52)$$

である．

3. 数値計算例

以下の数値計算例では，図 3 において $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 1$ とし，解析対象が真空中に配置された場合を考える．はじめに本論文で示した手法の妥当性を確認するた

めに厳密解が得られる問題として，比誘電率が 4，厚み $\lambda_0/4$ の誘電体平板による平面波の反射と透過を考える．図 3 の基本単位セルの周期長を $p_x = p_z = \lambda_0/4$ ，空間高調波数を $M_x = M_z = 16$ と設定し，単位セルの x, y, z 軸方向の分割数 N_x, N_y, N_z をいずれも 16 とし，等分割して計算を行う．更に領域 V_2 の厚み $h = \lambda_0/4, \epsilon_2 = 4$ としている．計算結果と厳密解との絶対誤差を調べたものを図 5 に示す．ここに図 5 (a), (b) はそれぞれ TE 波入射 ($\theta_p = 90^\circ, \theta_r = 0^\circ$)，TM 波入射 ($\theta_p = 0^\circ, \theta_r = 0^\circ$) の場合の結果である．どちらの場合も厳密解との絶対誤差は小さいが，TM 波入射の誤差は，TE 波入射の誤差よりも 3 けた程度大きくなっている．これは，用いた図 4 の要素の x 軸方向の界変化の近似多項式が，電界の x, z 成分で，それぞれ 1 次，2 次であるため，界の正弦波振動を近似する上では， z 成分のみの TE 波の方が良い近似となって

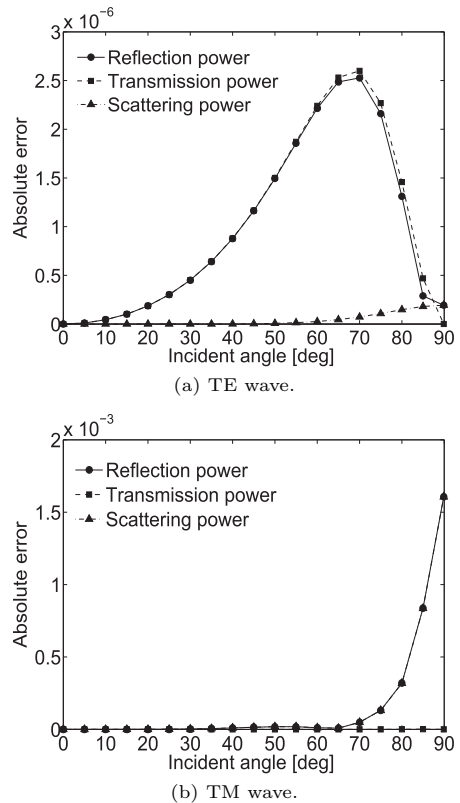
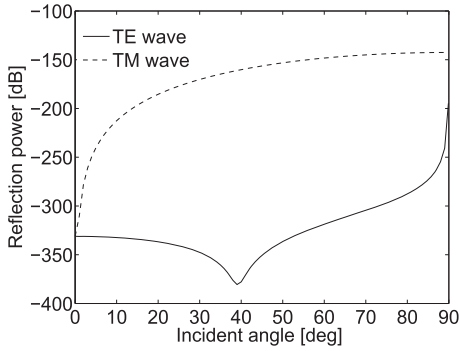
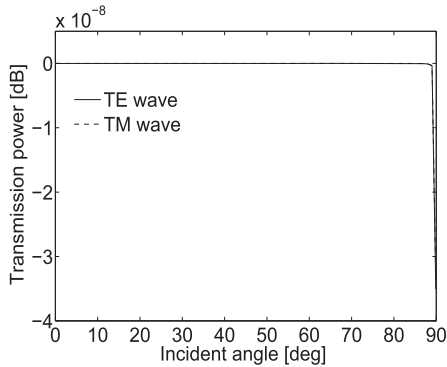


図 5 誘電体板による規格化反射電力，透過電力，散乱電力（規格化反射電力と透過電力の和）の絶対誤差
Fig. 5 Absolute errors of relative reflection, transmission and scattering powers for the dielectric plate with $\lambda_0/4$ and $\epsilon_2 = 4$.



(a) Reflection power.



(b) Transmission power.

図 6 真空中の規格化電力の入射角依存性
Fig. 6 Incident angle dependence of relative powers in vacuum.

いるためと考えられる。誘電体板が無損失であるため、規格化した反射電力と透過電力の和は解析解では 1 となるが、図 5 に示した本手法で計算した電力和の絶対誤差は、反射電力の誤差程度の小さな値であることが分かる。トレフツ要素が良好な半無限領域の近似であることを示すために、この問題の設定において誘電体板の比誘電率のみを 1 に変更し、真空中を平面波が伝搬する場合の規格化電力を調べたものを図 6 に示す。TE 波、TM 波ともに、図 6(a) の反射電力は十分に小さく、図 6(b) の透過電力は入射角 $\theta_i = 89.9^\circ$ において -3.5×10^{-8} [dB] 程度となるが、 $0^\circ \leq \theta_i < 90^\circ$ ではほぼ 0 [dB] となっている。

次に図 7 に示す誘電体ブロックが埋込まれた誘電体板を単位セルとする構造の反射特性を考える。ここで、単位セルの縦横長さ $p_x = p_z = 20$ mm、厚み $h = 2$ mm とし、誘電体スラブの比誘電率 $\epsilon_c = 4$ である。埋め込まれた誘電体ブロックは x, z 方向の長さ w_x, w_z がともに $w_x = w_z = 10$ mm、比誘電率が

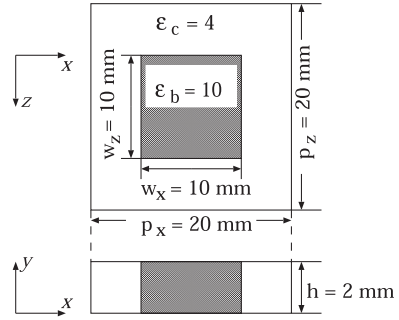
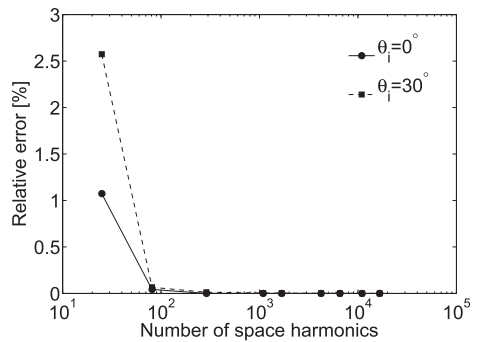
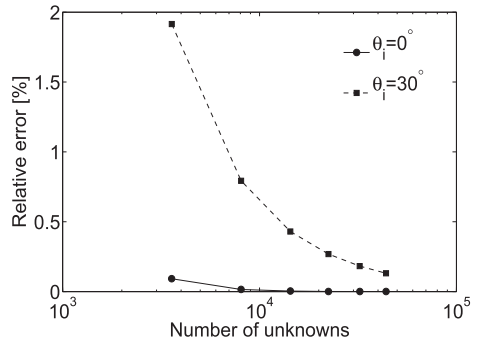


図 7 誘電体ブロックによる周期構造の単位セル
Fig. 7 Unit cell of an embedded dielectric block.



(a) Dependence on the number of space harmonics.



(b) Dependence on the number of unknowns corresponding to electric field components in the region V_2 .

図 8 反射係数の収束性
Fig. 8 Convergence of reflection coefficients.

$\epsilon_b = 10$ である。入射平面波は周波数 $f = 12$ GHz、入射角 $\theta_i = 0^\circ, 30^\circ$ の TM 波 ($\theta_p = 0^\circ, \theta_r = 0^\circ$) とする。図 8(a), (b) はそれぞれ反射係数の空間高調波数依存性、連立一次方程式の次元数すなわち領域 V_2 内の未知電界全成分への依存性を調べたものである。ここでは、厳密解が得られない問題を考えているため、空間高調波数あるいは連立一次方程式の次

元数の実数乗で反射係数が収束すると仮定し、非線形最小二乗法を用いて計算値から高調波数あるいは次元数を無限大に補外した反射係数の収束値を推定し、この推定値との相対誤差を計算した。誘電体板の厚み h が周期方向の長さの 10 分の 1 であることから、厚み y 軸方向の分割数を $N_y = 2$ で固定している。図 8(a) では、単位セルの x, z 軸方向の分割数 N_x, N_z をともに 20 として等分割し、空間高調波数を変化させて収束を調べた。ここでは、空間高調波数を無限大に補外した場合の反射係数との相対誤差を計算している。空間高調波数が少ない場合でも誤差は非常に小さく、 $M_x = M_z = 16$ 程度ではほぼ一定値に収束している。図 8(b) では、 x, z 軸方向に同じ分割数 $N_x = N_z = N$ として N を変化させることで、未知電界全成分数すなわち連立一次方程式の次元数を変化させて収束を調べている。ここでは、空間高調波数と連立一次方程式の次元数をともに無限大に補外した場合の反射係数との相対誤差を計算している。 $\theta_i = 0^\circ$ では、少ない要素分割数でも誤差は非常に小さく収束は速い。 $\theta_i = 30^\circ$ では、誤差は小さいものの $\theta_i = 0^\circ$ と比べると収束が遅くなっている。表 1、表 2 はそれぞれ図 8(a), (b) の相対誤差を計算したときの反

射係数の値を表したものである。ここに ∞ は無限大に補外した場合の値であることを表す。図 8、表 1、表 2 の結果から、以下の数値計算では、単位セルの要素分割数を $N_x = N_z = 16$ 、空間高調波展開数は $M_x = M_z = 16$ とした。図 9 は、TM 波の反射係数の周波数依存性を調べたものである。誘電体板厚み方向の分割数を $N_y = 2$ とした HTFEM の計算結果 (実線、破線) は、入射角 $\theta_i = 30^\circ$ の場合の共振点のピーク値に違いがあるものの、ハイブリッド有限要素/境界積分法 (Hybrid Finite Element/Boundary Integral Method: FE/BI) による計算結果 (●, ■) [22] とよく一致している。

次に誘電体スラブの厚み方向の半分の位置に方形導体が埋め込まれた周波数選択板 (Frequency Selective Surface: FSS) を考える。図 10 に単位セルを示す。ここで、 $p_x = p_z = 10$ mm、 $h = 2$ mm とし、誘電体スラブの比誘電率は $\epsilon_c = 2$ とした。埋め込まれた導体は厚みが零である完全導体とし、 x 軸方向の長さが $w_x = 2.5$ mm、 z 軸方向の長さが $w_z = 5$ mm であ

表 1 空間高調波数に対する反射係数の収束性
Table 1 Convergence of reflection coefficients for the number of space harmonics.

$M_x = M_z$	空間高調波数	反射係数	
		$\theta_i = 0^\circ$	$\theta_i = 30^\circ$
2	25	0.53539	0.31586
4	81	0.52993	0.30814
8	289	0.52970	0.30790
16	1089	0.52970	0.30792
20	1681	0.52970	0.30793
32	4225	0.52970	0.30793
40	6561	0.52970	0.30794
52	11025	0.52970	0.30794
64	16641	0.52970	0.30794
∞	∞	0.52970	0.30794

表 2 未知数に対する反射係数の収束性
Table 2 Convergence of reflection coefficients for the number of unknowns.

分割数 (x, y, z)	未知数	反射係数	
		$\theta_i = 0^\circ$	$\theta_i = 30^\circ$
(8, 2, 8)	3584	0.52922	0.30286
(12, 2, 12)	8064	0.52963	0.30632
(16, 2, 16)	14336	0.52969	0.30744
(20, 2, 20)	22400	0.52970	0.30794
(24, 2, 24)	32256	0.52970	0.30821
(28, 2, 28)	43904	0.52971	0.30836
∞	∞	0.52971	0.30876

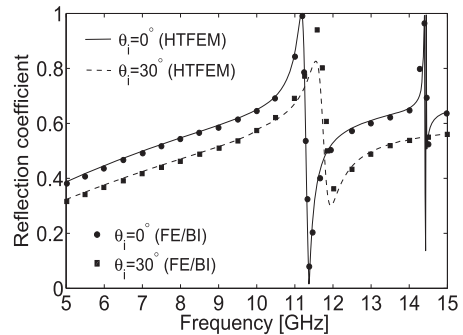


図 9 反射係数の周波数依存性
Fig. 9 Frequency dependence of reflection coefficients.

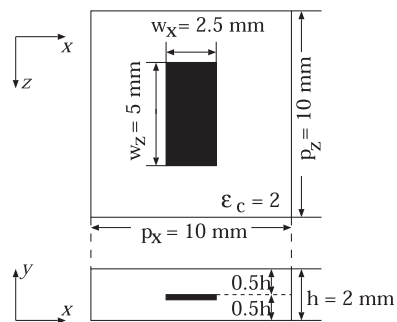


図 10 方形ストリップ埋込型 FSS の単位セル
Fig. 10 Unit cell of FSS with an embedded rectangular strip.

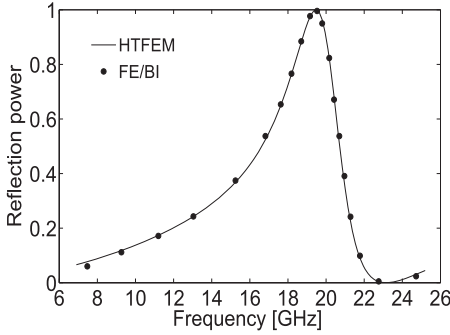


図 11 反射電力の周波数依存性
Fig. 11 Frequency dependence of reflection power.

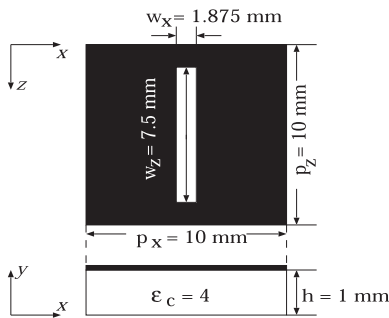


図 12 スロット開口型 FSS の単位セル
Fig. 12 Unit cell of FSS with a slot aperture.

る。図 11 は垂直入射する TE 波 ($\theta_i = 0^\circ$, $\theta_p = 90^\circ$, $\theta_r = 0^\circ$) の反射電力の周波数依存性を調べたものである。HTFEM による計算結果 (実線) と FE/BI による計算結果 (●) [22] はよく一致している。なお HTFEM では誘電体スラブの厚み方向の要素分割数を 2 とした。

また FSS として、比誘電率 4 の誘電体板上面に厚みがゼロの完全導体で周期パターンを形成したものを二種類考える。いずれの入射波も垂直入射する TM 波 ($\theta_i = 0^\circ$, $\theta_p = 0^\circ$, $\theta_r = 0^\circ$) とする。はじめに方形開口パターンを有する FSS を考え、その単位セルを図 12 に示す。ここで $p_x = p_z = 10$ mm, $h = 1$ mm, 開口の x 軸方向の長さ $w_x = 1.875$ mm, z 軸方向の長さ $w_z = 7.5$ mm とした。図 13 は反射電力の周波数依存性を調べたものである。HTFEM による計算結果 (実線) と FE/BI による計算結果 (●) [22] がよく一致している。ここでも、HTFEM では誘電体板の厚み方向の要素分割数を 2 とした。

次に図 14 に示す十字型の導体パターンを考える。ここで $p_x = p_z = 10$ mm, $h = 3$ mm, 十字型導体

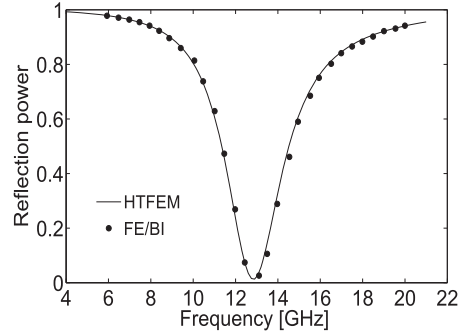


図 13 反射電力の周波数依存性
Fig. 13 Frequency dependence of reflection power.

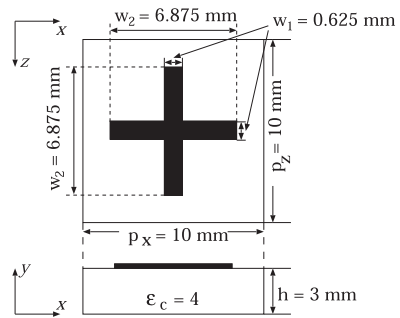


図 14 クロスパッチ型 FSS の単位セル
Fig. 14 Unit cell of FSS with a cross patch.

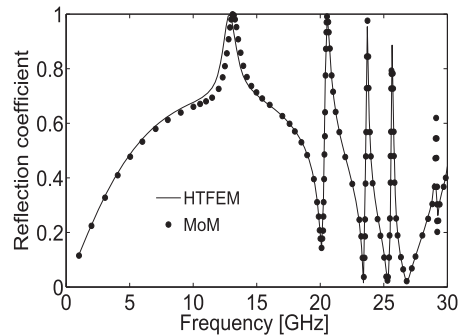


図 15 反射係数の周波数依存性
Fig. 15 Frequency dependence of reflection coefficient.

の短辺 $w_1 = 0.625$ mm, 長辺 $w_2 = 6.875$ mm とした。反射係数の周波数依存性を調べた結果を図 15 に示す。基本単位セルは $x-z$ 平面上で上下並びに左右に対称な構造なので、TE 波 ($\theta_p = 90^\circ$, $\theta_r = 0^\circ$) と TM 波で同じ計算結果となる。13 GHz 付近の共振周波数, 28 GHz 付近のピーク値にそれぞれ違いがあるものの、HTFEM による計算結果 (実線) とモーメント法 (Moment of Method: MoM) による計算結果

(●) [32] は、おおむね一致している。なお誘電体板の厚み方向の要素分割を変えて調べたところ、2 分割では計算精度が不足していたため要素分割数を 10 とした。

4. む す び

三次元二重周期構造による平面波散乱問題のハイブリッドトレフツ有限要素解析法の定式化を示した。具体的に、厳密解のある問題、及び二重周期構造として誘電体ブロック周期構造、FSS（ストリップ埋込型、スロット開口型、クロスパッチ型）による平面波散乱特性解析を行い、ハイブリッド有限要素/境界積分法 [22]、モーメント法 [32] による計算結果との比較から、本手法の妥当性を示した。本手法で用いるトレフツ要素は、本論文で示したような半無限な一様均質領域に適用する以外にも、文献 [27], [28] で示されているように有限な一様均質領域にも適用が可能である。したがって、厚みが十分に薄い導体を使った FSS の数値解析においては、本論文で採用したような三次元要素を適用することなく、トレフツ要素のみで解析することも可能であり、取り扱う未知数を低減できる特長がある。

今後は、本手法の最適構造探索問題への適用を検討するとともに、HTFEM による周期構造伝搬問題解析法 [34] の二重周期構造への拡張を検討する。

文 献

- [1] C.-F. Yang, W.D. Burnside, and R.C. Rudduck, "A doubly periodic moment method solution for the analysis and design of an absorber covered wall," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.41, no.5, pp.600–609, May 1993.
- [2] W. Sun, K. Liu, and C.A. Balanis, "Analysis of singly and doubly periodic absorbers by frequency-domain finite difference method," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.44, no.6, pp.798–805, June 1996.
- [3] F. Costa, A. Monorchio, and G. Manara, "Analysis and design of ultra thin electromagnetic absorbers comprising resistively loaded high impedance surfaces," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.58, no.5, pp.1551–1558, May 2010.
- [4] C.A. Kyriazidou, H.F. Contopanagos, and N.G. Alexopoulos, "Monolithic waveguide filter using printed photonic-bandgap materials," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol.49, no.2, pp.297–307, Feb. 2001.
- [5] J.A. Bossard, D.H. Wener, T.S. Mayer, J.A. Smith, Y.U. Tang, R.P. Drupp, and L. Li, "The design and fabrication of planar multiband metallodielectric frequency selective surfaces for infrared applications," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.54, no.4, pp.1265–1276, April 2006.
- [6] M.J. Huang, M.-Y. Lv, J. Huang, and Z. Wu, "A new type of combined element multiband frequency selective surface," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.57, no.6, pp.1798–1803, June 2009.
- [7] R. Gonzalo, P.de Maagt, and M. Sorolla, "Enhanced patch-antenna performance by suppressing surface waves using phonic-bandgap substrates," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol.47, no.11, pp.2131–2138, Nov. 1999.
- [8] P.de Maagt, R. Gonzalo, Y.C. Vardaxoglou, and J.-M. Baracco, "Electromagnetic badgap antennas and components for microwave and (sub)millimeter wave applications," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.51, no.10, pp.2667–2677, Oct. 2003.
- [9] P. Mookiah and K.R. Dandekar, "Metamaterial-substrate antenna array for MIMO communication system," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.57, no.10, pp.3283–3292, Oct. 2009.
- [10] S.A. Ramakrishna and T.M. Grzegorzcyk, *Physics and Applications of Negative Refractive Index Materials*, CRC Press, 2008.
- [11] N.H. Shen, G. Kenanakis, M. Kafesaki, E.N. Economou, and C.M. Soukoulis, "Parametric investigation and analysis of fishnet metamaterials in the microwave regime," *J. Opt. Soc. Am. B*, vol.26, no.12, pp.B61–B67, Dec. 2009.
- [12] X. Wang and D.H. Werner, "Improved model-based parameter estimation approach for accelerated periodic method of moments solutions with application to the analysis of convoluted frequency selected surfaces and metamaterials," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.58, no.1, pp.122–131, Jan. 2010.
- [13] G. Kiziltas, D. Psychoudakis, J.L. Volakis, and N. Kikuchi, "Topology design optimization of dielectric substrates for bandwidth improvement of a patch antenna," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.51, no.10, pp.2732–2743, Oct. 2003.
- [14] M. Ohira, H. Deguchi, M. Tsuji, and H. Shigekawa, "Multiband single-layer frequency selective surface designed by combination of genetic algorithm and geometry-refinement technique," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.52, no.11, pp.2925–2931, Nov. 2004.
- [15] L. Li, D.H. Werner, J.A. Bossard, and R.S. Mayer, "A model-based parameter estimation technique for wide-band interpolation of periodic moment method impedance matrices with application to genetic algorithm optimization of frequency selective surfaces," *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.54, no.3, pp.908–924, March 2006.
- [16] A.R. Diaz and O. Sigmund, "A topology optimization method for design of negative permeability metamaterials," *Struct. Multidisc. Optim.*, vol.41, no.2,

- pp.163–177, 2010.
- [17] W.C. Chew and W.H. Weedon, “A 3D perfectly matched medium for modified Maxwell’s equations with stretched coordinates,” *Microw. Opt. Technol. Lett.*, vol.7, no.13, pp.599–604, Sept. 1994.
- [18] J.P. Berenger, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *J. Comput. Phys.*, vol.114, no.2, pp.185–200, Oct. 1994.
- [19] Z.S. Sack, D.M. Kingsland, R. Lee, and J. Lee, “A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition,” *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.43, no.12, pp.1460–1463, Dec. 1995.
- [20] J. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, Wiley-Interscience, 2002.
- [21] E.W. Lucas and T.P. Fontana, “A 3-D hybrid finite element/boundary element method for the unified radiation and scattering analysis of general infinite periodic arrays,” *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.43, no.2, pp.145–153, Feb. 1995.
- [22] T.F. Eibert, J.L. Volakis, D.R. Wilton, and D.R. Jackson, “Hybrid FE/BI modeling of 3-D doubly periodic structures utilizing triangular prismatic elements and an MPIE formulation accelerated by the ewald transformation,” *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.47, no.5, pp.843–850, May 1999.
- [23] G. Pelosi, A. Cocchi, and A. Monorchio, “A hybrid FEM-based procedure for the scattering from photonic crystals illuminated by a Gaussian beam,” *IEEE Trans. Antennas. Propag.*, vol.48, no.6, pp.973–980, June 2000.
- [24] Q.-H. Qin, *The Trefftz Finite and Boundary Element Method*, WIT Press, 2000.
- [25] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu, *The Finite Element Method Its Basics & Fundamentals* 6th ed., Ch.12.5, Elsevier, 2005.
- [26] 佐藤慎悟, 長谷川弘治, “ハイブリッド・トレフツ有限要素法に基づく回折格子の散乱問題解析,” *境界要素法論文* 集, vol.21, pp.53–58, Dec. 2004.
- [27] 佐藤慎悟, 長谷川弘治, “多層格子による平面波散乱特性のハイブリッド・トレフツ有限要素法解析,” *計算数理工学論文* 集, vol.5, no.2, pp.113–118, Dec. 2005.
- [28] 佐藤慎悟, 長谷川弘治, “多層周期構造による平面波散乱特性の有限要素解析法の比較,” *計算数理工学論文* 集, vol.7, no.2, pp.219–224, March 2008.
- [29] 佐藤慎悟, 長谷川弘治, “三次元入射する平面波の回折格子散乱問題のハイブリッドトレフツ有限要素法解析,” *信学論 (C)*, vol.J89-C, no.1, pp.1–10, Jan. 2006.
- [30] 佐藤慎悟, 長谷川弘治, “3次元2重周期構造による平面波散乱問題のハイブリッドトレフツ有限要素法解析,” *信学技報*, MW2006-68, July 2006.
- [31] 羽野光夫, “3次元共振器問題の有限要素法解析—立方体要素の場合—,” *信学論 (C)*, vol.J70-C, no.6, pp.791–796, June 1987.
- [32] A. Fallahi, A. Yahaghi, H. Abiri, M. Shahabadi, and C. Hafner, “Large overlapping subdomain method of

moments for the analysis of frequency selective surfaces,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol.58, no.8, pp.2175–2187, Aug. 2010.

- [33] L. Cairo and T. Kahan, *Variational Techniques in Electromagnetism*, Gordon and Breach, 1965.
- [34] 森田好人, 嶋田賢男, 長谷川弘治, 佐藤慎悟, “開放型電磁波導波路固有値問題の Sakurai-Sugiura 射影法を用いたハイブリッド・トレフツ有限要素解析法,” *計算数理工学論文* 集, vol.10, pp.87–92, Dec. 2010.

(平成 23 年 1 月 17 日受付, 4 月 27 日再受付)



佐藤 慎悟 (正員)

平 14 室蘭工大・工・電気電子卒. 平 16 同大学院修士課程了. 平 19 同博士課程了. 同年釧路高専・電子講師. 平 22 北見工大・工・電気電子助教, 現在に至る. 周期構造に関する研究に従事. 博士 (工学). OSA, IEEE 各会員.



長谷川弘治 (正員)

昭 59 北大・工・電子卒. 昭 61 同大学院修士課程了. 平元同博士課程了. 同年三井石油化学工業 (株) 入社. 平 5 釧路高専・電子助教. 平 12 室蘭工大・工・電気電子助教, 平 19 同大教授, 現在に至る. 弾性表面波デバイス, 非線形光学素子, 計算電磁気学の研究に従事. 工博. OSA, 日本計算工学会, 日本計算数理工学会各会員, IEEE Senior Member.



平山 浩一 (正員)

昭 59 北大・工・電子卒. 昭 61 同大学院修士課程了. 平元同博士課程了. 同年釧路高専・電子講師. 平 3 同助教. 平 4 北見工大・工・電気電子助教. 平 16 同大教授, 現在に至る. 平 7–8 ジョージア工科大客員研究員. 光導波路, マイクロ波回路, 回折形光学素子, 電子波回路, 及び最適設計に関する研究に従事. 工博. 応用物理学会会員, IEEE Senior Member.